Grundlagen der Technischen Informatik I

Martin Bogdan

Technische Informatik

Sprechstunde: Mi 11:00 -12:00 Uhr

bogdan@informatik.uni-leipzig.de

Ziele der Vorlesungen TI 1 und TI 2

- Physikalische und elektrotechnische Grundlagen mit Bezug zur Rechnertechnik
  - ⇨ Digitale Schaltungstechnik
  - ⇨ Der Transistor als Schalter
- Digitale Schaltungen
  - ⇨ Darstellung
  - ⇨ Entwurf
  - ⇨ Minimierung
  - ⇨ Realisierung
- Aufbau und Funktionsweise von Rechnersystemen
  - ⇨ Bausteine
  - ⇨ Komponenten
  - ⇨ Funktionsweise
  - ⇨ Peripherie

Inhalt der Vorlesungen TI1 und TI2

- Elektrotechnische Grundlagen
  - ⇨ Physikalische Zusammenhänge, die verwendet werden um Schaltvorgänge in Rechnersystemen durchzuführen
- Halbleitertechnologie
  - ⇨ Funktionsweise von Dioden und Transistoren
  - ⇨ Einsatz von Transistoren als Schalter
- Digitale Schaltungen
  - ⇨ Entwurf, Darstellung und Optimierung von Schaltnetzen und Schaltwerken
  - ⇨ Einfache Bausteine aus denen Rechnersysteme aufgebaut sind

Inhalt der Vorlesungen TI1 und TI2

- Einführung in die Rechnerarchitektur
  - ⇨ Funktion und Aufbau komplexer Bausteine
  - ⇨ Komponenten aus denen Rechnersysteme aufgebaut sind
- Rechnerarithmetik
  - ⇨ Darstellung von Zahlen und Zeichen in Rechnersystemen
  - ⇨ Algorithmen zur Berechnung von Operationen wie die vier Grundrechenarten
- Aufbau eines PCs
  - ⇨ Komponenten
  - ⇨ Busse
  - ⇨ Peripherie

Übersicht

1 Geschichtliche Übersicht

2 Physikalische Grundlagen

- ⇨ Elektrische Ladung
- ⇨ Gleichstrom, Ohmsches Gesetz, Kirchhoffsche Gesetze

3 Halbleitertechnologie

- ⇨ Dioden
- ⇨ Bipolare und FET- Technologie
- ⇨ Der Transistor als Schalter
- ⇨ NMOS- PMOS und CMOS-Schaltkreise
- ⇨ CMOS-Grundschaltungen

Übersicht

4 Herstellung elektronischer Schaltungen

- ⇨ Herstellung von Wafern
- ⇨ Entstehung eines n-MOS-Transistors
- ⇨ Entstehung von CMOS-Schaltungen

5 Schaltnetze

- ⇨ Boolesche Algebra
- ⇨ Normalformen
- ⇨ Darstellung Boolescher Funktionen

6 Minimierung von Schaltnetzen

- ⇨ KV-Diagramme
- ⇨ Minimierung nach Quine MC-Cluskey
- ⇨ Bündelminimierung

Literatur zu dieser Vorlesung

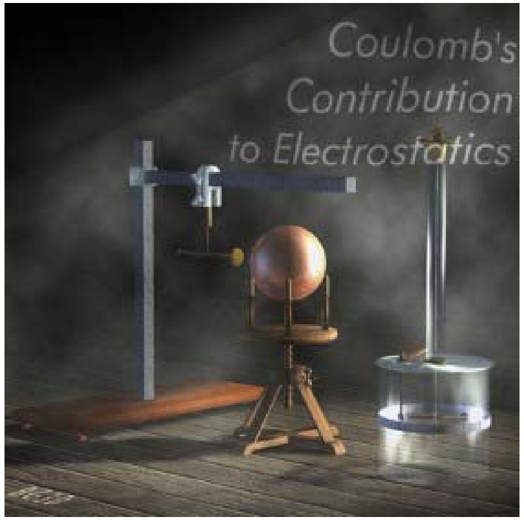
- **Die Vorlesung basiert auf dem Lehrbuch:**
  - ⇨ **W. Schiffmann, R. Schmitz:"Technische Informatik 1 Grundlagen der digitalen Elektronik“ Springer-Lehrbuch, Springer (2001).**

- **Weitere Empfehlungen:**
  - ⇨ **U. Titze, C. Schenk: „Halbleiter Schaltungstechnik“ 11. Auflage, Springer (1999)**
  - ⇨ **M. Reisch: „Elektronische Bauelemente“, Springer (1996)**
  - ⇨ **Hütte: „Die Grundlagen der Ingenieurwissenschaften“ 30. Auflage, Springer (1996)**

- **Skript auf Lernserver**
  - ⇨ **Login: gdti**
  - ⇨ **Passwd: ti03ti**

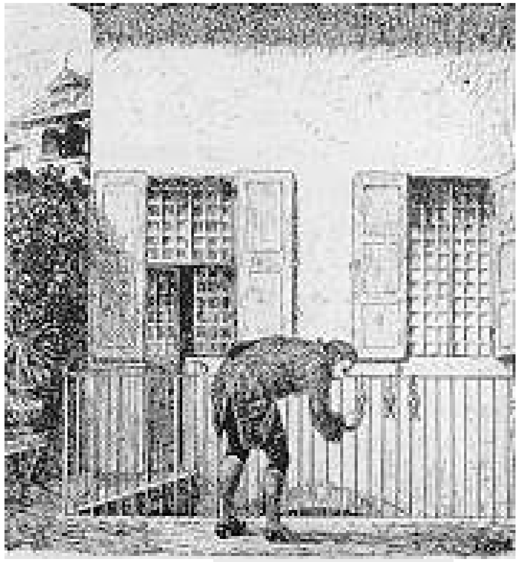
1 Historischer Überblick

- **Griechenland 6. Jh. v.Chr.**
  - ⇨ **Mit Seidentuch geriebener Bernstein zieht Staubteilchen, Wollfäden u.a. Körper an. Name: Elektron = Bernstein Magneteisenstein zieht Eisen an**



- **Gilbert, William 1544-1603**
  - ⇨ **führt den Begriff *Elektrizität* ein**

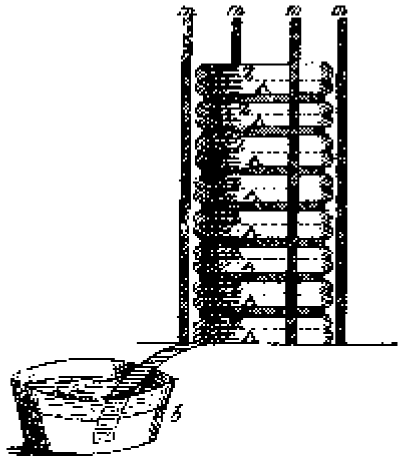
- **Coulomb, Charles 1736-1806**
  - ⇨ **Coulombsches Gesetz**



- **Galvani, Luigi 1737-1798**
  - ⇨ **Galvanische Elemente: Stromquellen deren Energie durch chemische Vorgänge frei wird**

Historischer Überblick

- **Volta, Alessandro 1745-1827**
  - ⇨ **führt die Arbeit Galvanis fort. Konstruiert die Voltaische Säule, die erste brauchbare Elektrizitätsquelle. Von ihm stammt der Begriff des stationären elektrischen Stromes**

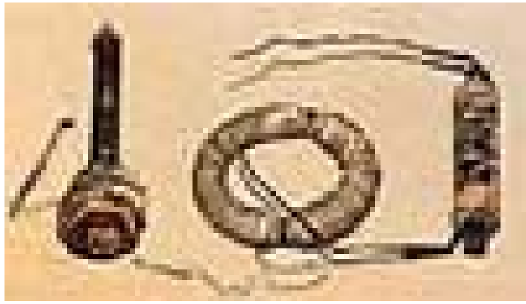


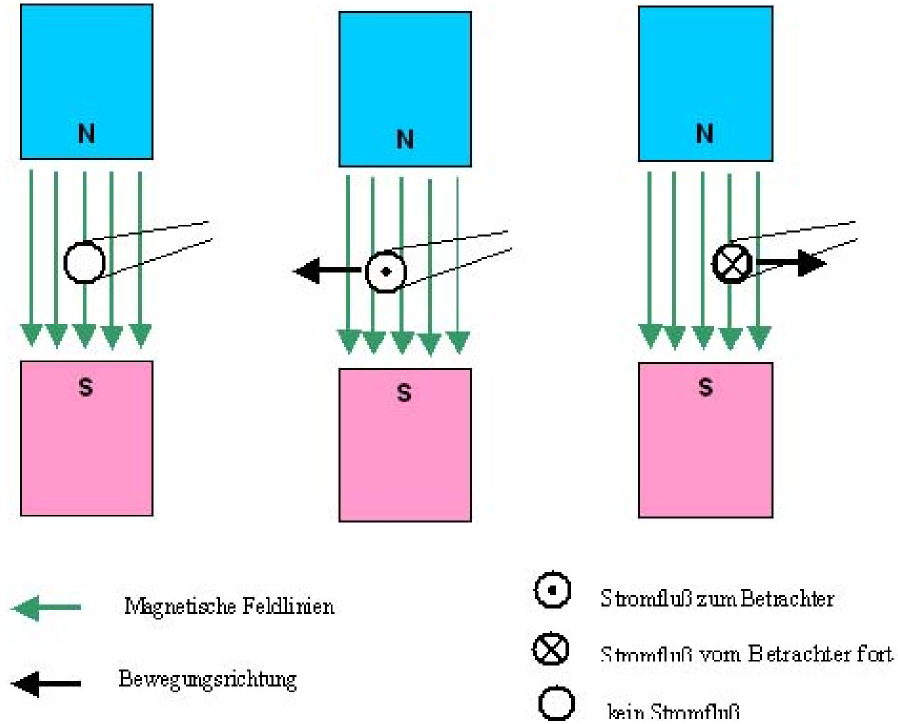
- **Oerstedt, Hans Christian 1777-1851**
  - ⇨ **entdeckt 1820 die Ablenkung der Magnetnadel durch elektrischen Strom (Elektromagnetismus)**

- **Ampere, Andre-Marie 1775-1836**
  - ⇨ **entdeckt die mechanische Wirkung stromdurchflossener Leiter aufeinander (Elektrodynamisches Gesetz). Nach ihm wurde die Einheit der Basisgröße Stromstärke benannt**

Historischer Überblick

- **Faraday, Michael 1791-1867**
  - ⇨ **Elektromagnetische Induktion**

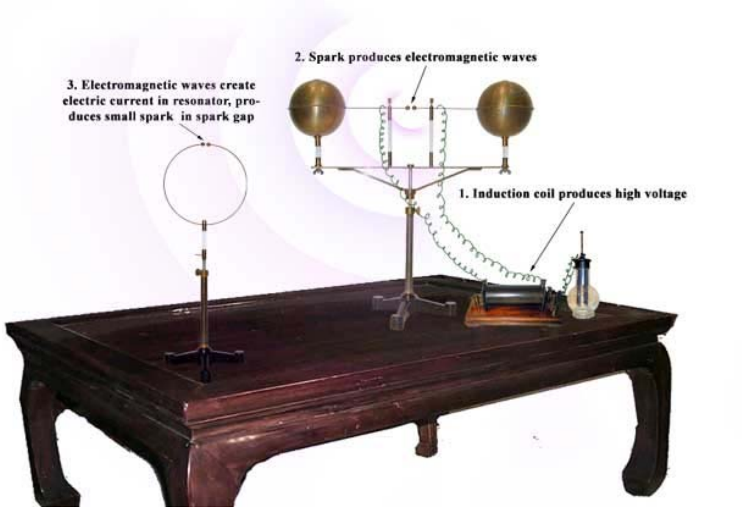




- **Ohm, Georg Simon 1787-1854**
  - ⇨ **Ohmsches Gesetz**

Historischer Überblick

- **Siemens, Werner 1816-1892**
  - ⇨ **Elektrische Maschinen (dynamoelektrisches Prinzip)**
- **Kirchhoff, Gustav Robert 1824-1887**
  - ⇨ **entdeckt die Gesetze der Stromverzweigung**
- **Maxwell, James Clerk 1831-1879**
  - ⇨ **Maxwellsche Gleichungen: Beschreiben alle Erscheinungen, bei denen Elektrizität und Magnetismus miteinander verknüpft sind (Elektrodynamik)**
- **Hertz, Heinrich 1857-1894**
  - ⇨ **entdeckt experimentell die elektromagnetischen Wellen**



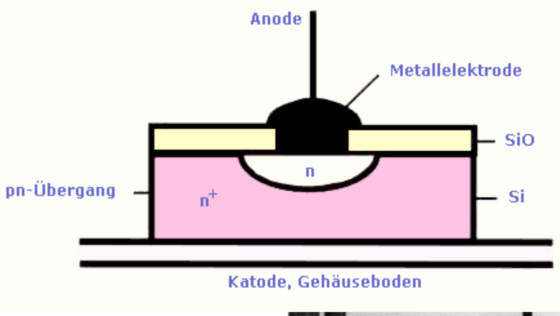
- **Edison, Thomas Alva 1847-1931**
  - ⇨ **Erfinder verschiedener Elektrogeräte: Telegraph, Kohlemikrophon, Glühlampe… Baut 1882 das erste Elektrizitätswerk**

M.Bogdan

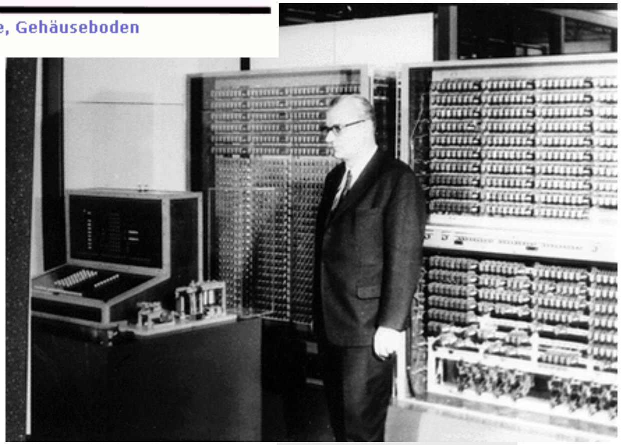
Historischer Überblick

- **1886 Lochkarte**
  - ⇨ **Herman Hollerith (1860-1929) benutzt die Lochkartentechnik zur Datenverarbeitung. Es handelt sich dabei um ein elektromechanisches Verfahren.**

- **1901 Schottky-Diode**
  - ⇨ **Erste Dioden, technisch noch nicht sehr zuverlässig**



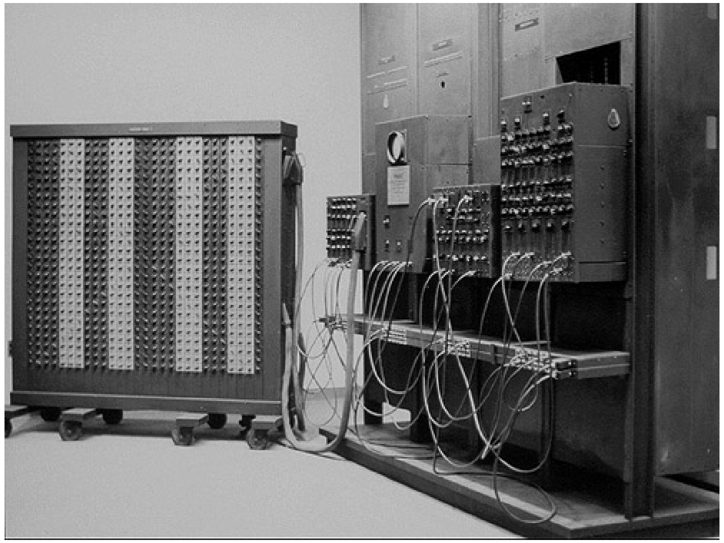
- **1941 Z 3**
  - ⇨ **Konrad Zuse baut die erste funktionsfähige Datenverarbeitungsanlage mit Programmsteuerung in Relaistechnik.**

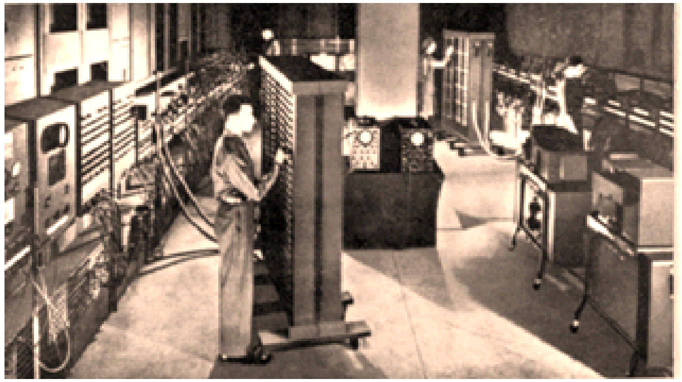


M.Bogdan

Historischer Überblick

- **1946 Eniac**
  - ⇨ **Die erste Computergeneration basiert auf der Röhrentechnik**
    Die Erfinder sind J. Presper Eckert und J. William Mauchly und die logische Konzeption stammt von J. von Neuman



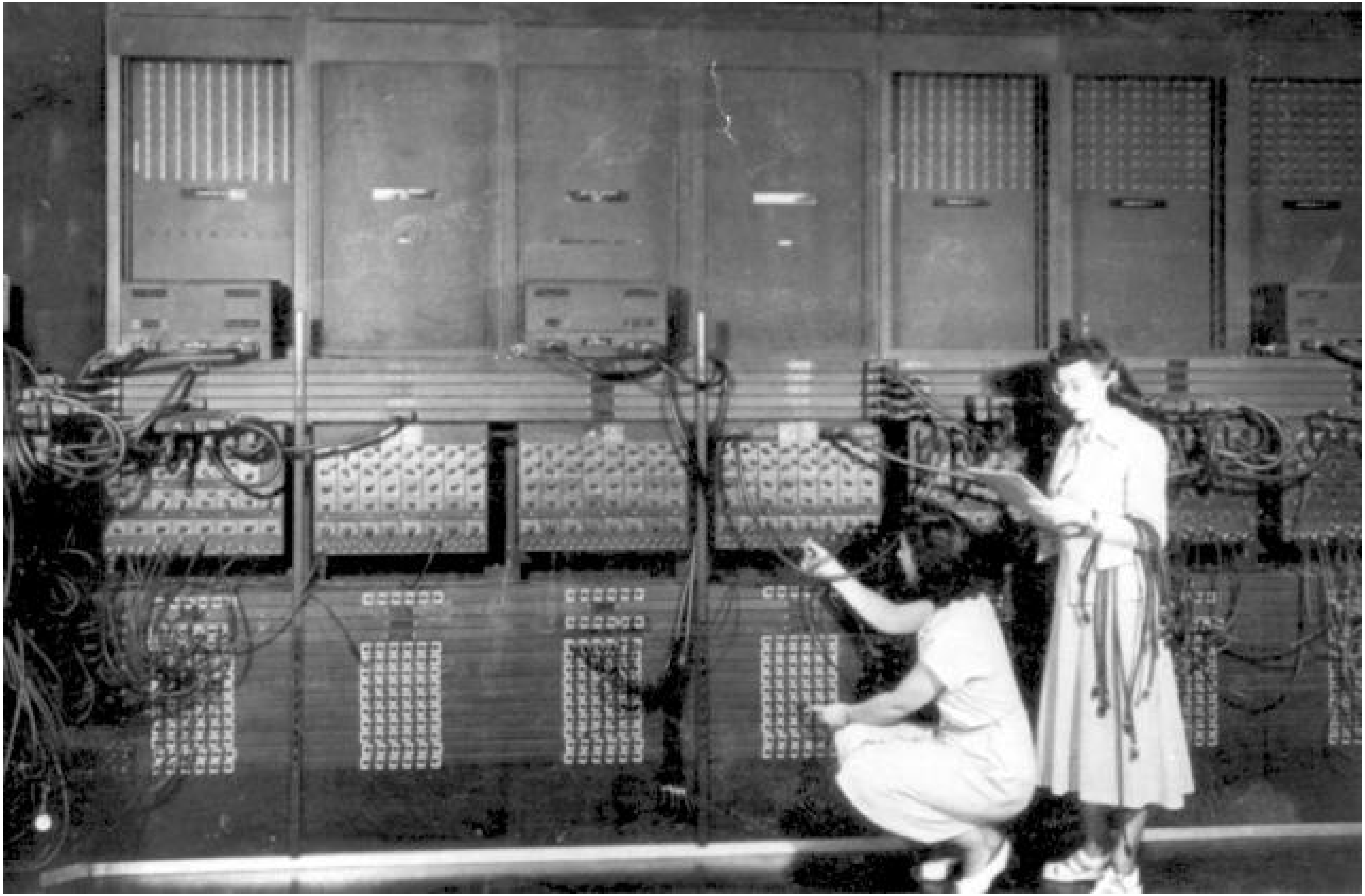


- **1955 Die zweite Computergeneration**
  - ⇨ **Shockley, Bardeen und Brattain entdecken 1947 die Transistorwirkung und legen damit den Grundstein für die Mikroelektronik**

- **1960 Integrierte Schaltkreise (IC)**
  - ⇨ **Die Funktionen von Transistoren, Widerständen und Dioden werden in Planartechnik auf ein Halbleiter-Plättchen aufgebracht**

74er Serie, 1964

Eniac

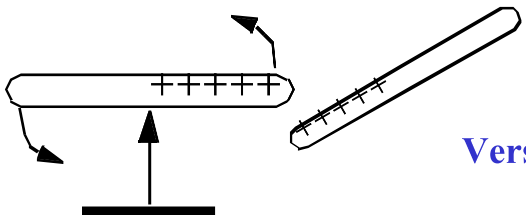


2 Elektrische Ladung und elektrisches Feld

2.1 Elektrische Ladungen

⇨ **Elektrische Ladungen sind Ursache der elektrischen Kräfte. Sie üben auf eine andere Ladung eine Kraft aus.**

⇨ **Historischer Bernstein-Versuch: zwei Hartgummistäbe, einer davon leicht drehbar gelagert, werden einander genähert:**



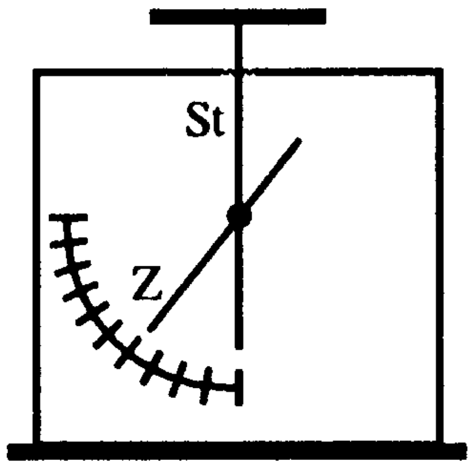
Versuchsanordnung zur Demonstration der elektrischen Kraftwirkung

- **anziehende Wirkung, wenn nur einer der Hartgummistäbe gerieben wurde**
- **abstoßende Wirkung, wenn beide Hartgummistäbe gerieben wurden**

2 Elektrische Ladung und elektrisches Feld

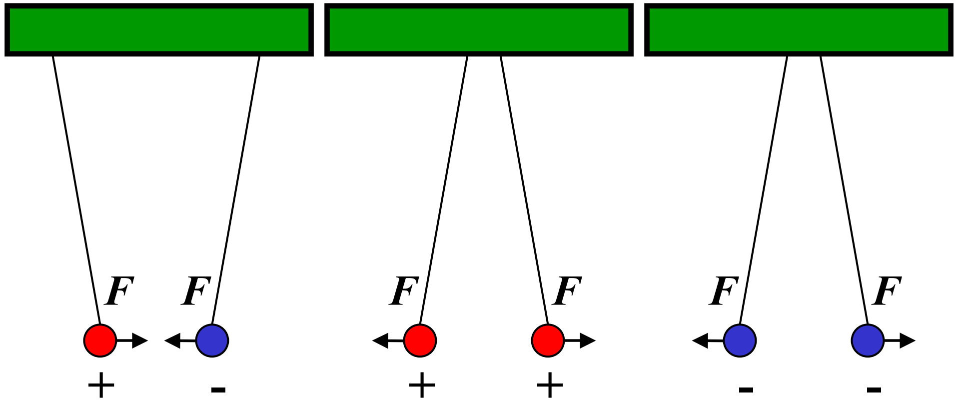
Folgerungen:

- **Es gibt eine elektrische Kraft, die anziehend oder abstoßend wirkt.**
- **Ursache der elektrischen Kraft sind Ladungen.**
- **Es gibt positive und negative Ladungen.**
- **Gleichartige Ladungen stoßen sich ab, verschiedenartige ziehen sich an.**
- **Reibung trennt im Versuch positive und negative Ladungen.**



Ein Nachweisinstrument für Ladungen ist das Elektroskop. Es besteht aus einem festen Metallstab St und einem drehbar gelagerten Zeiger Z, die beide leitend miteinander verbunden sind.

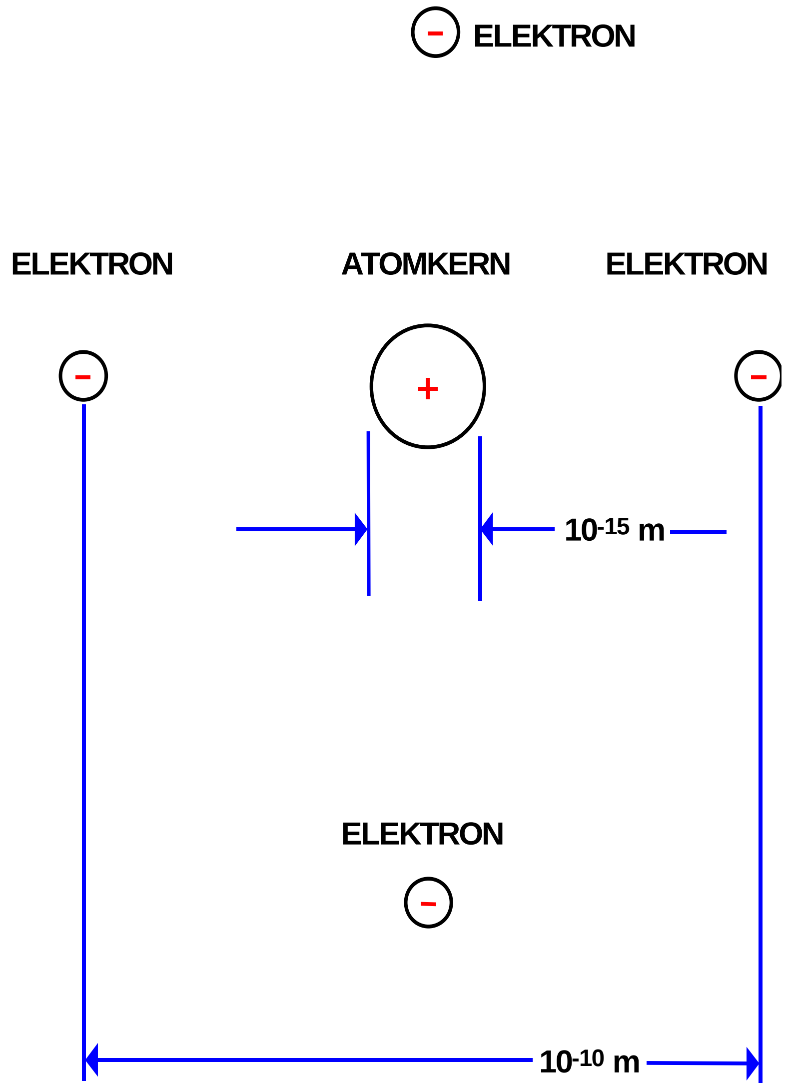
2 Elektrische Ladung und elektrisches Feld



- Elektrische Ladungen üben Kräfte aufeinander aus
  - ⇨ ungleiche Ladungen ziehen sich an
  - ⇨ gleiche Ladungen stoßen sich ab

2 Elektrische Ladung und elektrisches Feld

2.1 Elektrische Ladung



- Die Einheit der elektrischen Ladung ist

  1 C = 1 Asec

- Die elektrische Ladung eines Elektrons beträgt

  $$e_0 = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,C$$

- Man benötigt

  $6{,}242 * 10^{18}$ Elektronen

  um die Ladung 1 C zu erhalten

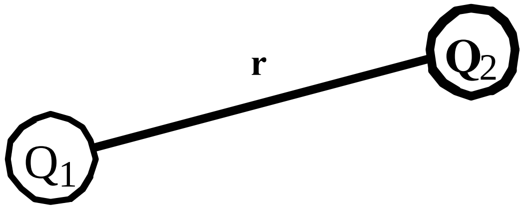
- Die Ladungsmenge Q ist das Vielfache der Elementarladung

  $$Q = n \cdot e_0$$

2 Elektrische Ladung und elektrisches Feld

Das Coulombsche Gesetz

- Charles Coulomb zeigte 1784, daß die Kraftwirkung mit der Ladungsmenge zunimmt.



- Im Vakuum gilt: Die Kraft zwischen Q_1 und Q_2 ist proportinal zum Produkt der Ladungen

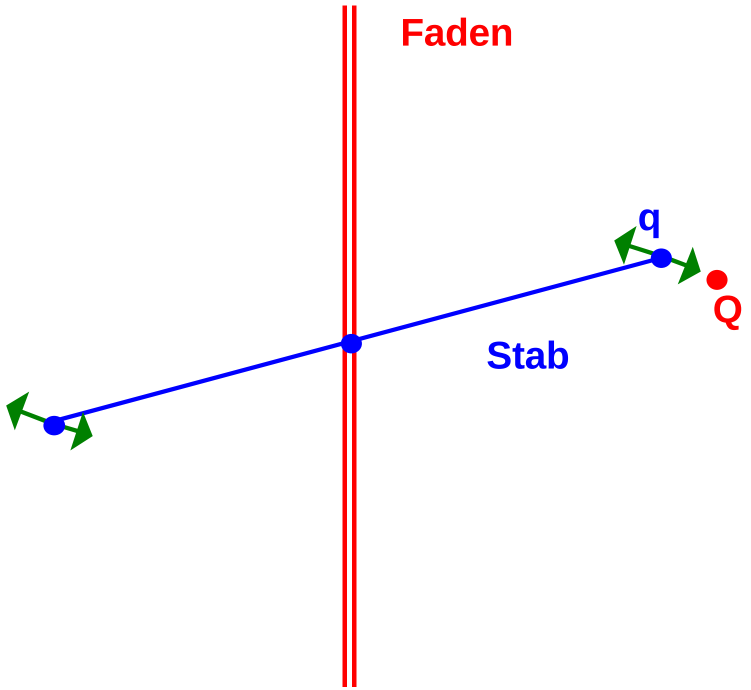
$$F \sim Q_1 \cdot Q_2$$

- Die Kraft ist umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes

$$F \sim \frac{1}{r^2}$$

2 Elektrische Ladung und elektrisches Feld

Torsionswaage (Coulomb, 1785)



Coulombsches Gesetz

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \cdot \vec{r}_0$$

- **Kraftmessung mit Torsionswaage**
  - ⇨ **Zusammengefasst ergibt sich:**

$$F \sim \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

  - ⇨ **Vektoriell und mit Definition der Konstante:**

$$\vec{F} = q \cdot f \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \cdot \vec{r}_0$$

mit f als Proportionalitätsfaktor

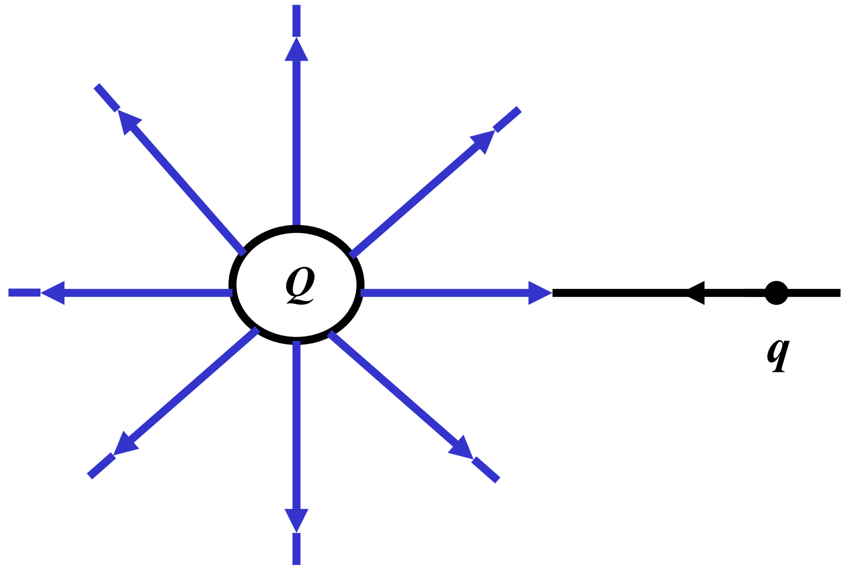
$$f = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

und ε_0 Dielektrizitätskonstante

$$\varepsilon_0 = 8{,}859 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$$

Das elektrische Feld

- **Die Kraftwirkung zwischen Ladungen kann durch das elektrische Feld, eine Eigenschaft des Raumes, beschrieben werden: jedem Punkt des Raumes um eine vorgegebene Ladung wird ein Vektor der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ zugeordnet**



- **Im Raum der Ladung wirkt das elektrische Feld als Kraft auf eine bewegliche Probeladung q.**

Das elektrische Feld

- Das Coulombsche Gesetz kann man umschreiben in der Form

$$\vec{F} = \vec{E} \cdot q \quad \text{mit} \quad \vec{\mathrm{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{r}_0$$

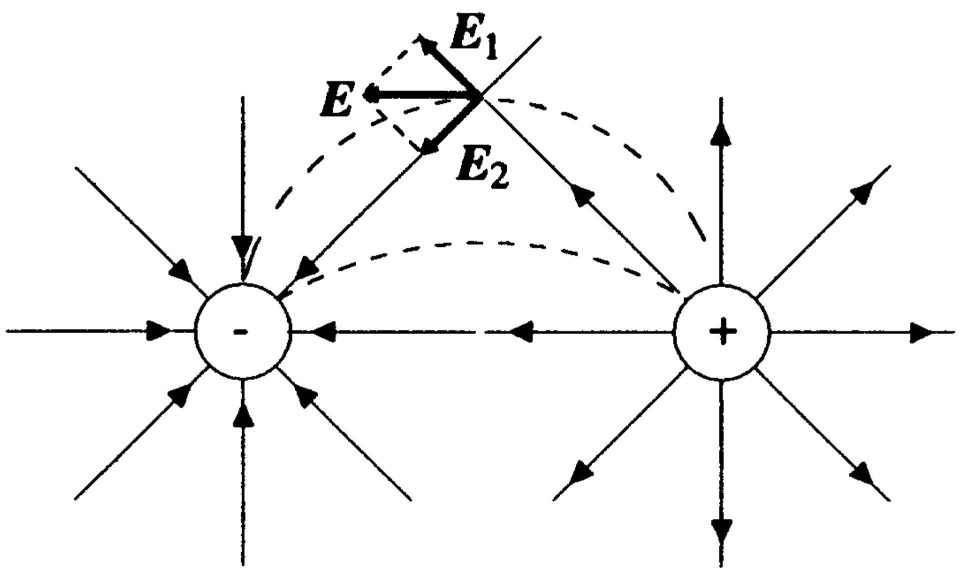
- $\vec{E}$ ist die elektrische Feldstärke der Ladung Q am Ort der Probeladung q.

- Die elektrische Feldstärke ist die Kraftwirkung, die eine Probeladung erfährt.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Das elektrische Feld

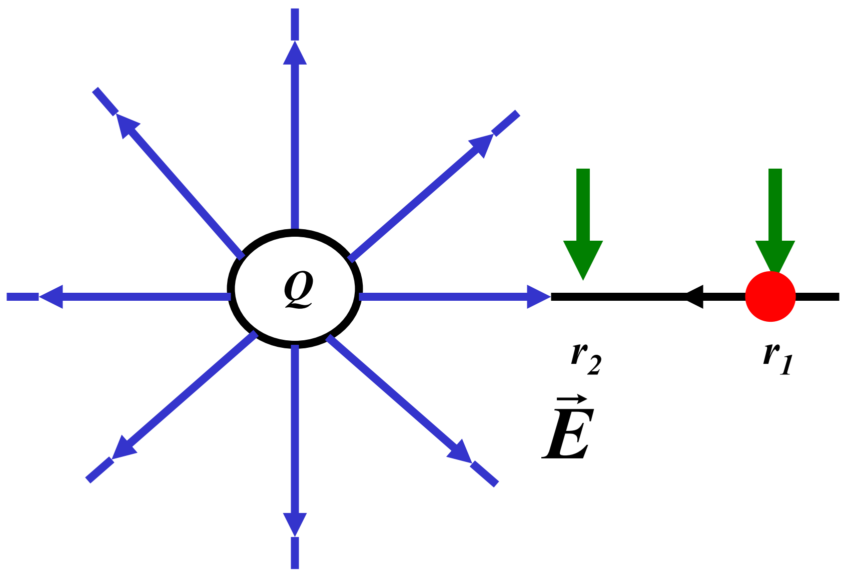
- Feldlinien dienen zur Veranschaulichung des elektrischen Feldes
  - ⇨ sie zeigen immer in Richtung der wirkenden Kraft,
  - ⇨ sie erfüllen den Raum kontinuierlich,
  - ⇨ sie verlaufen von einer positiven zu einer negativen Ladung,
  - ⇨ sie sind nicht geschlossen.



Elektrische Felder überlagern sich additiv

$$\vec{E} = \sum_{n=1}^{N} \vec{E}_n$$

Potential und Spannung



- **Das elektrische Potential ist eng verbunden mit dem Begriff Arbeit. Physikalische Arbeit ergibt sich als Kraft mal Weg**

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

- **Im elektr. Feld wirkt auf eine Ladung q die Kraft**

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

- **Damit beträgt die Arbeit um eine Ladung q von r_1 nach r_2 zu bewegen**

$$W_{1,2} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot dr$$

Die elektrische Spannung

- **Verschiebt man eine Ladung von P 1 nach P 2, so muß die Arbeit $W_{1,2}$ aufgebracht werden**

$$W_{1,2} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} dr = q \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} dr$$

- ⇨ **Die Spannung ist**

$$\vec{U}_{1,2} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} dr$$

- ⇨ **Es ergibt sich allgemein**

$$W = U \cdot q \Rightarrow U = \frac{W}{q} \qquad \text{Spannung} = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Ladung}}$$

- ⇨ **Die Einheit der Spannung ist**

$$1\,\mathrm{V} = 1\,\frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{C}}$$

Die elektrische Spannung

- **Einheit der elektrische Feldstärke E**

$$[E] = \frac{V}{m}$$

- **Bleibt die Energie bei der Ladungsverschiebung von P1 nach P2 dieselbe, dann hat das Feld ein eindeutiges Potential** $\varphi(r)$

- **Die Spannung ist eine Potentialdifferenz**

$$U_{1,2} = \varphi(r_1) - \varphi(r_2)$$

- **Für das Potential einer Punktladung ergibt sich bei Normierung auf** $r = \infty$

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \cdot \frac{1}{r_0}$$

Elektrisches Feld und Spannung

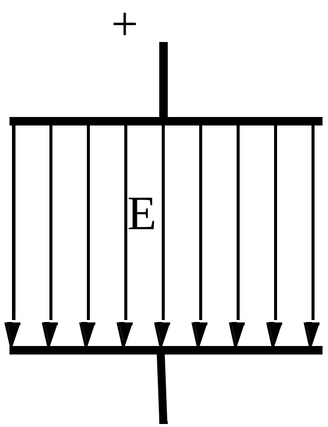
- **Aus einem gegebenen Potential folgt demnach durch Differentiation das Feld E(r)**

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}$$

Zwischen dem Vektorfeld $\vec{E}(r)$ und dem Skalarfeld $\vec{\varphi}(r)$ besteht die Beziehung, daß Flächen mit konstanten φ-Werten, Äquipotentialflächen, überall senkrecht auf den Feldlinien des elektrischen Feldes stehen.

Elektrische Ladung und Leiter

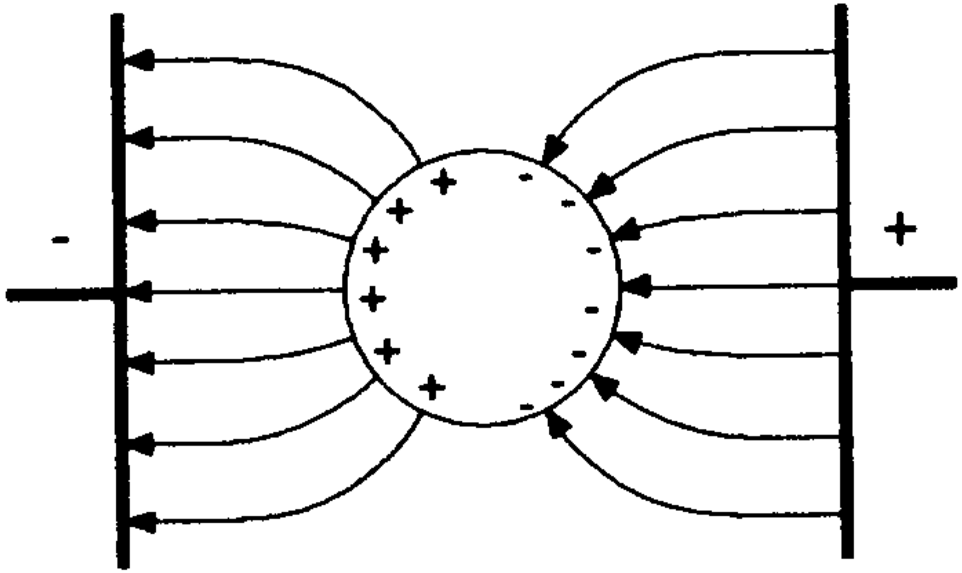
- **Auf metallischen Leitern sind elektrische Ladungen frei beweglich und verteilen sich aufgrund der Abstoßung gleichmäßig auf der gesamten Oberfläche.**
- **Feldlinien des elektrischen Feldes sind senkrecht zur Oberfläche gerichtet. Das Innere eines metallischen Hohlraumes ist ein feldfreier Raum (Faraday'scher Käfig).**
- **Eine parallele Anordnung zweier Metallflächen (Elektroden), von denen eine positiv, die andere negativ geladen ist, heißt Kondensator.**



Elektrisches Feld eines geladenen Plattenkondensators

Elektrische Ladung und Leiter

- **Bringt man in dieses Feld einen metallischen Leiter, so entsteht durch das elektr. Feld eine Ladungsbewegung, bis im Innern des Leiters die Feldstärke E=0 ist. Dies wird Influenz genannt.**



Das Prinzip von MOS-Feldeffekttransistoren basiert auf der Influenzwirkung.

Elektrische Flußdichte

- Das Verhältnis zwischen Ladungsmenge und Fläche wird elektrische Flußdichte genannt.

$$\frac{\text{Ladungsmenge}}{\text{Fläche}} = \text{Elektrische Flußdichte}$$

$$\frac{Q}{A} = D \qquad [D] = \frac{C}{m^2}$$

⇨ Daraus folgt

$$\iint_A D dA = Q$$ falls Ladung in A

$$\iint_A D dA = 0$$ ansonsten

Elektrische Flußdichte

- Flußdichte D durch die Oberfläche einer Kugel, in deren Mittelpunkt sich die Ladung Q befindet, dann folgt für D

$$\iint_{Kugelfläche} D\,dA = Q$$

$$D \cdot 4\pi r^2 = Q$$

$$D = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

- Nach der Formel für die elektrische Feldstärke gilt

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{r}_0 \Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E}$$

Elektrische Flußdichte

- **Einheit der elektrischen Dielektrizitätskonstante (Vakkum)**

$$[\varepsilon_0] = \frac{[D]}{[E]} = \frac{C}{m^2} \cdot \frac{m}{V} = \frac{C}{Vm}$$

- **Im Falle eines mit Materie gefüllten Raumes gilt**

$$D = \varepsilon \cdot E$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$$

⇨ **ε_r istdie spezifische Dielektrizitätskonstate.**
  - **Luft: 1,006**
  - **Polyäthylen: 2,5**

Kondensator

- Ein Kondensator kann elektrische Ladungen speichern.
  - ⇨ Diese Eigenschaft heißt Kapazität des Kondensators.
- Der Kondensator ist ein gänges Bauteil in der Elektrotechnik
  - ⇨ Achtung: zwei Leitung sind ebenfalls ein Kondensator!

- Für dieFeldstärke zwichen den beiden Platten eines Kondensators gilt

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{Q}{A}$$

Kondensator

- **Potentialdifferenz (Spannung) zwischen den Platten im homogenen Feld beträgt**

$$U = E \cdot d$$

$$U = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{Q}{A} \cdot d$$

Umstellen

$$Q = \frac{\varepsilon \cdot A}{d} \cdot U$$

$$Q = C \cdot U$$

Und

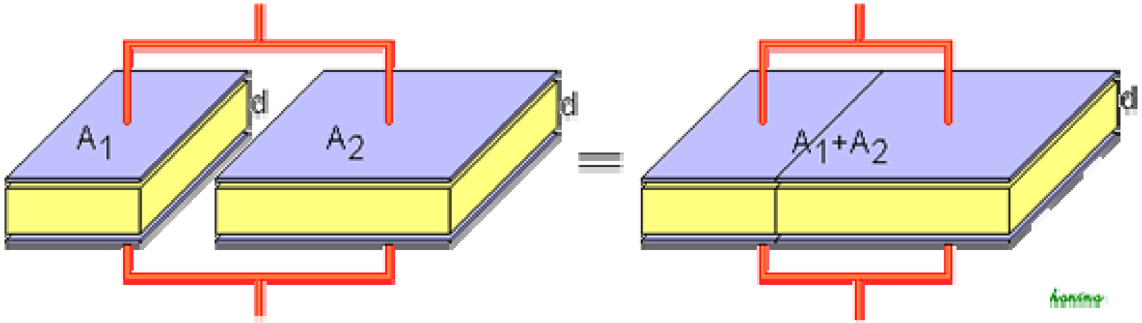
$$dQ = C \cdot dU \quad \text{mit} \quad C = \frac{\varepsilon \cdot A}{d}$$

Die Einheit der Kapazität ist Farad

$$[F] = \frac{C}{V}$$

Kondensator

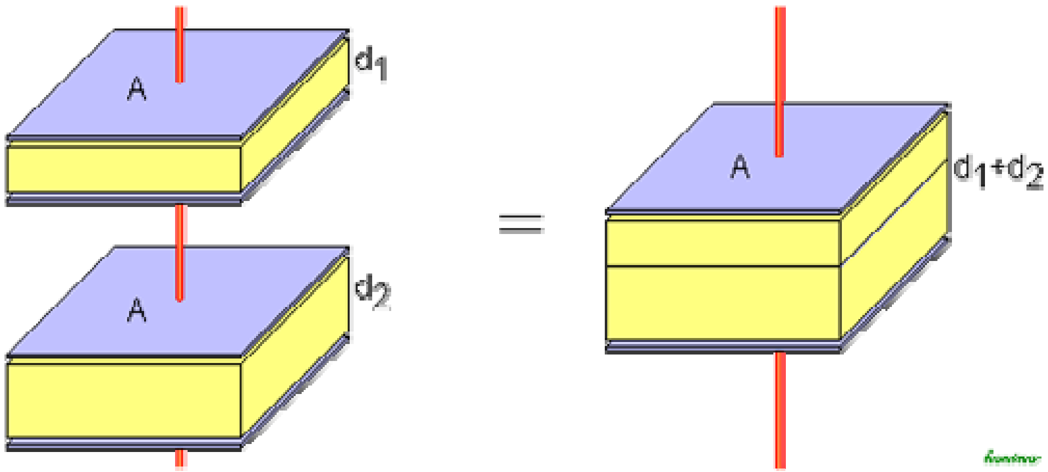
Parallelschaltung



$$C_{ges} = \sum_{n=1}^{N} C_n$$

Bilder: Wikipedia.de

Reihenschaltung



$$C_{ges} = \frac{1}{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{C_n}}$$

Kondensatoren

- Keramikkondensatoren
  - ⇨ Keramik als Dielektrikum
  - ⇨ Einige pF bis nF
  - ⇨ Hohe Durchschlagsfestigkeit
- Wickelkondensatoren/Folienkondensatoren
  - ⇨ Folien (Papier/Plastik) als Dielektrikum
  - ⇨ Durchschschlagfest
  - ⇨ Gewickelt
- Elektrolytkondensator
  - ⇨ Hohe Kapazität
  - ⇨ Oftmals Tantal als Elektrolyt
  - ⇨ Achtung! Nicht verpolungssicher!

2.2 Der elektrische Strom

- **Ist der Ladungstransport in eine Richtung und gleichmäßig, dann sprechen wir von Gleichstrom.**
- **Zusammenhang zwischen Stromstärke, Spannung und Widerstand wird durch das Ohmsche Gesetz und die Kirchhoffschen Gesetz beschrieben.**
- **Elektrischer Strom ist der Fluss von Elektronen**
- **Die Stromstärke I entspricht der bewegten Ladungsmenge pro Zeiteinheit**

$$I = \frac{Q}{t}$$

- **Fließen durch einen Leiter pro Sekunde *n* Coulomb [C], so messen wir einen Strom von *n* Ampere [A]**

$$1\,\mathrm{A} = 1\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}} = \frac{1}{1{,}602} \cdot 10^{19}\,\frac{\text{Elektronen}}{\mathrm{s}}$$

Strom in Abhängigkeit von der Zeit

- **Strom in Abhängigkeit von der Zeit (Ladevorgänge)**

$$i(t) = \frac{dQ}{dt}$$

daraus folgt:

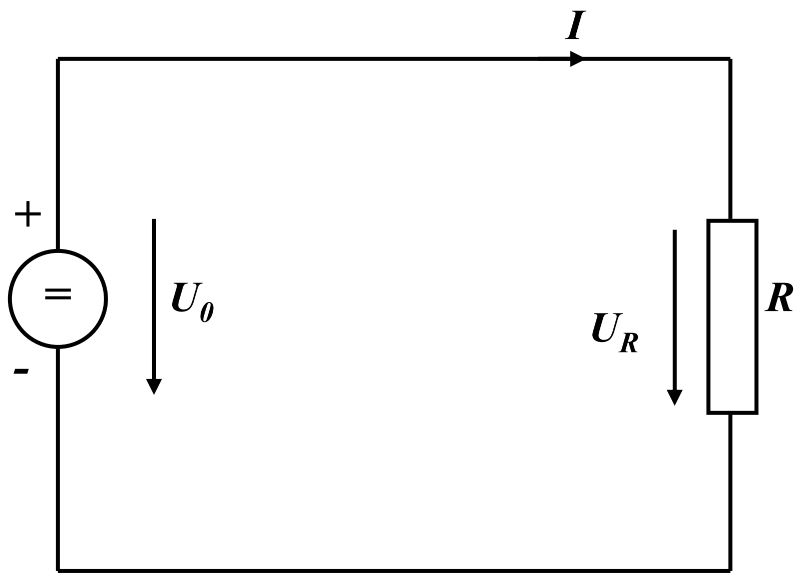
$$dQ = i(t) \cdot dt$$

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} i(t)dt$$

$$1C = 1As$$

Elektrischer Stromkreis

- Ein elektrischer Stromkreis ist eine Anordnung aus
  - Spannungsquelle (Stromquelle)
  - Verbraucher *R*
  - Verbindungsleitungen
- In der Spannungsquelle wird Energie aufgewendet
  - (W< 0)
- In R wird Energie verbraucht
  - (W> 0)
- Der elektrische Strom fließt (per Definition) von Plus (+) nach Minus (-)
- Die Elektronen fließen von Minus (-) nach Plus (+)
- Die Spannungsquelle bewirkt im Verbraucher R einen Stromfluss von von Plus nach Minus (Pfeilrichtung)

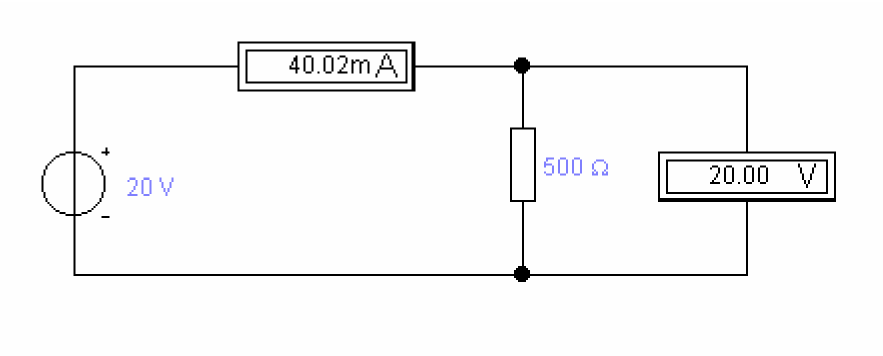


Leitwert und Widerstand

- **Zahlenmäßiger Zusammenhang zwischen Spannung und Strom an einem Verbraucher**
  - ⇨ **Der gemessene Strom *I* ist proportional zur Spannung *U***

$$I \sim U$$

$$I = G \cdot U$$



- **Der Proportionalitätsfaktor *G* wird Leitwert genannt**
- **Die Einheit von *G* ist *Siemens***

$$1\mathrm{S} = 1\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}}$$

- **in der Praxis verwendet man den Kehrwert von *G*, den Widerstand *R***

$$R = \frac{1}{G}$$

2.3 Ohmsches Gesetz

- **Es gibt einen festen Zusammenhang zwischen dem Strom *I* und der Spannung *U***
  - **ohmsches Gesetz**

$$I = \frac{1}{R} \cdot U$$

$$U = R \cdot I$$

$$R = \frac{U}{I}$$

- **Die Einheit für den Widerstand ist Ohm Ω**

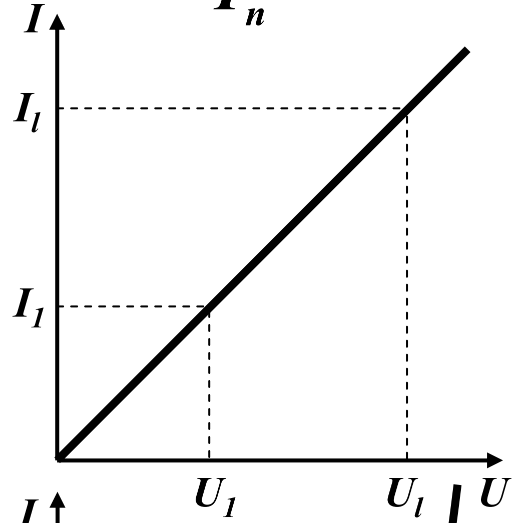
$$1\Omega = 1\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}$$

Kennlinien

- Der Zusammenhang zwischen dem Strom *I* und der Spannung *U* kann in einer Kennlinien dargestellt werden
  - ⇨ X-Achse: Spannung *U*
  - ⇨ Y-Achse: Strom *I*
- Ist der Proportionalitätsfaktor *G* bzw. *R* konstant, so spricht man von einem *linearen* Widerstand
- Beispiel: metallische Leiter sind lineare Widerstände; er ist
  - ⇨ proportional zur Länge *l*
  - ⇨ umgekehrt proportional zur Fläche *A*
  - ⇨ abhängig vom Material

$$R = \rho \frac{l}{A} \qquad [\rho] = \Omega \frac{\mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$$

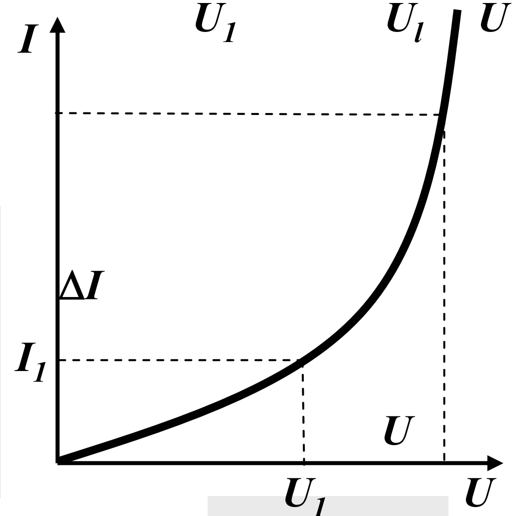
$$\frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2}{I_2} = \ldots\ldots = \frac{U_n}{I_n} = const$$



$$\frac{U_1}{I_1} = R_1$$

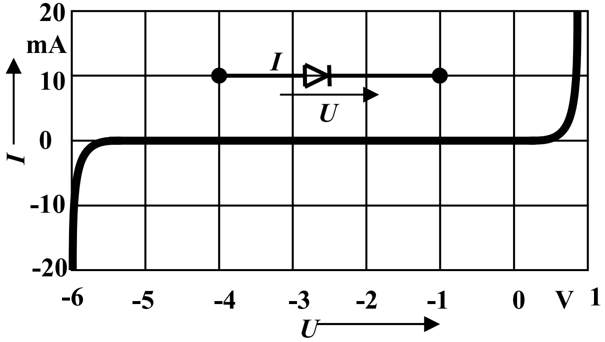
$$\frac{\Delta U}{\Delta I} = r$$

Differentieller Widerstand

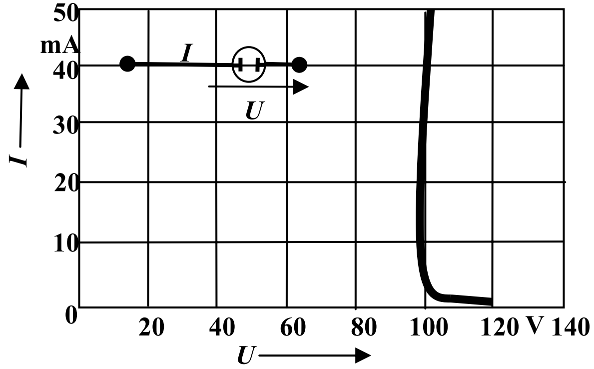


Kennlinien verschiedener Bauelemente

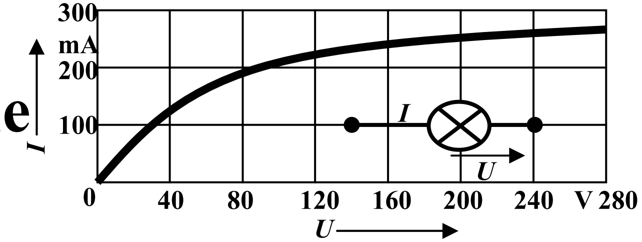
Diode



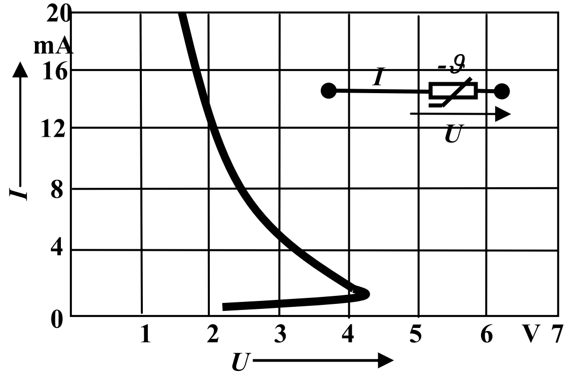
Glimm-lampe



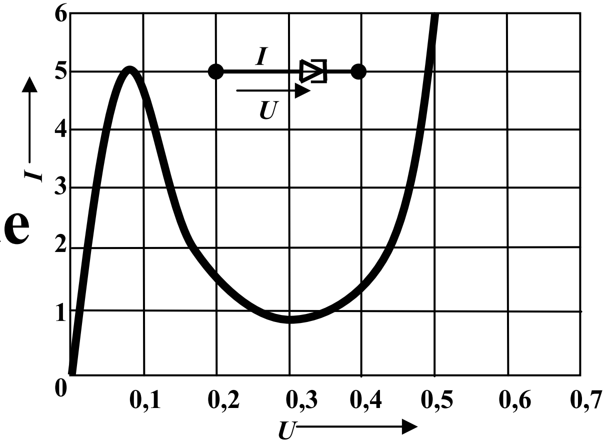
Glühbirne



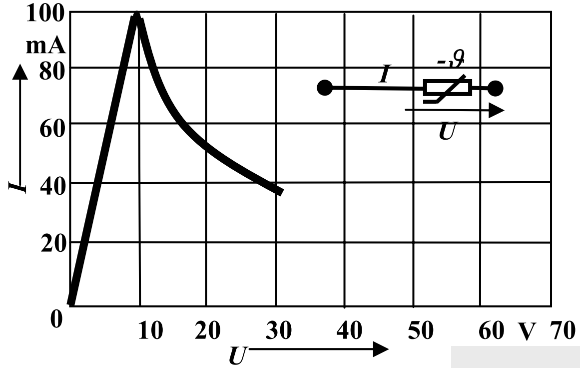
Heiß-leiter



Tunneldiode



Kalt-leiter



Arbeit und Leistung des elektrischen Stroms

- **Elektrische Arbeit: Ladung Q von Potential φ_1 nach φ_2**

$$W = Q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = Q \cdot U$$

  - ⇨ **Ladung Q wird in der t transportiert: es fließt Strom!**

$$Q = I \cdot t \quad \Rightarrow \quad W = I \cdot t \cdot U$$

- **Einheit der elektrischen Arbeit: Joule J oder Wattsekunde Ws**

$$1J = 1Ws = 1AVs$$

  - ⇨ **es gilt natürlich auch:**

$$1J = 1Ws = 1\frac{Nm}{C} \cdot \frac{C}{s} \cdot s = 1Nm$$

Arbeit und Leistung des elektrischen Stroms

- **An einem Widerstand freigesetzte Energie**

$$W = I \cdot t \cdot U = I^2 \cdot R \cdot t = \frac{U^2}{R} \cdot t$$

- **Die elektrische Leistung *P* entspricht der (elektrischen) Arbeit pro Zeiteinheit**

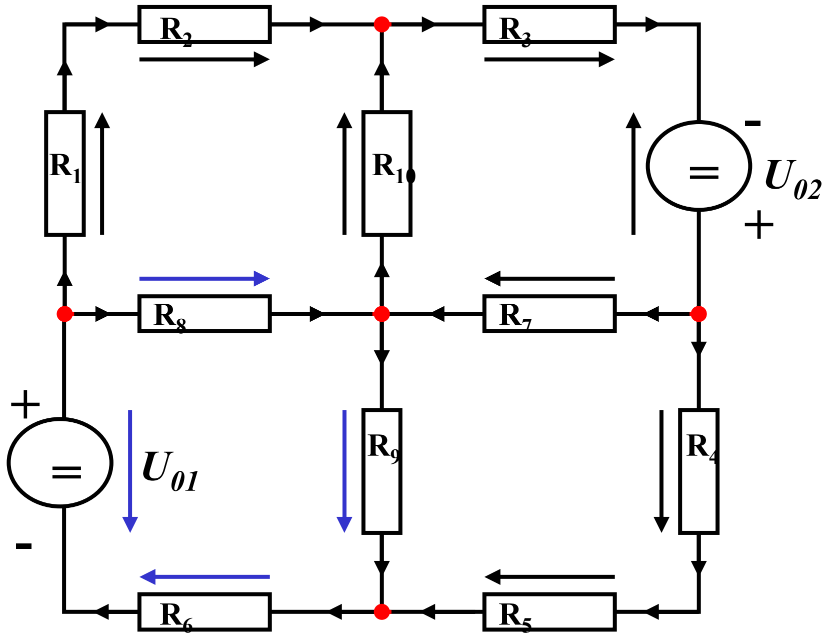
$$P = \frac{W}{t} = U \cdot I = I^2 R = \frac{U^2}{R}$$

- **Die Einheit der elektrischen Leistung ist Watt (W)**

$$1\mathrm{W} = 1\mathrm{VA}$$

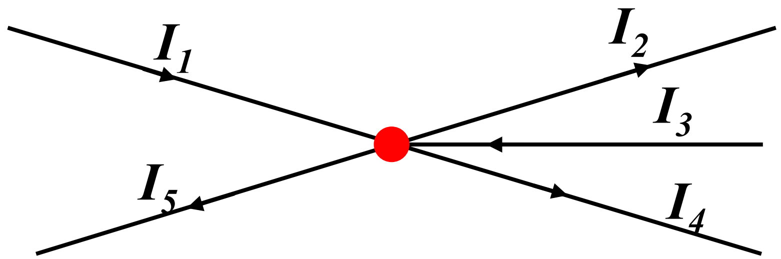
2.4 Die kirchhoffschen Sätze

- **Nur selten wird an einer Spannungsquelle nur ein einzelner Verbraucher *R* angeschlossen**
- **Eine Anordnung aus Spannungsquellen und Verbrauchern heißt Netz**
- **Es besteht aus Knoten und Maschen**
  - **Knoten: Verzweigungspunkte**
  - **Masche: Pfad, bei dem kein Knoten mehrfach durchlaufen wird**
- **Richtung der Pfeile (Vorzeichen)**
  - **Spannung ist von Plus nach Minus gerichtet**
  - **Strom fließt von Plus nach Minus**



Knotenregel (1. kirchhoffscher Satz)

- **In einem Knoten ist die Summe aller Ströme Null**
  - ⇨ **An keiner Stelle des Netzes werden Ladungen angehäuft**



- **Definition der Stromrichtung für die mathematische Formulierung**
  - ⇨ **zufließende Ströme werden mit einem positiven Vorzeichen behaftet**
  - ⇨ **abfließende Ströme werden mit einem negativen Vorzeichen behaftet**

$$0 = I_1 - I_2 + I_3 - I_4 - I_5$$

oder

$$I_2 + I_4 + I_5 = I_1 + I_3$$

allgemein

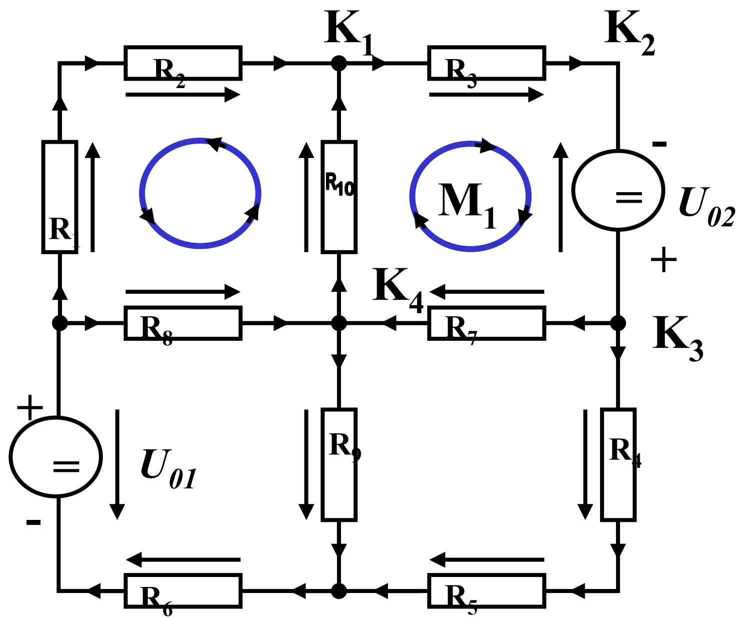
$$\sum_{i=0}^{n} I_i = 0$$

Maschenregel (2. kirchhoffscher Satz)

- **Bei einem geschlossenen Umlauf einer Masche ist die Summe aller Spannungen Null**
  - **die Spannungsquellen erzeugen die Spannungen U_{01} und U_{02}**
  - **durch die Widerstände fließt ein Strom**
  - **nach dem Ohmschen Gesetz gilt für die Spannung**

$$U = R \cdot I$$

  - **die Knotenpunkte K_1, K_2, K_3 und K_4 können deshalb unterschiedliches Potenzial besitzen**

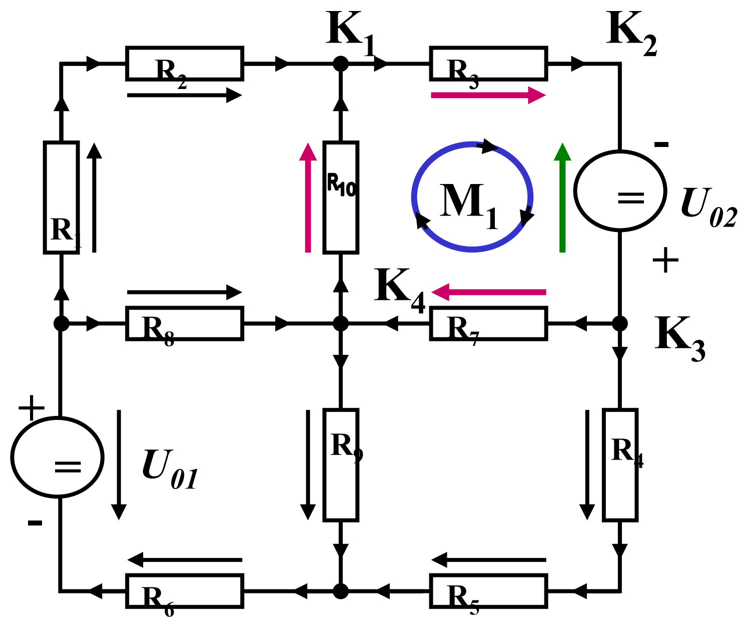


Maschenregel (2. kirchhoffscher Satz)

- **Werden die Knotenspannungen addiert, so folgt:**

$$U_{K_{12}} + U_{K_{23}} + U_{K_{34}} + U_{K_{14}} = 0$$

- **Vorzeichen der Spannung**
  - **die Spannungsrichtung der Quellen ist vorgegeben (von + nach -)**
  - **Umlaufrichtung der Masche wird festgelegt**
  - **Spannungspfeile mit der Umlaufrichtung werden positiv gezählt**
  - **Spannungspfeile gegen die Umlaufrichtung werden negativ gezählt**



$$U_{K_{12}} - U_{02} + U_{K_{34}} + U_{K_{14}} = 0$$

$$U_{K_{12}} + U_{K_{34}} + U_{K_{14}} = U_{02}$$

M.Bogdan

Anwendung 1: Knotenregel

Sie haben einen neuen Personal Computer gekauft.

Sie benutzen ein Strommeßgerät (Ampere-Meter) und stellen damit fest, dass die 5 Volt Stromversorgung Ihres PC im eingeschalteten Zustand 4,0 A liefert. Versorgt wird damit die Hauptplatine, das Festplattenlaufwerk und das DVD-Laufwerk.

Sie messen, dass der Strom in die Hauptplatine 2,2 A beträgt und der Strom in die Festplatte 1,0 A.

An das DVD-Laufwerk kommen sie nicht heran.

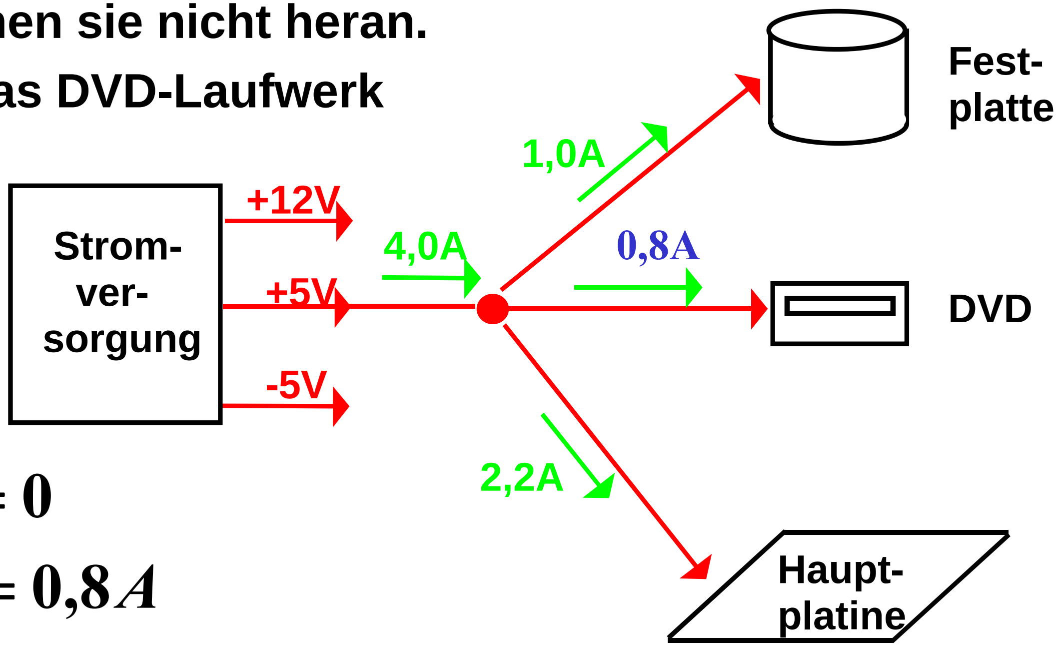
➔ **Wieviel Strom bekommt das DVD-Laufwerk bei der Spannung 5 V?**

$$\sum_{n=1}^{4} I_n = 0$$

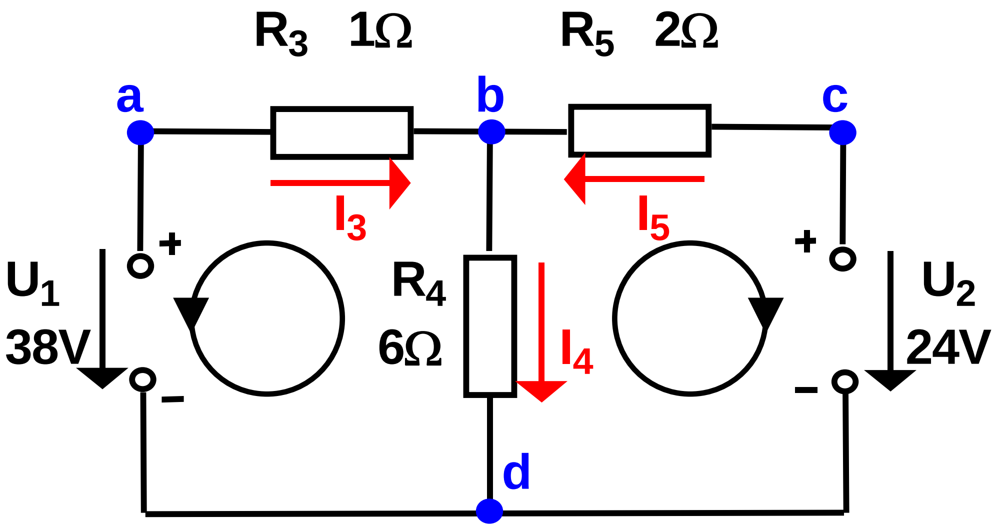
$$I_{ein} - I_{Fest} - I_{HP} - I_{DVD} = 0$$

$$4{,}0A - 1{,}0A - 2{,}2A - I_{DVD} = 0$$

$$4{,}0A - 1{,}0A - 2{,}2A = I_{DVD} = 0{,}8A$$



Anwendung 2: Knoten- und Maschenregel



- Gesucht sind I_3, I_4 und I_5
- Knotenregel:

$$\sum I_b = +I_3 - I_4 + I_5 = 0$$

- Maschenregel:

$$\sum U_{abd} = U_1 - I_3 R_3 - I_4 R_4 = 0$$
$$\sum U_{cbd} = U_2 - I_5 R_5 - I_4 R_4 = 0$$

$$I_3 - I_4 + I_5 = 0\,\mathrm{A}$$
$$1\Omega \cdot I_3 + 6\Omega \cdot I_4 = 38\mathrm{V}$$
$$2\Omega \cdot I_5 + 6\Omega \cdot I_4 = 24\mathrm{V}$$

Substitutionsmethode

$$I_3 + I_5 = I_4$$

$$1\Omega \cdot I_3 + 6\Omega \cdot \left(I_3 + I_5\right) = 38\text{V}$$

$$2\Omega \cdot I_5 + 6\Omega \cdot \left(I_3 + I_5\right) = 24\text{V}$$

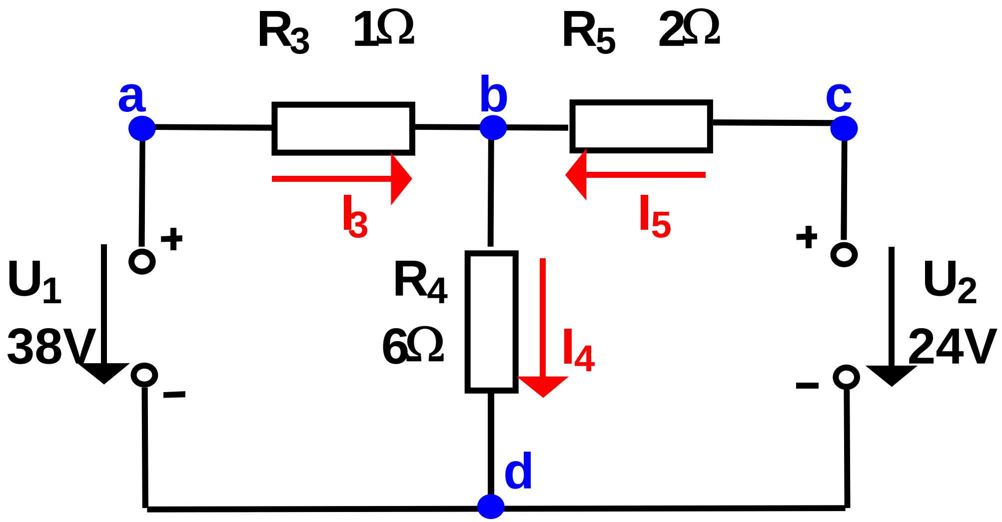
$$\Downarrow$$

$$\left(1+6\right)\Omega \cdot I_3 + 6\Omega \cdot I_5 = 38\text{V}$$

$$6\Omega \cdot I_3 + \left(6+2\right)\Omega \cdot I_5 = 24\text{V}$$

$$\Downarrow$$

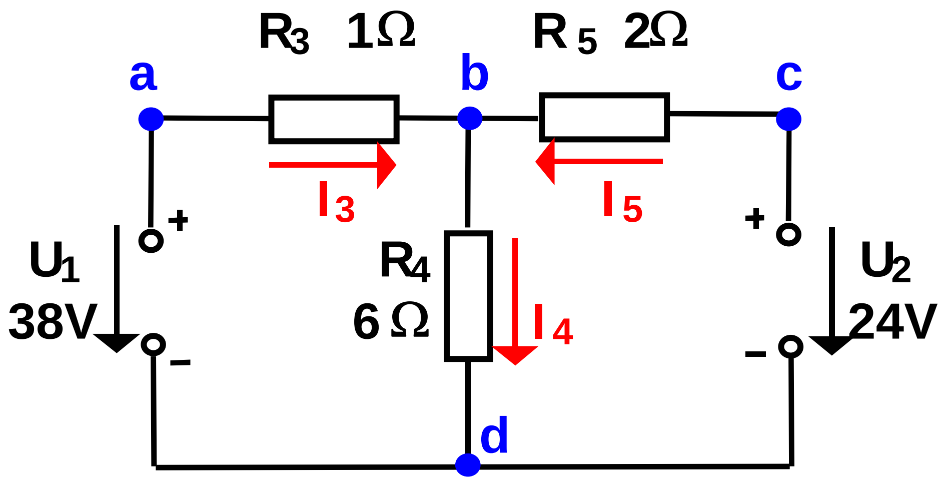
$$I_3 = \frac{38V - 6\Omega \cdot I_5}{7\Omega}$$



M.Bogdan

Substitutionsmethode

$$I_3 = \frac{38V - 6\Omega \cdot I_5}{7\Omega}$$



$$6\Omega \cdot \frac{38V - 6\Omega \cdot I_5}{7\Omega} + 8\Omega \cdot I_5 = 24V$$

$$6 \cdot 38V - 36\Omega \cdot I_5 + 56\Omega \cdot I_5 = 168V$$

$$228V - 168V = -20\Omega \cdot I_5$$

$$-\frac{60V}{20\Omega} = -3A = I_5$$

$$I_4 = 8\mathrm{A} - 3\mathrm{A} = 5\mathrm{A}$$

Negatives Vorzeichen, da falsche Annahme der Stromrichtung

$$I_3 = \frac{38 - (6 \cdot -3)}{7}\mathrm{A} = \frac{38 + 18}{7}\mathrm{A} = \frac{56}{7}\mathrm{A} = 8\mathrm{A}$$

Lösung über Determinaten

System von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}X_1 & + & a_{12}X_2 & + & a_{13}X_3 & + & \cdots & a_{1n}X_n & = & b_1 \\
a_{21}X_1 & + & a_{22}X_2 & + & a_{23}X_3 & + & \cdots & a_{2n}X_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & & \vdots \\
a_{n1}X_1 & + & a_{n2}X_2 & + & a_{n3}X_3 & + & \cdots & a_{nn}X_n & = & b_n
\end{array}
$$

mit der Determinate D der Koeffizienten des Gleichungssystems

$$
D = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

Berechnung von Determinaten

- Determinante 2. Ordnung

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- Determinate 3. Ordnung

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Berechnung von Determinaten

- Determinate 4. Ordnung

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{41} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

Cramersche Regel

- Cramersche Regel (1750)
  - ⇨ Gabriel Cramer (1704-1752)

- Lineares Gleichungssystem mit einer n x n Matrix A

$$A\,x = b \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{21} & \cdots & \mathbf{A}_{n1} \\ \mathbf{A}_{12} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ \mathbf{A}_{1n} & \cdots & & \mathbf{A}_{nn} \end{pmatrix}$$

  - ⇨ Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ A_{1n} & \cdots & & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Cramersche Regel

Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ A_{1n} & \cdots & & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

$$x_i = \frac{1}{\det A}(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_n)$$

$$= \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{D_i}{D}$$

i-te Spalte

Cramersche Regel

- **Beispiel**

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= -2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 13$$

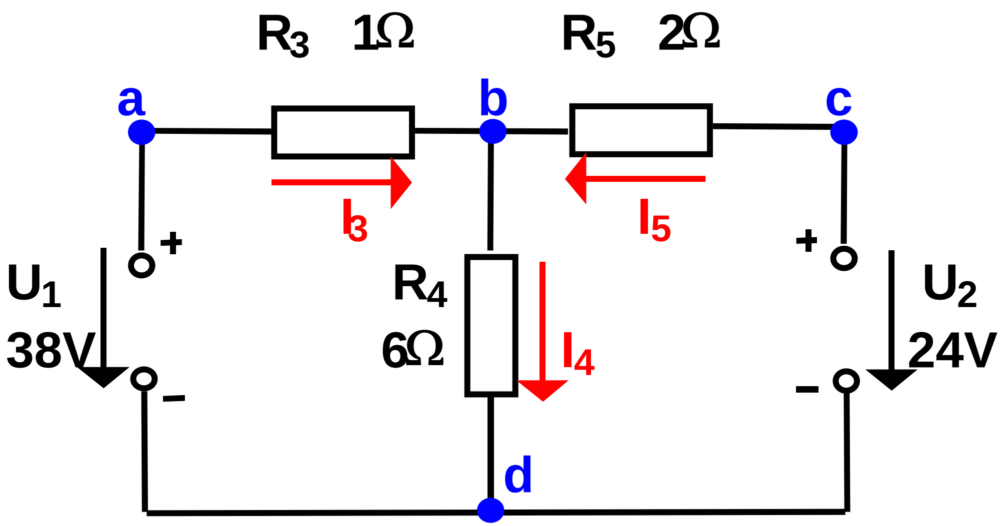
$$D_1 = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -13 \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 26 \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 39$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-13}{13} = -1 \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{26}{13} = 2 \qquad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{39}{13} = 3$$

Für das Beispiel

- Gleichungssystem

$$I_3 - I_4 + I_5 = 0\text{A}$$
$$1\Omega \cdot I_3 + 6\Omega \cdot I_4 = 38\text{V}$$
$$6\Omega \cdot I_4 + 2\Omega \cdot I_5 = 24\text{V}$$



- Determinate D

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1\Omega & 6\Omega & 0\Omega \\ 0\Omega & 6\Omega & 2\Omega \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 6\Omega \cdot 2\Omega + (-1) \cdot 0\Omega \cdot 0\Omega + 1 \cdot 1\Omega \cdot 6\Omega$$
$$-1 \cdot 6\Omega \cdot 0\Omega - (-1) \cdot 1\Omega \cdot 2\Omega - 1 \cdot 0\Omega \cdot 6\Omega$$
$$= 12\Omega^2 + 6\Omega^2 + 2\Omega^2 = 20\Omega^2$$

Für das Beispiel

- Berechnung Strom I_5

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0\,\mathrm{A} \\ 1\Omega & 6\Omega & 38\mathrm{V} \\ 0\Omega & 6\Omega & 24\mathrm{V} \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 6\Omega \cdot 24\mathrm{V} + (-1) \cdot 38\mathrm{V} \cdot 0\Omega + 0\,A \cdot 1\Omega \cdot 6\Omega$$

$$- 0\mathrm{A} \cdot 6\Omega \cdot 0\Omega - (-1) \cdot 1\Omega \cdot 24\mathrm{V} - 1 \cdot 38\mathrm{V} \cdot 6\Omega$$

$$= 6 \cdot 24\Omega\mathrm{V} + 24\Omega\mathrm{V} - 38 \cdot 6\Omega\mathrm{V}$$

$$= 144\Omega\mathrm{V} + 24\Omega\mathrm{V} - 228\Omega\mathrm{V} = -60\Omega\mathrm{V}$$

$$I_5 = \frac{D_5}{D} = \frac{-60\Omega\mathrm{V}}{20\Omega^2} = -3\frac{\mathrm{V}}{\Omega} = -3\,\mathrm{A}$$

Für das Beispiel

- **Berechnung Strom I_3, I_4**

$$D_3 = \begin{vmatrix} 0A & -1 & 1 \\ 38V & 6\Omega & 0\Omega \\ 24V & 6\Omega & 2\Omega \end{vmatrix}$$

$$= 228\Omega\mathrm{V} - 114\Omega\mathrm{V} + 76\Omega\mathrm{V}$$

$$= 160\Omega\mathrm{V}$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0A & 1 \\ 1\Omega & 38V & 0\Omega \\ 0\Omega & 24V & 2\Omega \end{vmatrix}$$

$$= 76\Omega V + 24\Omega V$$

$$= 100\Omega\mathrm{V}$$

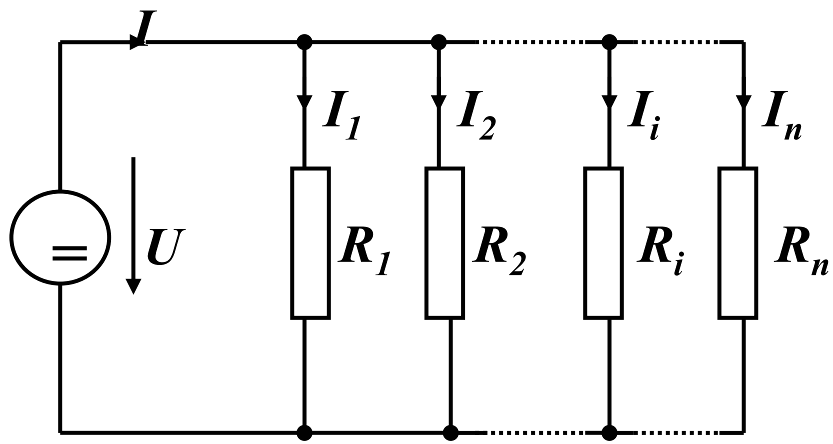
$$I_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{160\Omega\mathrm{V}}{20\Omega^2} = 8\frac{\mathrm{V}}{\Omega} = 8\mathrm{A}$$

$$I_4 = \frac{D_4}{D} = \frac{100\Omega\mathrm{V}}{20\Omega^2} = 5\frac{\mathrm{V}}{\Omega} = 5\mathrm{A}$$

Parallelschaltung von Widerständen

- Für die Teilströme $I_1, I_2, \ldots, I_n$ gilt:

$$I_1 = \frac{U}{R_1}, I_2 = \frac{U}{R_2}, \ldots, I_n = \frac{U}{R_n}$$



- Nach Knotenregel:

$$I_{ges} = I_1 + I_2 + \ldots + I_n$$

$$= \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \ldots + \frac{U}{R_n}$$

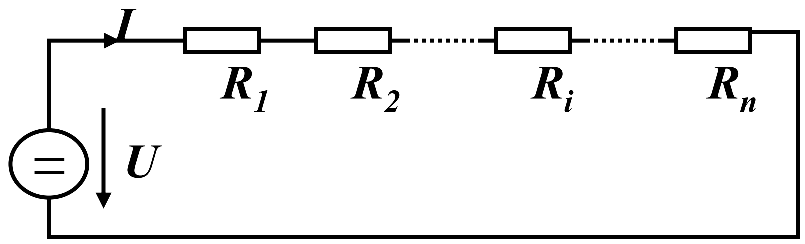
$$= U \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n} \right)$$

- Der Ersatzwiderstand der gesamten Schaltung berechnet sich durch:

$$\frac{1}{R_{gesamt}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}$$

Reihenschaltung von Widerständen

- Für die Spannungen U_1, U_2,...,U_n an den Widerständen gilt:



$$U_1 = I \cdot R_1, U_2 = I \cdot R_2, ..., U_n = I \cdot R_n$$

- Nach Maschenregel:

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 + ... + U_n \\ &= I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + ... + I \cdot R_n \\ &= I \cdot \left(R_1 + R_2 + ... + R_n\right) \end{aligned}$$

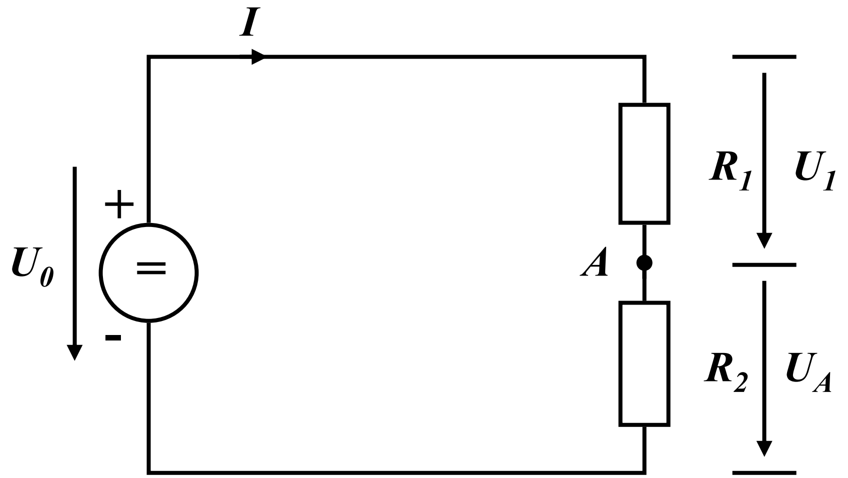
- Der Ersatzwiderstand der gesamten Schaltung berechnet sich durch:

$$R_{gesamt} = R_1 + R_2 + ... + R_n = \sum_{k=1}^{n} R_k$$

Spannungsteiler

- Reihenschaltung von zwei Widerständen
- Für das Verhältnis der Spannungen U_1 und U_2 gilt:

$$I = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_A}{R_2} \Rightarrow \frac{U_1}{U_A} = \frac{R_1}{R_2}$$



- Ist U_0, R_1 und R_2 gegeben, so folgt für U_A:

$$\frac{U_1}{U_A} = \frac{R_1}{R_2},\; U_1 = U_0 - U_A$$

$$\Rightarrow \frac{U_0 - U_A}{U_A} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$\Rightarrow \frac{U_0}{U_A} - \frac{U_A}{U_A} = \frac{R_1}{R_2} \qquad \Rightarrow U_A = \frac{U_0}{\frac{R_1}{R_2} + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{U_0}{U_A} = \frac{R_1}{R_2} + 1$$

M.Bogdan

Unbelastete Potentiometerschaltung

- Bei einem Potentiometer gilt zusätzlich:

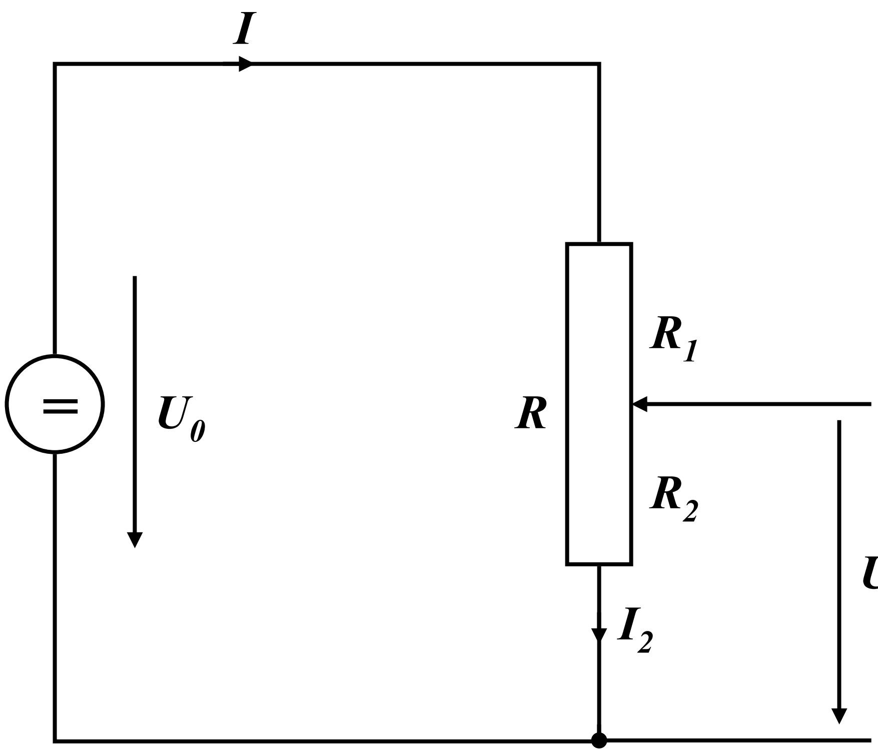
$$R_1 = R - R_2$$

- Damit folgt:

$$U_A = \frac{U_0}{\frac{R_1}{R_2} + 1}$$

$$= \frac{U_0}{\frac{R - R_2}{R_2} + 1}$$

$$= \frac{U_0}{\frac{R - R_2}{R_2} + \frac{R_2}{R_2}} = \frac{U_0}{\frac{R - R_2 + R_2}{R_2}} = U_0 \cdot \frac{R_2}{R}$$

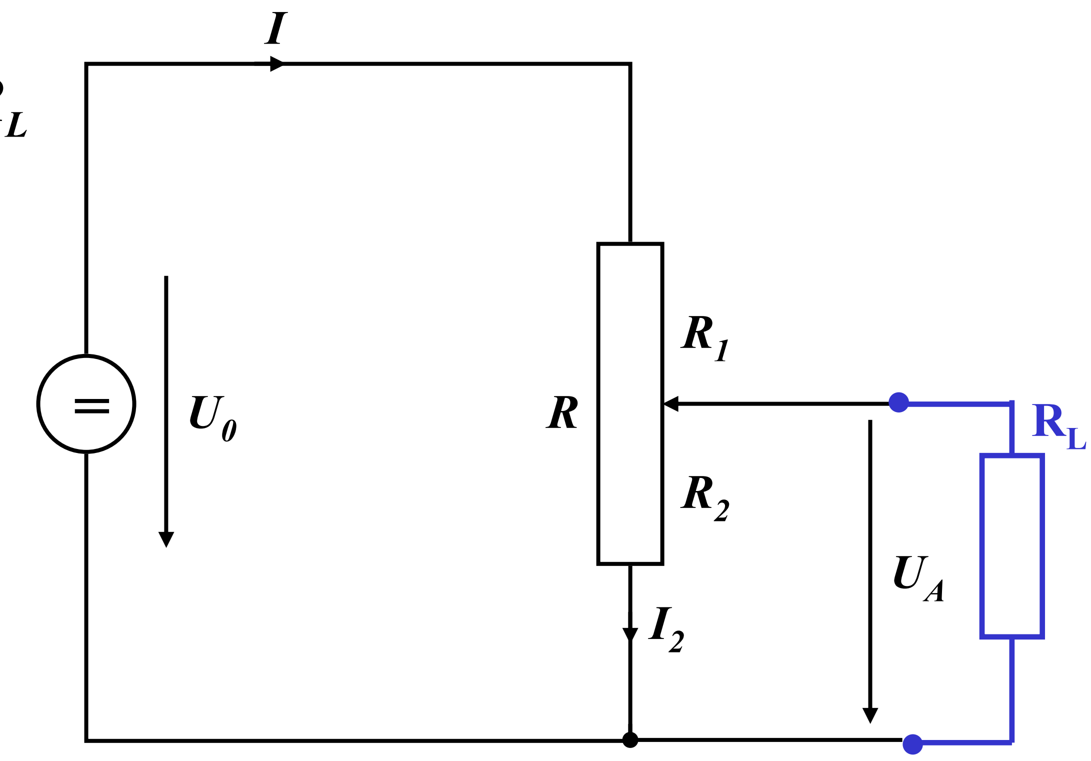


Belastete Potentiometerschaltung

- **Es gilt:**

$$R_1 = R - R_{ges} \qquad \mathrm{R}_{ges} = R_2 \| R_L$$

- **Damit folgt:**



$$U_A = \frac{U_0}{\dfrac{R_1}{R_{ges}} + 1}$$

$$= \frac{U_0}{\dfrac{R - R_{ges}}{R_{ges}} + 1}$$

$$= U_0 \cdot \frac{R_{ges}}{R} = \frac{U_0}{R} \cdot \frac{1}{\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_L}} = \frac{U_0}{R} \cdot \frac{1}{\dfrac{R_L}{R_2 \cdot R_L} + \dfrac{R_2}{R_L \cdot R_2}} = \frac{U_0}{R} \cdot \frac{R_L \cdot R_2}{R_L + R_2}$$

Graphische Bestimmung des Arbeitspunkts

- **Praktische Anwendung bei nichtlinearen Kennlinien**
  - **Dioden, Transistoren**
- **Vorgehen:**

  1. Kennlinie für R2 einzeichnen

  2. Kennlinie für R1 in das selbe Diagramm einzeichnen

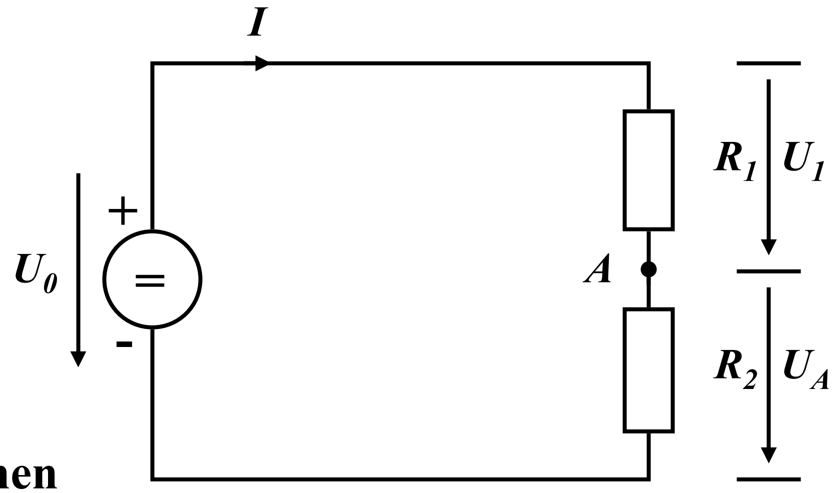
$$I = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_0 - U_A}{R_1}$$

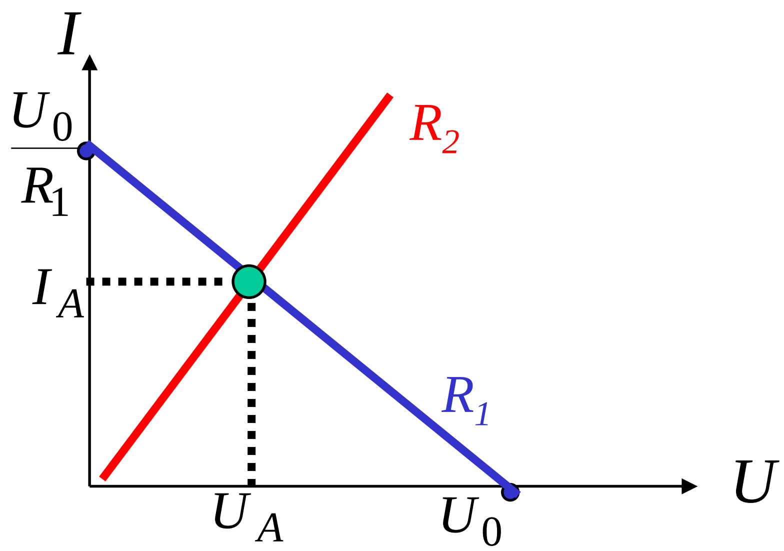
2 Punkte:

$$U_A = 0 \Rightarrow I = \frac{U_0}{R_1}$$

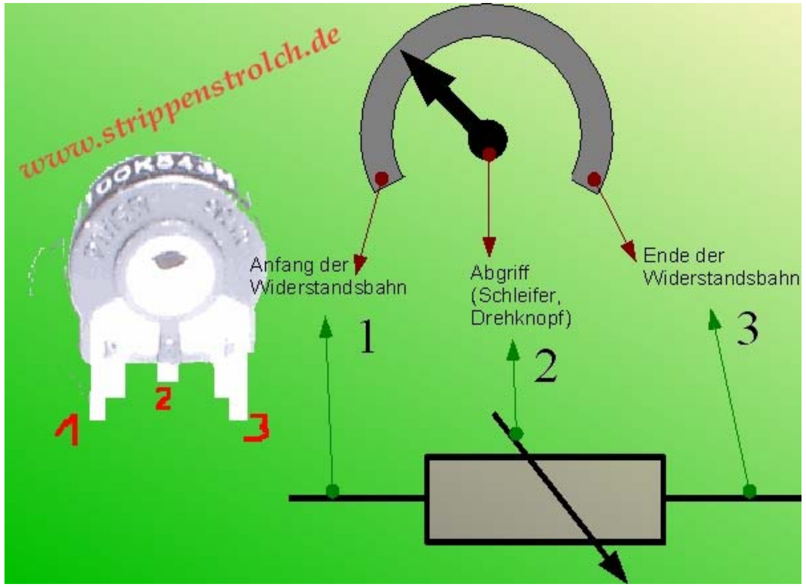
$$U_A = U_0 \Rightarrow I = 0$$

3. Schnittpunkt A ergibt den Arbeitspunkt mit Spannung U_A und Strom I_A





Potentiometer



www.strippenstrolch.de

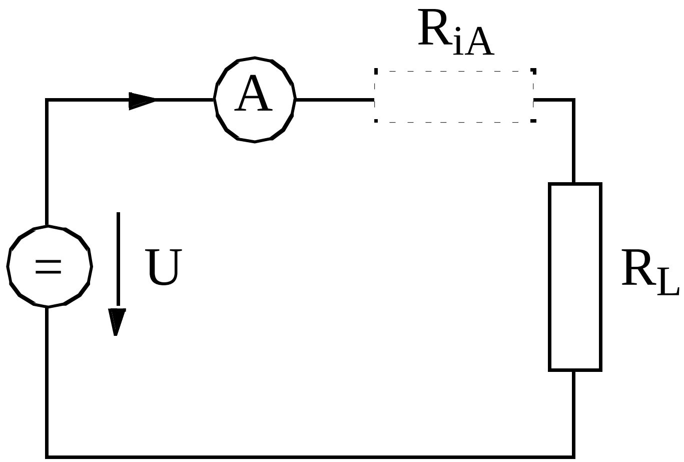
Maerlcom AG

Strom messen

- Amperemeter als Reihensschaltung in Stromkreis einfügen
  - ⇨ Amperemeter besitzt Innenwiderstand!
    - Es wird zu geringer Strom angezeigt!

$$U = R_{ges} \cdot I = \left(R_{iA} + R_L\right) \cdot I$$

$$I = \frac{U}{R_{iA} + R_L}$$

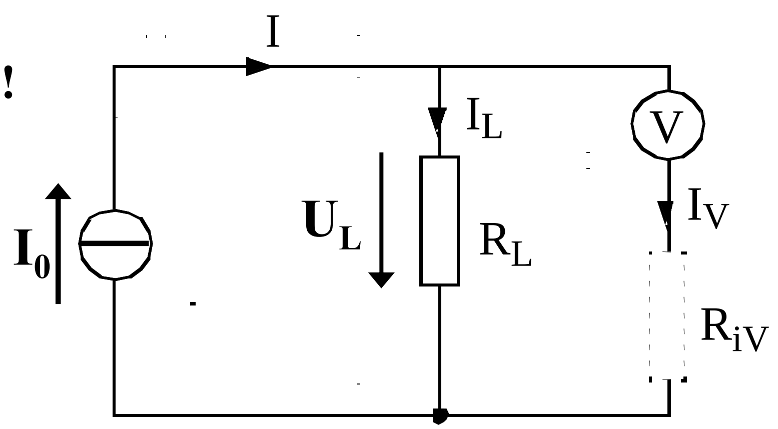


Forderung: R_{iA} muß möglichst gering sein!

Es gilt dann: $I = \frac{U}{R_L}$ **für** $R_{iA} << R_L$

Spannung messen

- Voltmeter als Parallelschaltung in Stromkreis einfügen
  - ⇨ Voltmeter besitzt Innenwiderstand!
    - Strom teilt sich auf!
    - Gemessene Spannung zu niedrig!



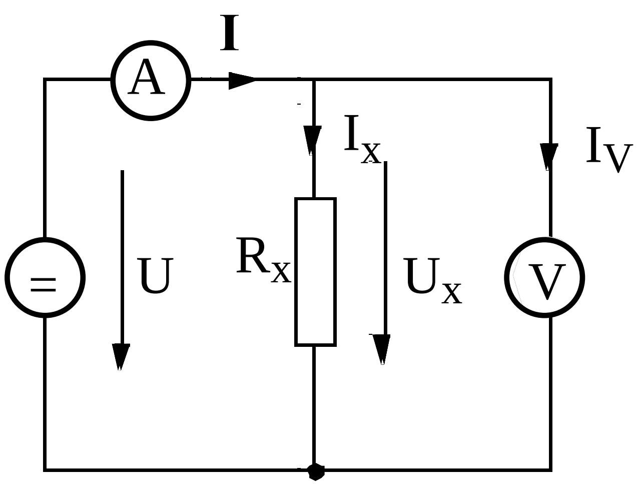
$$U_L = I_L \cdot R_L = (I - I_V) \cdot R_L$$

Forderung: R_{iv} muß möglichst groß sein!

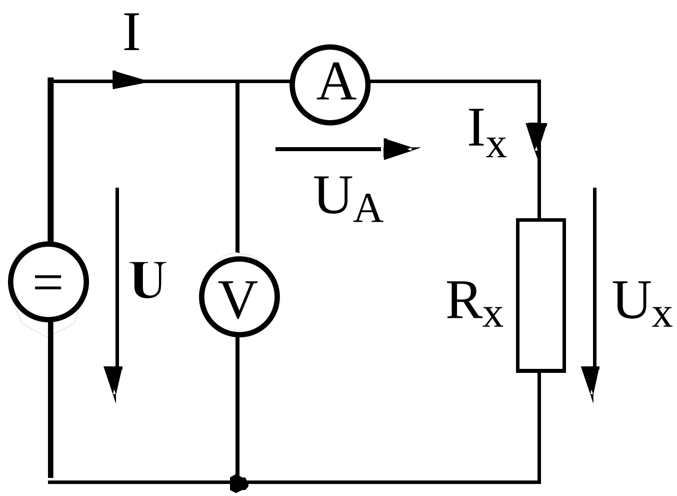
Es gilt dann: $$U_L = I \cdot R_L \quad \text{für} \quad R_{iV} >> R_L$$

Widerstand messen

- Zur Messung des Widerstandes R_x wird benötigt
  - ⇨ Strom I_x
  - ⇨ Spannung U_x



Stromfehlerschaltung

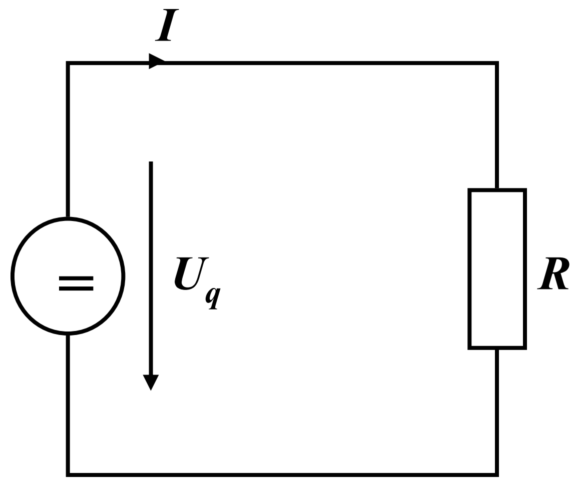


Spannungsfehlerschaltung

Quellen- und Klemmenspannung

- **Ideale Spannungsquelle:**
  - ⇨ **nach dem ohmschen Gesetz**

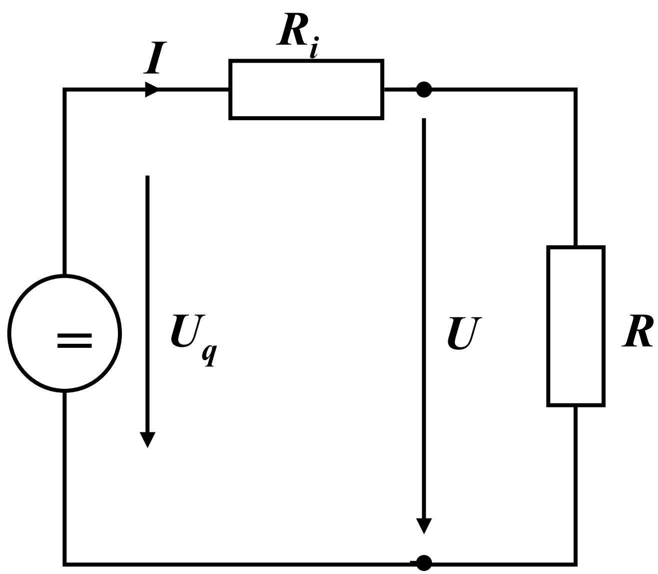
$$\lim_{R \to 0} I = \infty$$



- **Eine reale Spannungsquelle kann durch Hinzufügen eines Innenwiderstands modelliert werden**
  - ⇨ **die abgreifbare Spannung heißt Klemmenspannung**

$$U = U_q - I \cdot R_i$$

$$I = \frac{U_q}{R + R_i}$$



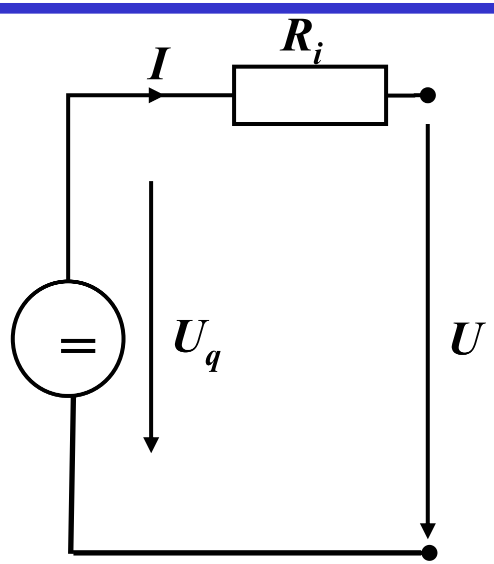
M.Bogdan

Quellen- und Klemmenspannung

- **Leerlauf**
  - ⇨ **Spannungsquelle ohne Last**

$$U = U_q$$

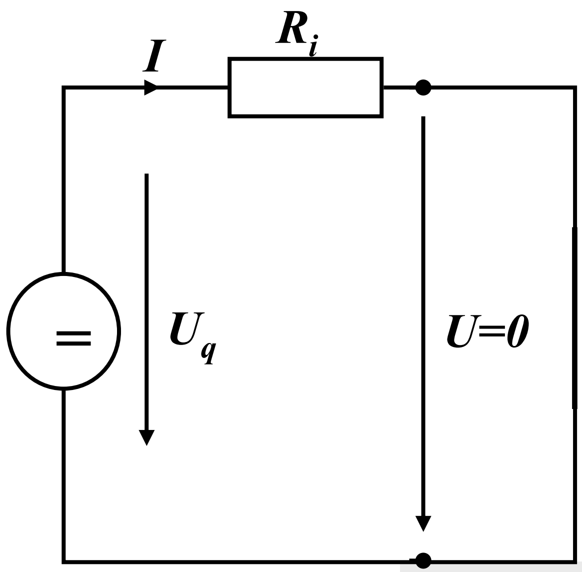
$$I = 0$$



- **Kurzschluss**

$$I = \frac{U_q}{R_i}$$

$$P = U_q \cdot I = \frac{U_q^2}{R_i}$$

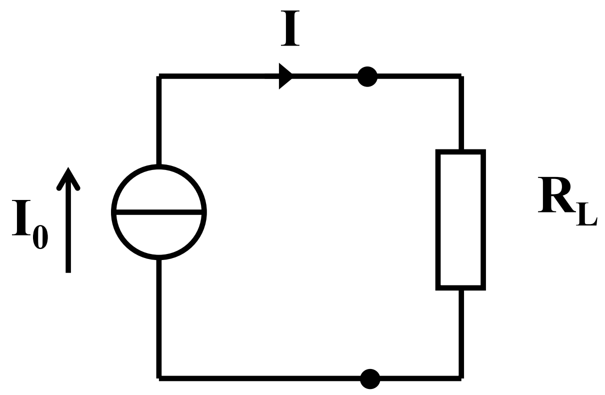


Achtung! „Verbratene“ Leistung kann Spannungsquelle zerstören!

Stromquelle

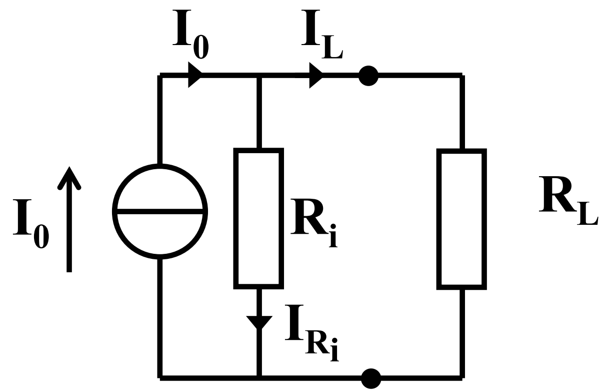
- Ideale Stromquelle

$$I = const \quad \forall \quad R_L$$



- Reale Stromquelle

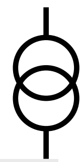
$$I_L = I_0 - I_{R_i}$$



Ziel: Möglichst großen Innenwiderstand

$$\lim_{R \to \infty} I_L = I_0$$

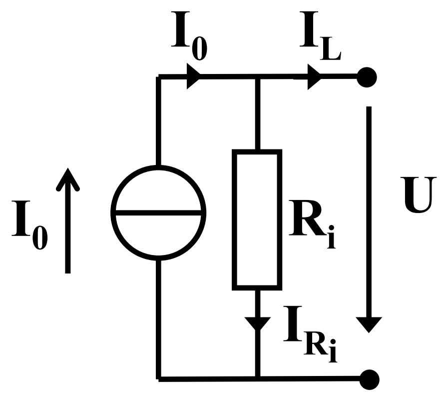
Oft wird die Stromquelle auch nicht nach DIN-Norm gezeichnet:



Stromquelle

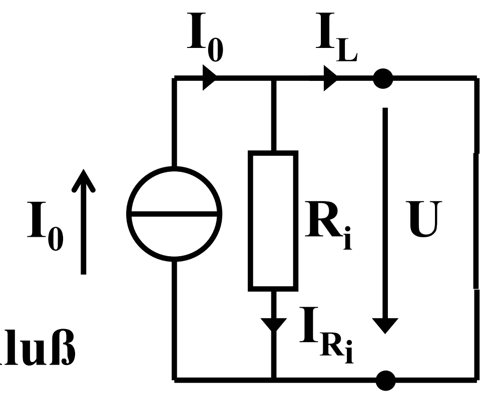
- **Leerlauf**

$$I_L = 0$$
$$U = R_i \cdot I_0$$



- **Kurzschluss**

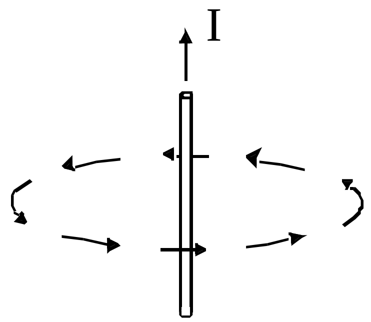
$$I_L = I_0$$
$$U = 0$$



Bemerkung: Auch, wenn eim Kurzschluß der Stromquelle theoretisch nichts anhaben kann, niemals kurzschließen!

Elektromagnetisches Feld

- **Magnetisches Feld elektrischer Ströme**
  - **Oerstedt 1819**
    - **Ein elektrischer Strom verursacht ein Magnetfeld H, das senkrecht zum Strom ist**



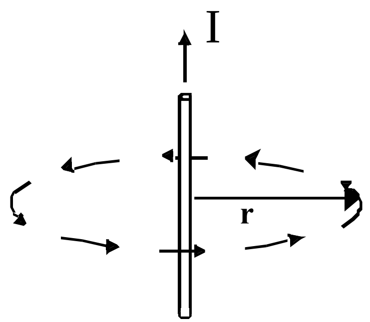
  - **die magnetischen Feldlinien umschließen den stromführenden Leiter ringförmig,**
  - **sie sind konzentrisch um den Leiter angeordnet,**

Rechte-Hand-Regel: Zeigt der Daumen in Richtung des Stromes im Leiter, so zeigen die Finger, die den Leiter umfassen, in Richtung der Feldlinien.

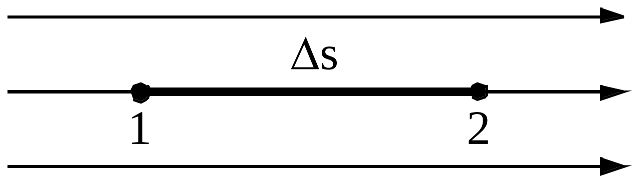
Elektromagnetisches Feld

- **Quantitativ:**
  - **magnetische Feldstärke H eines stromdurchflossenen Leiters ist proportional zur Stromstärke I,**
  - **magnetische Feldstärke ist umgekehrt proportional zum Abstand vom Leiter.**

$$H \sim I \qquad H \sim \frac{1}{r} \qquad H = const \cdot \frac{I}{r}$$



- **Magnetische Durchflutung Θ („Spannung“)**
  - **Analog zur elektrischen Spannung**

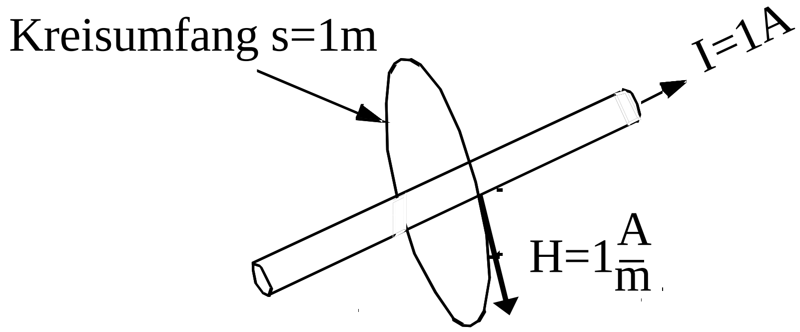


$$\vec{\Theta}_{1,2} = \int_1^2 \vec{H} \cdot ds = \vec{I} \qquad [\Theta] = A$$

Elektromagnetisches Feld

- **Daraus ergibt sich die magnetische Feldstärke H**

$$\vec{H} = \frac{\vec{\Theta}}{s} = \frac{\vec{I}}{s} = \frac{\vec{I}}{2\pi \cdot r} \qquad [H] = \frac{A}{m}$$



Definition nach der SI-Norm: 1 Ampere durch Meter ist gleich der magnetischen Feldstärke, die ein durch einen unendlich langen, geraden Leiter von kreisförmigem Querschnitt fließender elektrischer Strom von 1A im Vakuum außerhalb des Leiters auf dem Rand einer zum Leiterquerschnitt konzentrischen Kreisfläche vom Umfang 1m hervorrufen würde.

Elektromagnetisches Feld

- **Durchflutungsgesetz**
  - ⇨ **Zusammenhang zwischen dem magnetischen Feld und dem verursachenden elektrischen Strom**
    - **Elektrischer Strom verursacht geschlossene magnetische Feldlinien (ein Magnetfeld).**
    - **Geschlossene magnetische Feldlinien werden von einem Strom durchflossen (durchflutet)**
  - ⇨ **Durchflutungsgesetz (1. Maxwellsche Gleichung)**

$$\oint \vec{H} \cdot ds = \int_A \vec{j} \cdot dA$$

Das Linienintegral der magnetischen Feldstärke über eine in sich geschlossene Kurve ist proportional dem Flächenintegral der Stromdichte über die von der Kurve umschlossene Fläche.

Elektromagnetisches Feld

- **Stromdichte $\vec{j}$**
  - ⇨ **Stromdichte $\vec{j}$ ist ein Vektor, der die Richtung des Ladungstransports angibt**
  - ⇨ **Es gilt für einen geraden Leiter, der von Strom durchflossen wird, und einem Kreis senkrecht zum Leiter mit diesem als Mittelpunkt als Integrationsweg:**

$$\oint \vec{H} \cdot ds = \int_A \vec{j} \cdot dA = \vec{I}$$

mit $$ds = r \cdot d\varphi$$

folgt $$\int_0^{2\pi} \vec{H} \cdot r \cdot d\varphi = \vec{I}$$

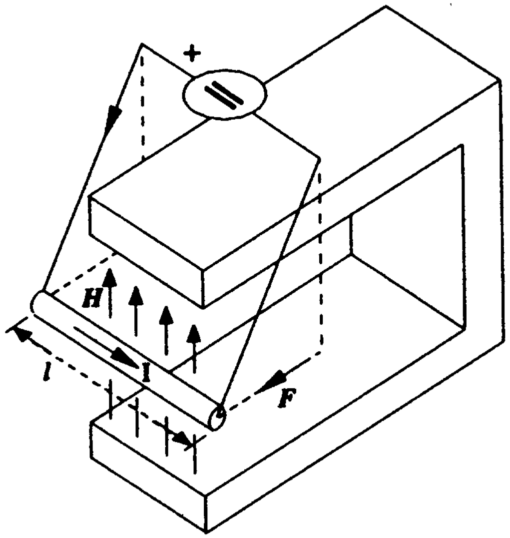
$$\vec{H} \cdot 2\pi \cdot r = \vec{I}$$

$$\left| H \right| = \frac{I}{2\pi \cdot r}$$

Elektromagnetisches Feld

- **Kraftwirkung magnet. Felder auf stromdurchflossene Leiter**
  - ⇨ **Auf einen stromdurchflossenen Leiter in einem Magnetfeld wirkt eine Kraft!**

Strom I fließt durch eine Draht der Länge l in technische Stromrichtung. Durch das Magnetfeld H wirkt auf den stromdurchflossenen Leiter eine Kraft F, die senkrecht auf H und I auf steht.



$$F \sim I \qquad F \sim l \qquad F \sim H$$

Dreifingerregel der rechten Hand: durch das Vektorprodukt des gerichteten Stroms I (Daumen) mit dem Vektor der magnetischen Feldstärke H (Zeigefinger), ergibt sich die Richtung der Kraft F (Mittelfinger). Alle Finger müssen senkrecht zueinander stehen.

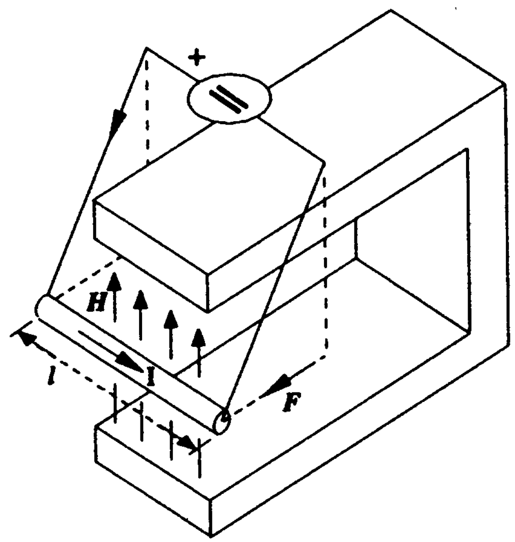
Elektromagnetisches Feld

- **Kraftwirkung magnet. Feld**

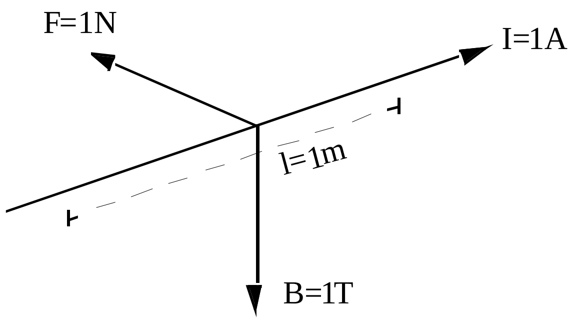
$$\vec{F} = \mu \cdot l \cdot \vec{I} \times \vec{H}$$

$$\left|F\right| = \mu \cdot l \cdot I \cdot H$$

µ ist diePermeabilitätskonstante



- **Magnetische Induktion**
  - ⇨ **Hergeleitet aus der Kraftwirkung**



$$\left[B\right] = T$$

Die magnetische Induktion B beträgt 1 Tesla (T), wenn ein 1m langer Draht, durch den ein Strom von 1A fließt, und der senkrecht zur Feldrichtung steht, eine Kraft von 1 N erfährt

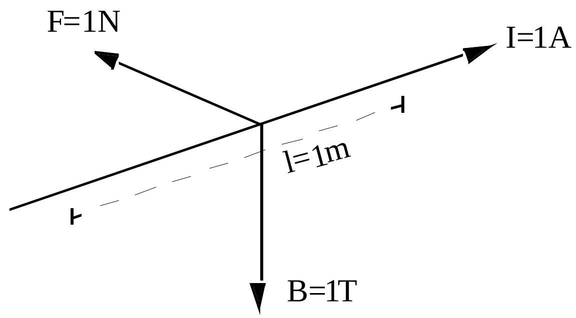
Elektromagnetisches Feld

- **Magnetische Induktion**

$$\vec{F} = l \cdot i \times \vec{B}$$

$$1N = 1A \cdot 1m \cdot 1T$$

$$1T = 1\frac{N}{A \cdot m}$$



oder

$$[B] = \frac{N}{A \cdot m} \cdot \frac{m}{m} = \frac{J}{A \cdot m^2} = \frac{V \cdot A \cdot s}{A \cdot m^2} = \frac{V \cdot s}{m^2}$$

$$1T = 1\frac{V \cdot s}{m^2}$$

- **Magnetische Feldstärke ↔ Magnetische Induktion**

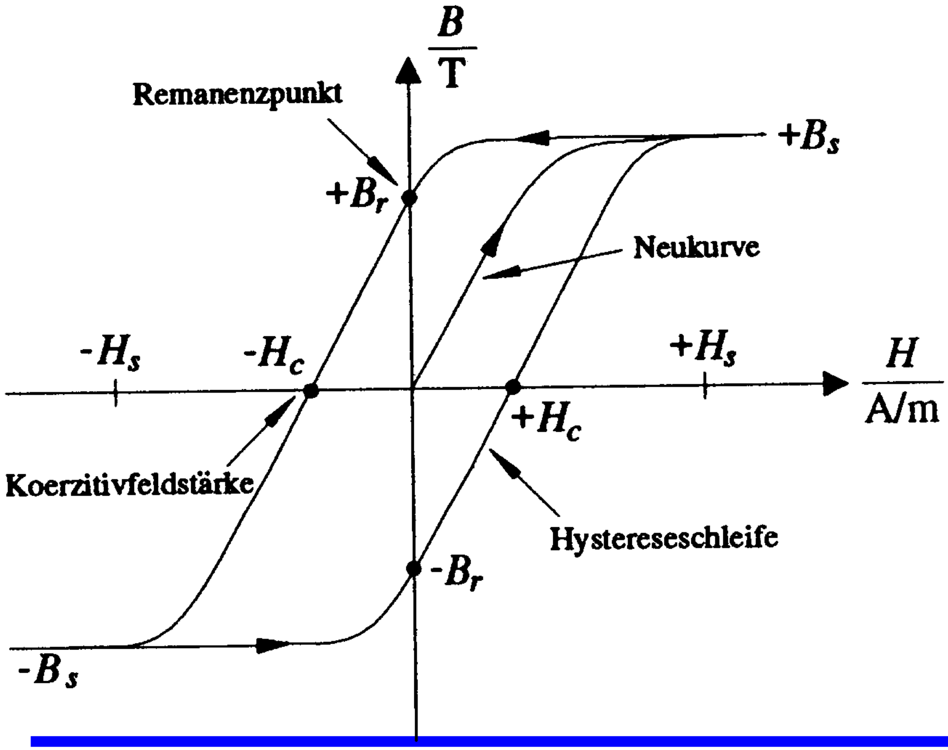
$$B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H \qquad \mu_0 = 1{,}2566 \cdot 10^{-6}\frac{Vs}{Am}$$

Ferromagnetismus

- **Relative Permeabilität μ_r**
  - ⇨ **Ferromagentische Stoffe haben eine Permeabilität von**

$$\mu_r = 10^2 - 10^3$$

  - ⇨ **Sie können magnetische Zustände speichern**

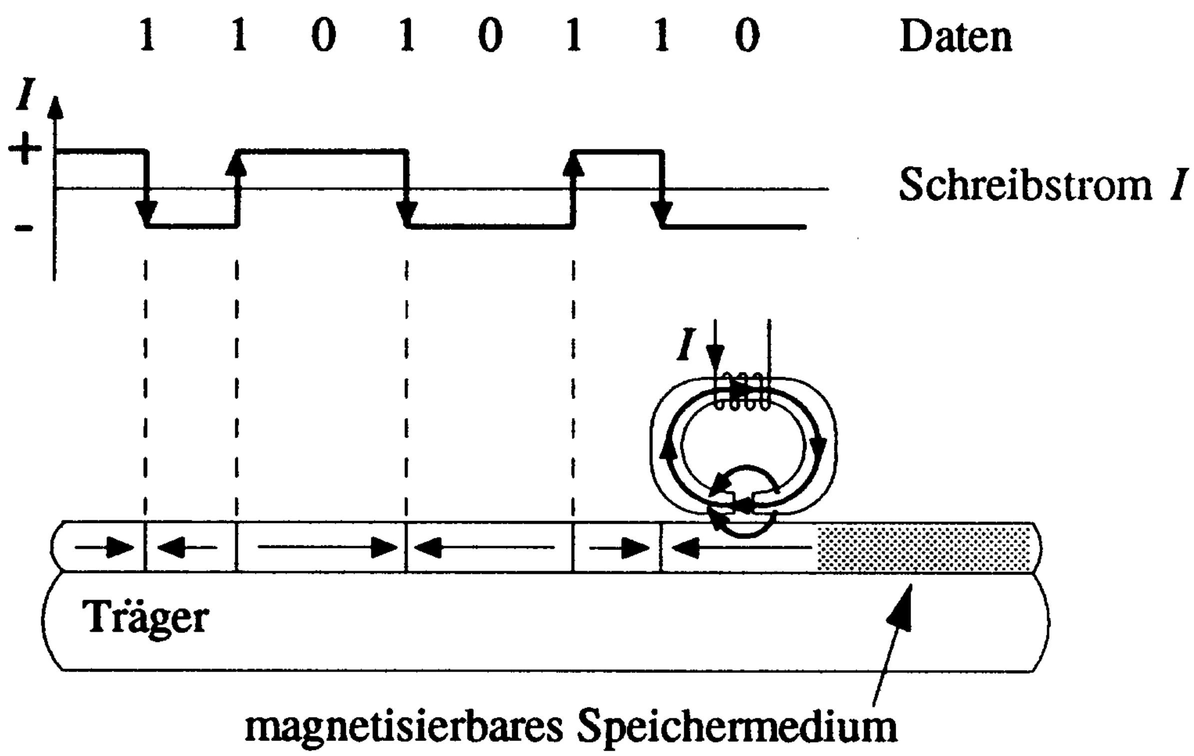


Remanenzpunkt : Wert der Flußdichte B_r, der auch nach Rückkehr von einer Magnetisierung bei Feldstärke H=0 noch übrigbleibt.

Koerzitivfeldstärke : Feldstärke $-H_c$, die notwendig ist, um ein magnetisiertes Material wieder vollständig zu entmagnetisieren

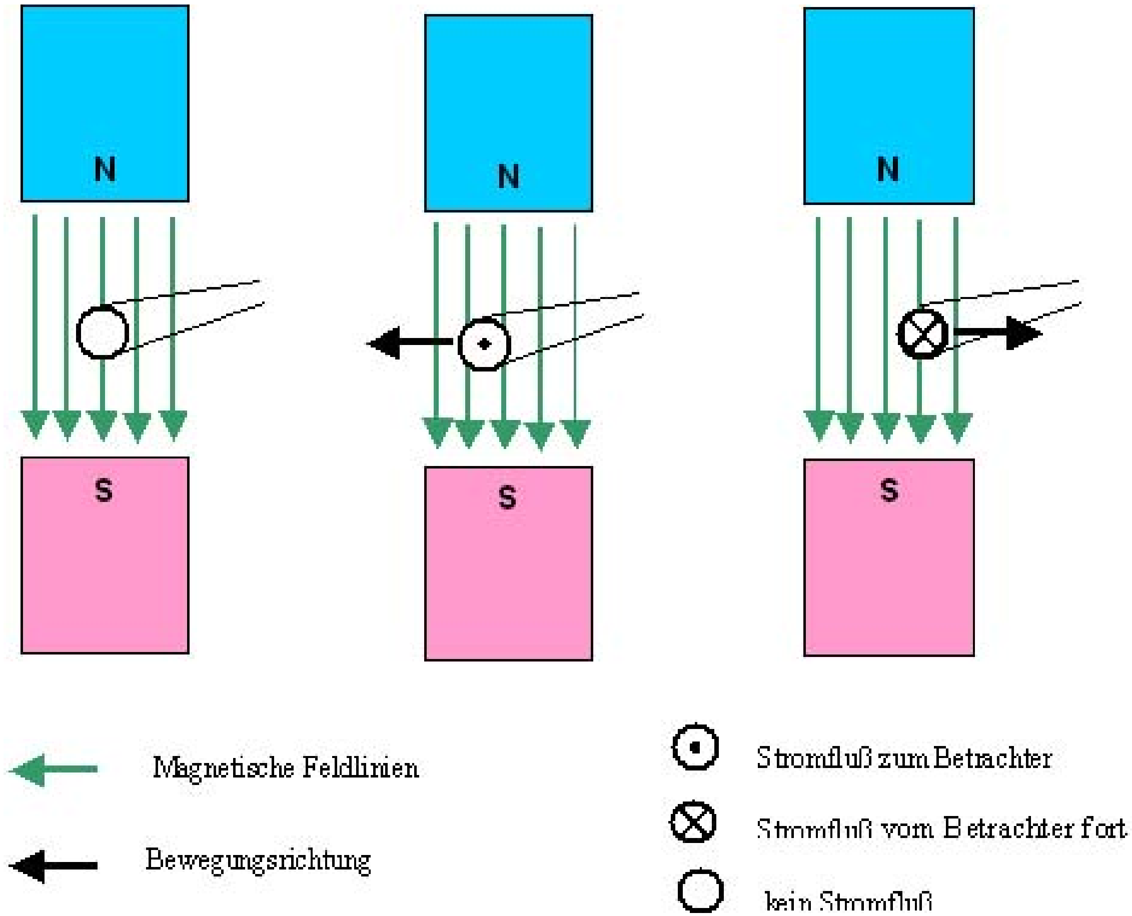
Elektromagnetische Datenspeicherung (Schreiben)

- Magnetbänder, Festplatten, Floppy etc.
  - ⇨ Wechselschriftverfahren
  - ⇨ ‚1' verursacht Richtungswechsel des Strom
  - ⇨ ‚0' muß mit Taktung erkannt werden

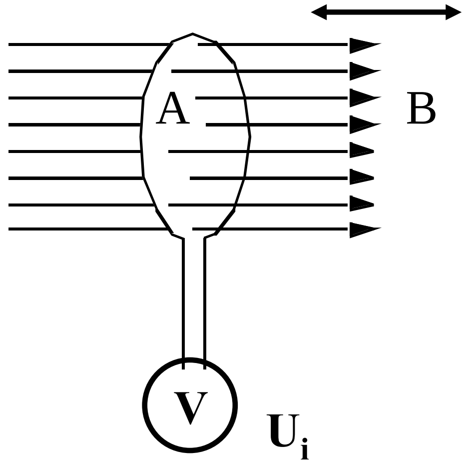


Elektromagnetische Induktion

❍ Elektromagnetische Induktion



- **Elektromagnetische Induktion**
  - ⇨ **Durch Bewegung des Stabmagneten wird in dem Leiter eine Spannung induziert**



$$U_i \sim \frac{1}{\Delta t} \qquad U_i \sim B \qquad U_i \sim A$$

$$U_i \sim \frac{B \cdot A}{\Delta t}$$

$$U_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

- **Magnetischer Fluß Φ**

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

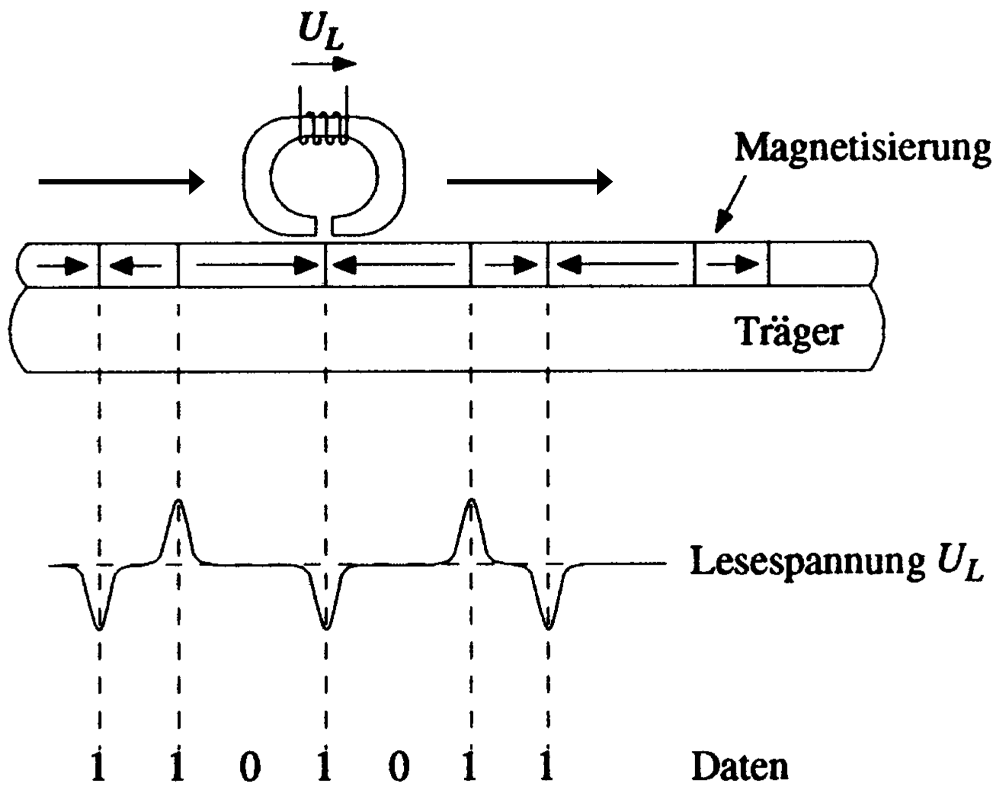
  - ⇨ **Falls magnetischer Fluß B homogen**

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

$$\Phi = B \cdot A \cdot \cos\varphi$$

$$[\Phi] = T \cdot m^2 = Wb$$

Elektromagnetische Datenspeicherung (Lesen)

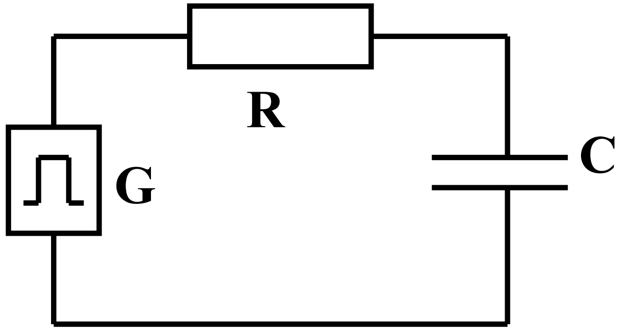


Ladevorgänge

- **Zeitkonstante Kondensator**

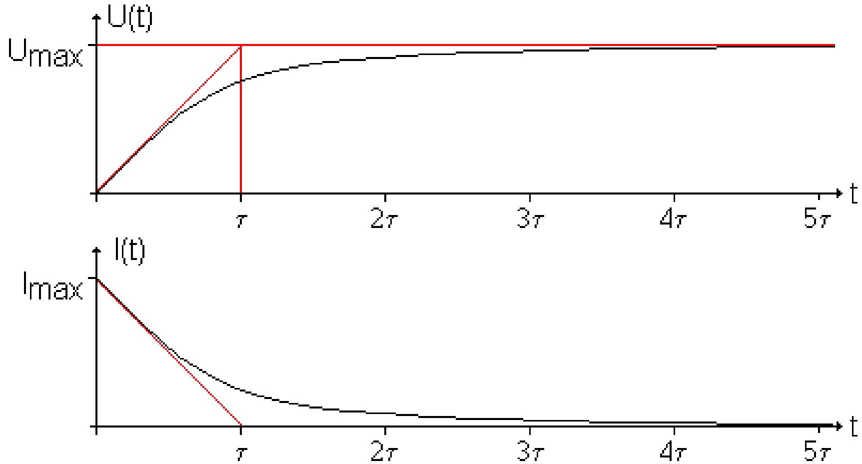
$$\tau = R \cdot C$$

- **Einschalten (Ladung)**



$$u_C = U\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = U\left(1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}}\right)$$

$$i_C = \frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

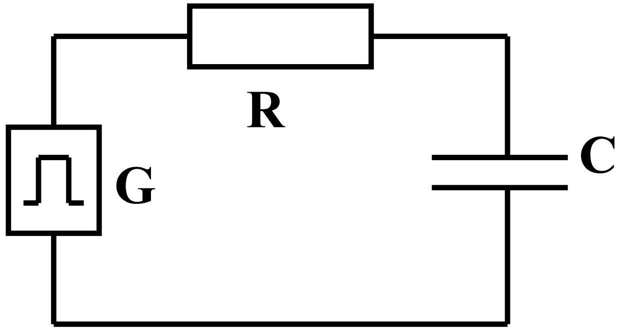


Ladevorgänge

- **Zeitkonstante Kondensator**

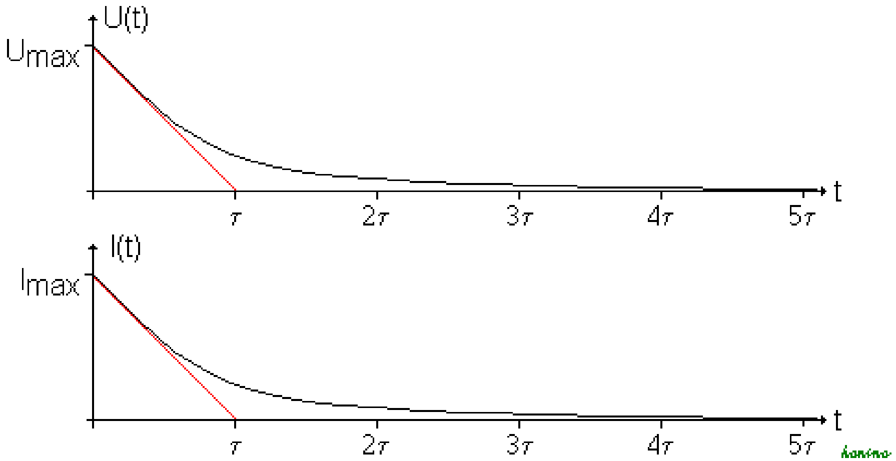
$$\tau = R \cdot C$$

- **Ausschalten (Entladung)**



$$u_C = U \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = U \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

$$i_C = \frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$



Energie im elektrischen Feld

$$W_{el} = \frac{1}{2} C \cdot U^2$$

Ladevorgänge

- Zeitkonstante Spule

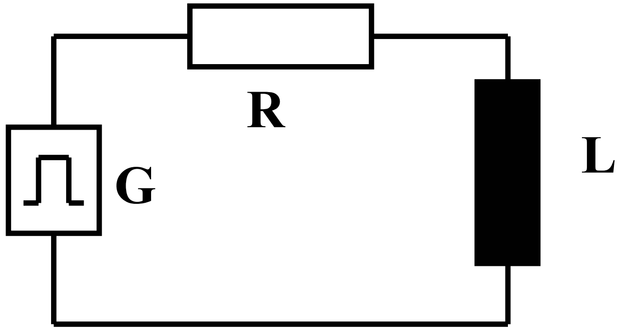
$$\tau = \frac{L}{R}$$

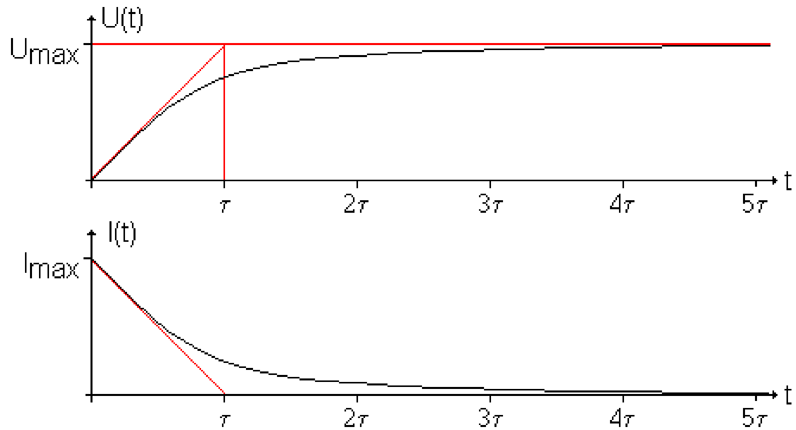
- Einschalten

$$i_L = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}\cdot t}\right)$$

- Ausschalten

$$i_L = \frac{U}{R}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U}{R}\cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t}$$



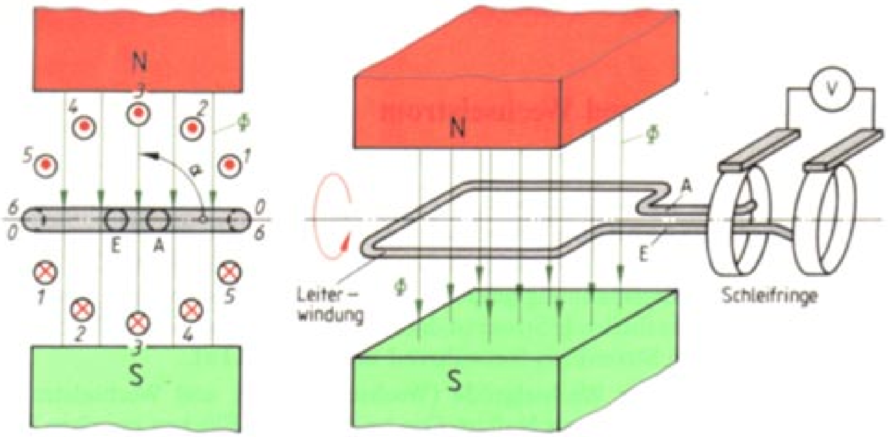


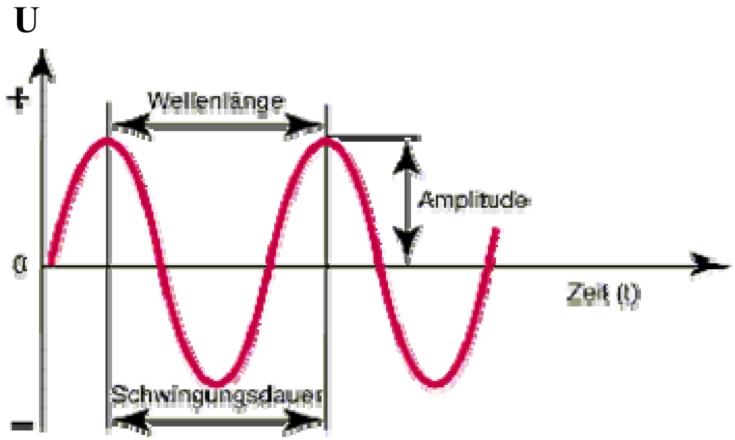
Energie im magnetischen Feld

$$W_{el} = \frac{1}{2} L \cdot I^2$$

Wechselspannung

- **Sinusförmige Wechselspannung**
  - ⇨ **Rotierender Leiter im Magnetfeld**





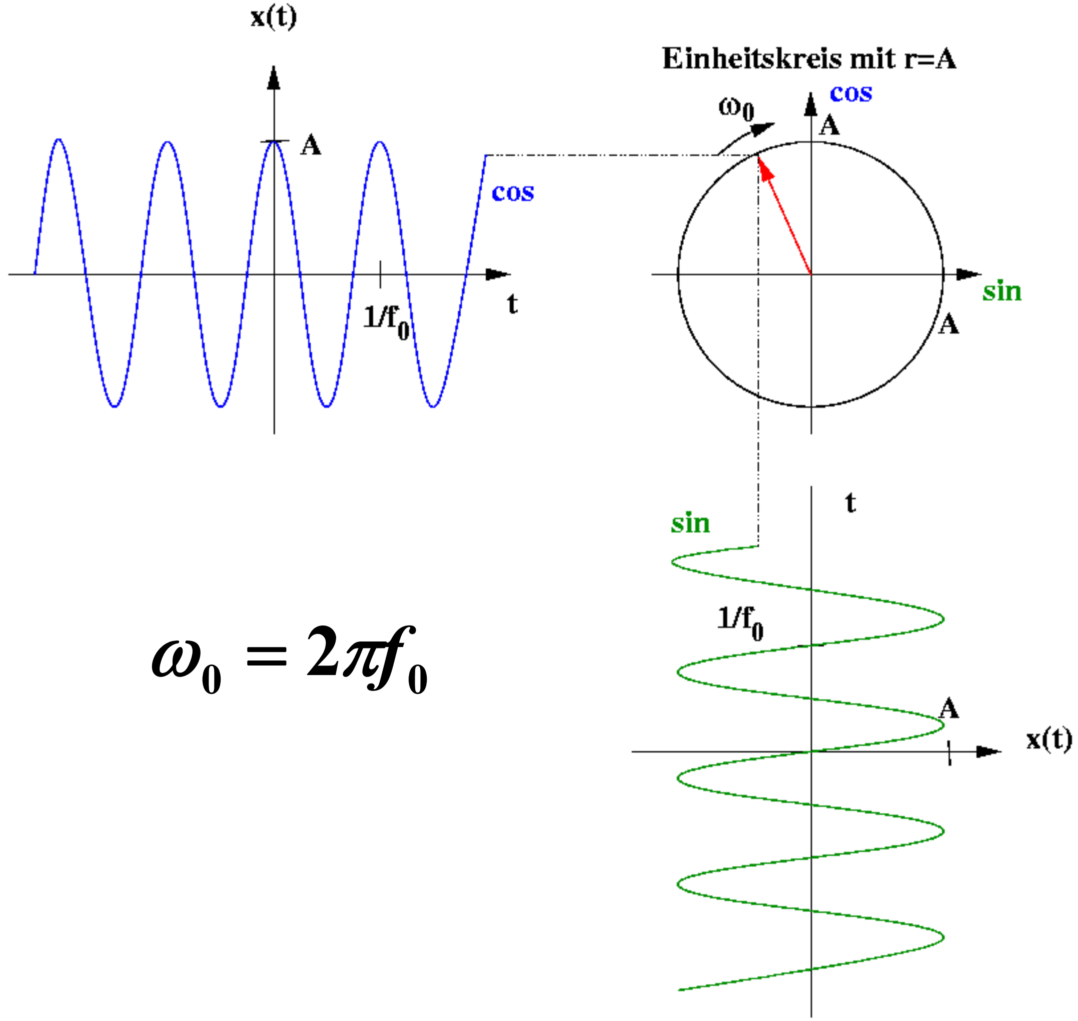
$$\Phi = B \cdot A \cdot \cos\varphi \qquad \varpi = \frac{\varphi}{t}$$

$$U_i = -\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(B \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t)\right) = B \cdot A \cdot \sin(\varpi \cdot t)$$

$$u(t) = u = \hat{u} \cdot \sin(\varpi \cdot t) \quad \Rightarrow \quad i(t) = i = \hat{i} \cdot \sin(\varpi \cdot t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Einschub Kreisfrequenz ω

- Kreisfrequenz ω

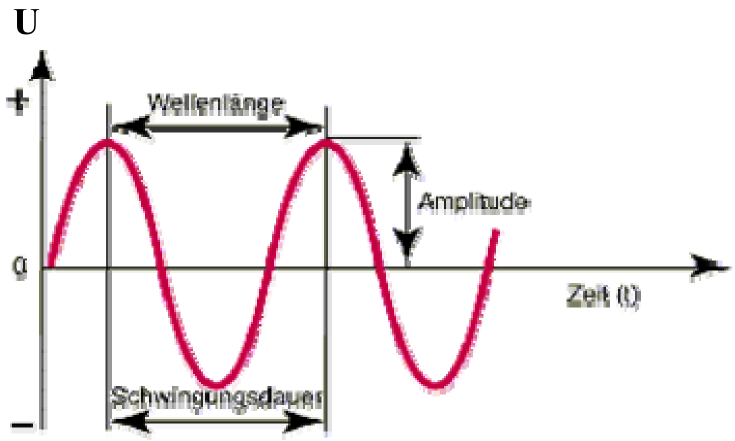


$$\omega = 2\pi f$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

Wechselspannung

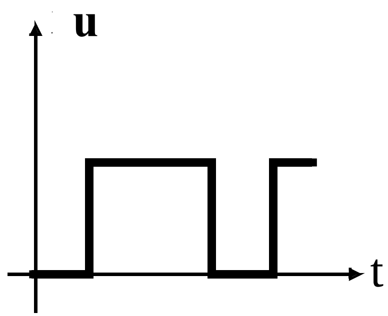
- **Kenngrößen Wechselspannung**
  - ⇨ **Linearer Mittelwert**
  - ⇨ **Gleichrichtwert**
  - ⇨ **Effektivwert**
  - ⇨ **Formfaktor**



- **Linearer Mittelwert (allgemein)**

$$\bar{y} = \frac{\int y(x)dx}{\int dx}$$

$\bar{y}$ ist der Mittelwert der Größe, die von der Variablen x abhängt.



- ⇨ **Wechselstrom der Periode T**

$$\bar{i} = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)dt$$

Wechselspannung

- **Gleichrichtwert** $\left|\bar{i}\right|$
  - ⇨ **Integral über den Absolutwert** $\left|i\right|$ **des Stromes**

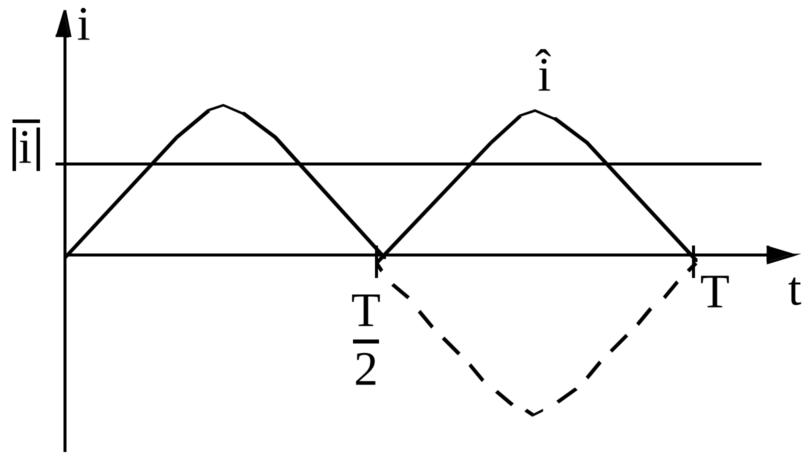
$$\left|\bar{i}\right| = \frac{1}{T}\int_0^T \left|i\right| \cdot dt$$

Beispiel: sinusförmige Wechselspannung

$$i = \hat{i} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$\left|\bar{i}\right| = \frac{1}{T}\int_0^T \left|\hat{i} \cdot \sin(\omega \cdot t)\right| dt$$

$$\left|\bar{i}\right| = \frac{\hat{i} \cdot 2}{\pi} = 0{,}6366 \cdot \hat{i}$$



M.Bogdan

Wechselspannung

- **Effektivwert**
  - ⇨ **Forderung, an einem Widerstand R wird beim Wechselstrom die gleiche Leistung verrichtet wie im Fall des Gleichstroms**

$$P_{=} = I_{=}^2 \cdot R \qquad P_{\sim} = \frac{R}{T}\int_0^T i_{\sim}^2(t)dt \qquad \text{oder} \quad I_{=}^2 \equiv \frac{1}{T}\int_0^T i_{\sim}^2(t)dt$$

Effektivstrom $$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt}$$

Beispiel: sinusförmige Spannung

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \hat{i}^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t)dt} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}$$

$$U_{eff} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$$

Effektivspannung

Wechselspannung

- **Formfaktor *k***
  - **Formfaktor einer Wechselgröße ist das Verhältnis von Effektivwert zu Gleichrichtwert**

$$k = \frac{\text{Effektivwert}}{\text{Gleichrichtwert}}$$

  - **Der Formfaktor wird angewandt bei der Skalierung von Ampere- und Voltmetern. Mit einer Gleichrichterschaltung wird der Gleichrichtwert von Wechselstrom und Wechselspannung gemessen.**
  - **Entsprechend dem Formfaktor ist die Skala so geeicht, daß der Effektivwert angezeigt wird.**

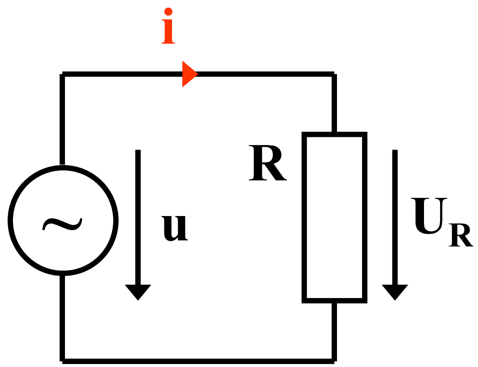
Form	Formfaktor *k*
Sinus	1,11
Rechteck	1
Dreieck	1,1547
Sägezahn	1,1547

Widerstände Wechselstrom

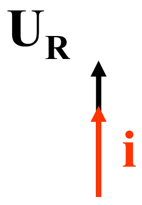
- **Vereinbarung:**
  - ⇨ **Alle Formel gelten für sinusförmige Wechselspannungen**

$$\varpi = 2 \cdot \pi \cdot f$$

- **Ohmscher Widerstand**
  - ⇨ **Strom und Spannung sind in Phase**



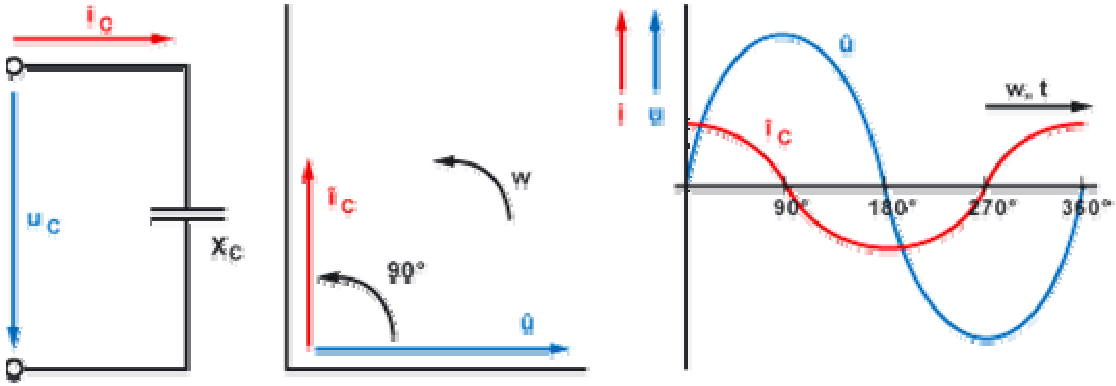
$$R = const \quad \forall \quad \varpi$$



Widerstände Wechselstrom

- **Kapazitiver Blindwiderstand**

$$X_c = \frac{1}{j\omega C} \qquad |X_C| = \frac{1}{\omega C}$$

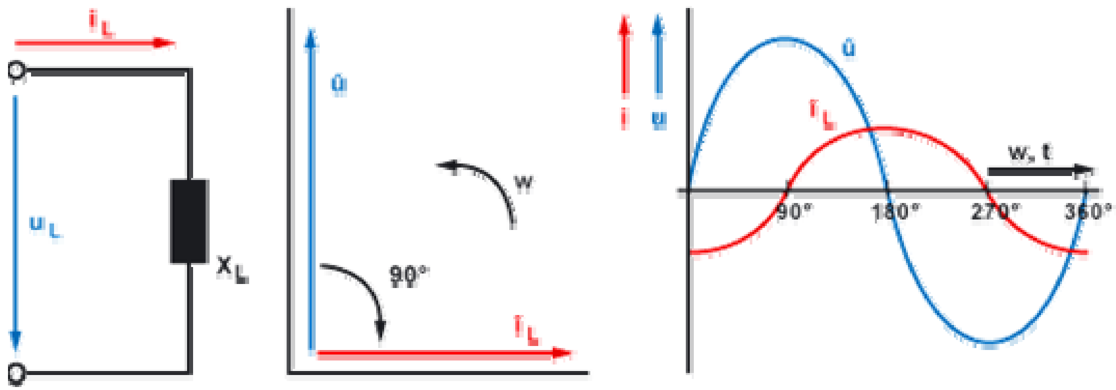


www.elektronik-kompendium.de

Widerstände Wechselstrom

- **Induktiver Blindwiderstand**

$$X_L = j\varpi L \qquad |X_L| = \varpi L$$



www.elektronik-kompendium.de

Analoge Filter

- **Wichtige Anwendung: Filter**
- **Wozu Filter?**

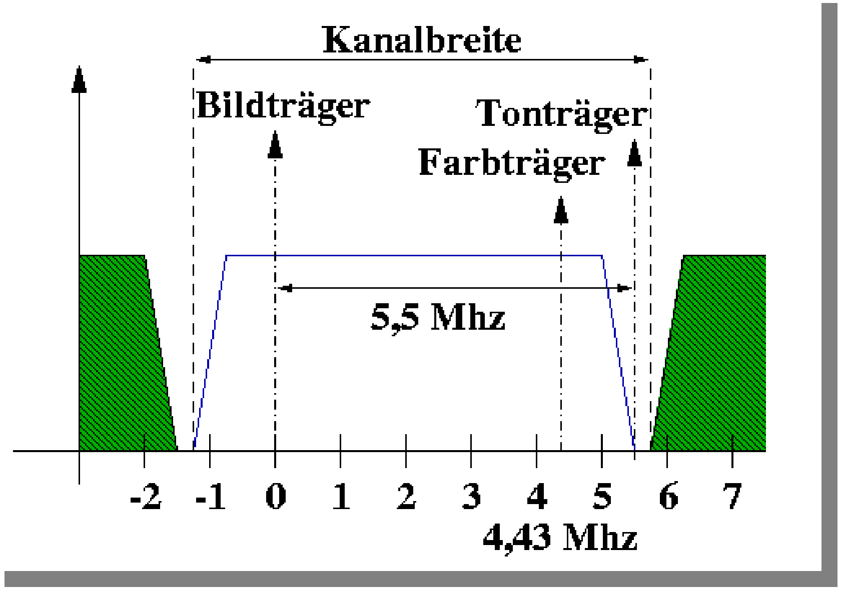
Filter dienen der Trennung von Signalen

Zu trennende Signale:

- **Nutzsignal ⇔ Störsignal**
- **Nutzsignal ⇔ Rauschen ⇔ Störsignal**
- **Nutzsignal ⇔ Nutzsignal ⇔ Rauschen ⇔ Störsignal**
- **Nutzsignal ⇔ Rauschen**
- **Spaltung des Nutzsignals**

Analoge Filter

- Beispiel: Fernseh-Signal nach CCIR-Norm Europa (VHF)
  - ⇨ Besteht aus Bild- und Tonträger
  - ⇨ Kanalbreite: 7 Mhz
  - ⇨ Bild - Ton Abstand: 5,5 Mhz
  - ⇨ Videobandbreite: 5 Mhz
  - ⇨ Frequenzhub Tonträger: ± 50 kHz

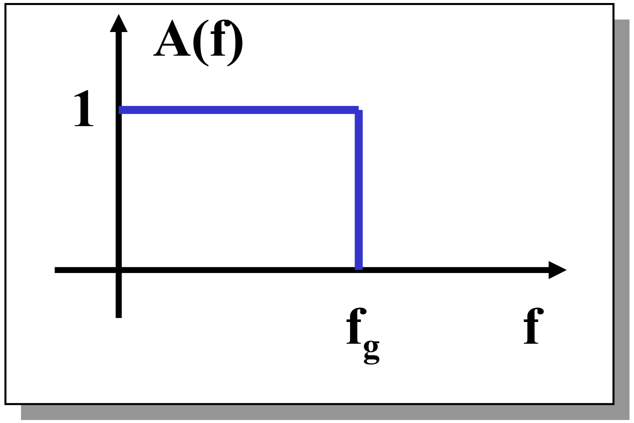


Analoge Filter

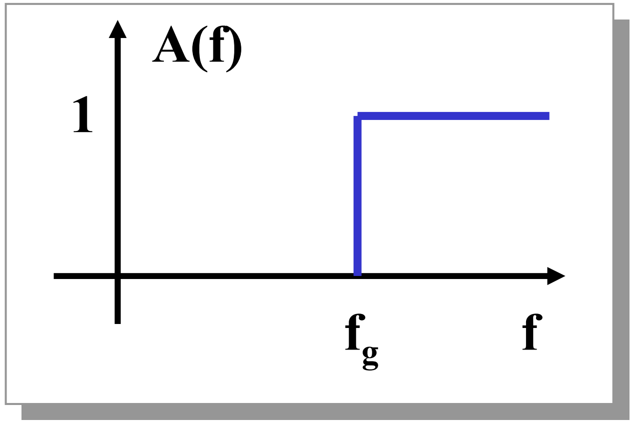
- Frequenzselektive Filter
  - ⇨ Tiefpaß
  - ⇨ Hochpaß
  - ⇨ Bandpaß
  - ⇨ Bandsperre
- Entsprechendes gilt auch für andere Bereiche
  - ⇨ Bildverarbeitung
    - Farbfilter
    - Intensitätsfilter
  - ⇨ Diskrete Filter
  - ⇨ Filter im Zeitbereich

Analoge Filter

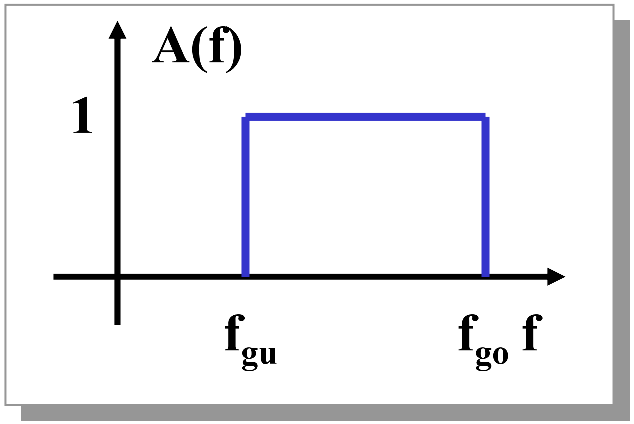
- Frequenzselektive Filter (idealisiert)



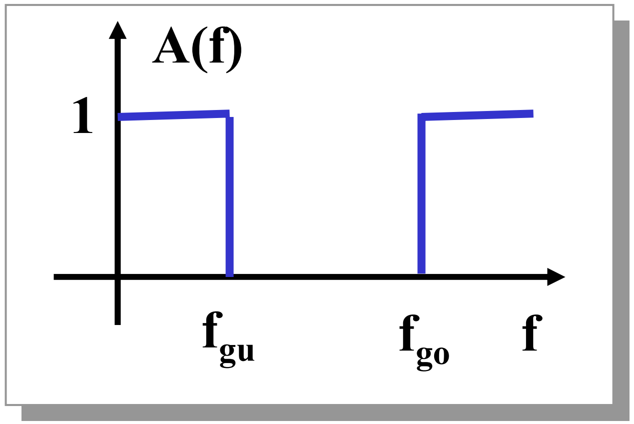
Tiefpaß



Hochpaß



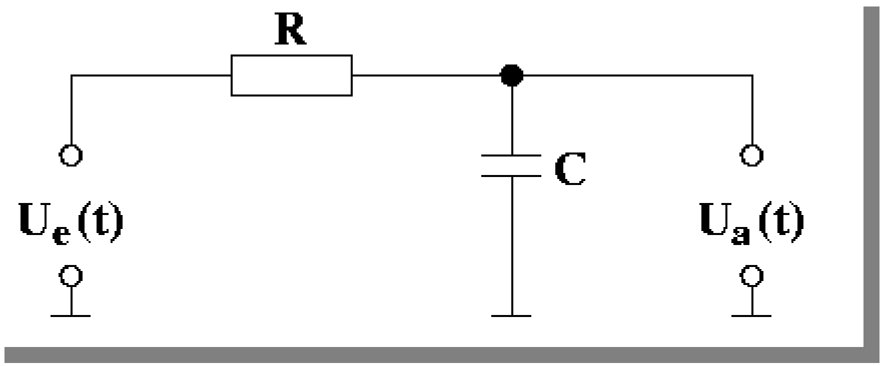
Bandpaß



Bandsperre

Passive Filter

- **Tiefpaß**
  - ⇨ **Frequenzbereich**



$$A(j\omega)=\frac{U_a(j\omega)}{U_e(j\omega)}=\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{1}{1+j\omega RC} \quad \text{mit} \quad \omega=2\pi f$$

Passive Filter

- **Tiefpaß**

$$A(j\omega) = \frac{U_a(j\omega)}{U_e(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Zerlegung in Real- und Imaginärteil

$$A = |A| e^{j\varphi}$$

mit

$$|A| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \qquad \varphi = -\arctan(\omega RC)$$

Einschub Betrag und Phase

- **Allgemein: komplexe Größe**

$$\left|A(\varpi)\right| = \sqrt{R^2(\varpi) + I^2(\varpi)}$$

Amplitude

$$\theta(\varpi) = \arctan\left(\frac{I(\varpi)}{R(\varpi)}\right)$$

Phase

Passive Filter

- **Tiefpaß**
  - ⇨ **Grenzfrequenz**

Als Grenzfrequenz bezeichnet man die Frequenz, bei der die Amplitude des Ausgangssignals des Filters um 3 dB gegenüber dem Eingangssignal gedämpft ist.

- **Einschub: Pegel (dB)**

$$p_{rel} = 20 \lg \frac{\text{Ausgangssignal}}{\text{Eingangssignal}}$$

Relativer Pegel

$$p_U = 20 \lg \frac{U_a}{U_e}$$

Spannungspegel

$$p = 10 \lg \frac{P_a}{P_e}$$

Leistungspegel

Passive Filter

- **Tiefpaß**
  - ⇨ **3 dB-Grenzfrequenz**

$$3\ \text{dB} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} = |A|$$

Einsetzen!

$$|A| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega_g^2 R^2 C^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{f_g = \frac{1}{2\pi}\omega_g = \frac{1}{2\pi RC}}$$

Grenzfrequenz Tiefpaß

Passive Filter

- Tiefpaß
  - ⇨ Eigenschaften

$$\text{Für} \quad f \ll f_g \quad \text{ist} \quad |A| = 1 \equiv 0\,\text{dB}$$

$$\text{Für} \quad f \gg f_g \quad \text{ist} \quad |A| \approx \frac{1}{\omega RC}$$

Die Verstärkung ist umgekehrt proportional zur Frequenz.

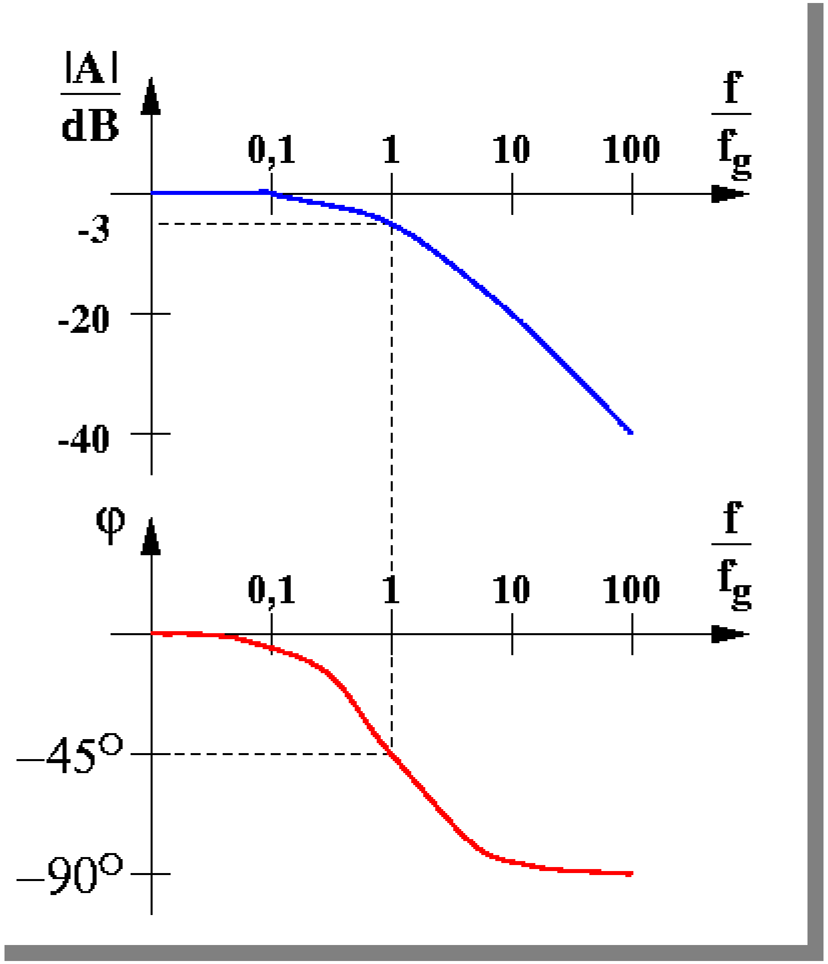
Die Dämpfung pro Dekade beträgt damit 20 dB (6 dB pro Oktave).

$$\text{Für} \quad f = f_g \quad \text{ist} \quad |A| = \frac{1}{\sqrt{2}} \equiv -3\,\text{dB}$$

Die Phasenverschiebung bei f_g beträgt -45^0.

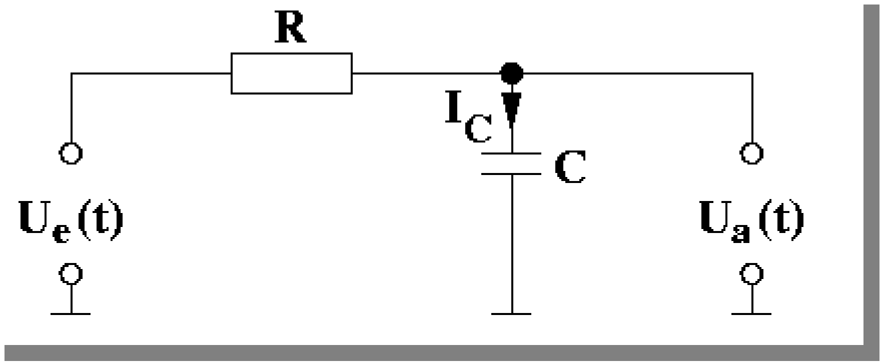
Passive Filter

- Tiefpaß
  - Bodediagramm



Passive Filter

- **Tiefpaß**
  - ⇨ **Beschreibung im Zeitbereich**



Knotenregel:

$$\frac{U_e - U_a}{R} - I_C = 0$$

$$I_C = C\frac{\Delta U_a}{\Delta t} = C\dot{U}_a$$

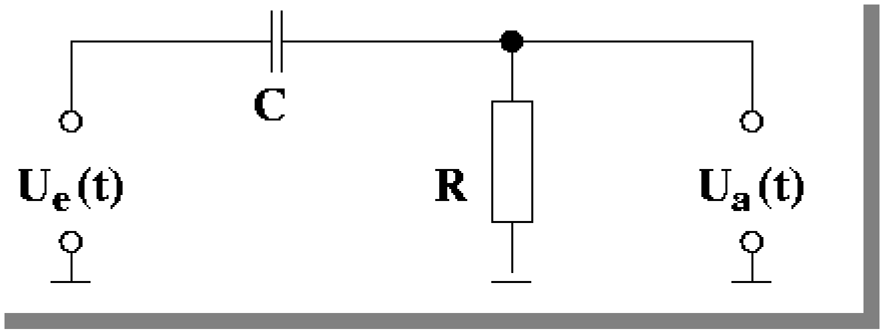
$$U_e = U_a + \dot{U}_a RC$$

$$\tau = RC$$

Zeitkonstante

Passive Filter

- **Hochpaß**
  - ⇨ **Frequenzbereich**



$$A(j\omega)=\frac{U_a}{U_e}=\frac{R}{R+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{1}{1+\frac{1}{j\omega RC}}$$

Passive Filter

- **Hochpaß**

$$A(j\omega) = \frac{U_a(j\omega)}{U_e(j\omega)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega RC}}$$

Zerlegung in Real- und Imaginärteil

$$A = |A| e^{j\varphi}$$

mit

$$|A| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 R^2 C^2}}} \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right)$$

Passive Filter

- **Hochpaß**
  - ⇨ **Eigenschaften**

$$\text{Für}\quad f >> f_g \quad \text{ist}\quad |A| = 1 \equiv 0\,\text{dB}$$

$$\text{Für}\quad f << f_g \quad \text{ist}\quad |A| \approx \omega\text{RC}$$

Die Verstärkung ist proportional zur Frequenz.

Die Asymptotensteigung pro Dekade beträgt 20 dB (6 dB pro Oktave).

$$\text{Für}\quad f = f_g \quad \text{ist}\quad |A| = \frac{1}{\sqrt{2}} \equiv -3\,\text{dB}$$

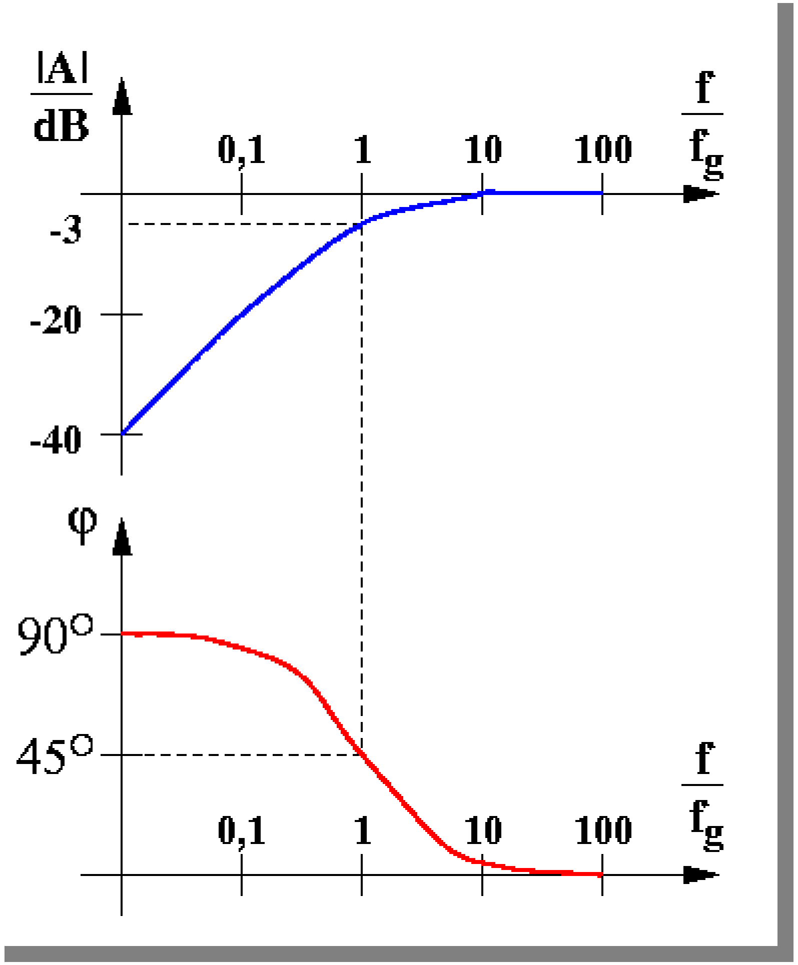
$$\boxed{f_g = \frac{1}{2\pi}\omega_g = \frac{1}{2\pi RC}}$$

Grenzfrequenz Hochpaß

Die Phasenverschiebung bei f_g beträgt 45^0.

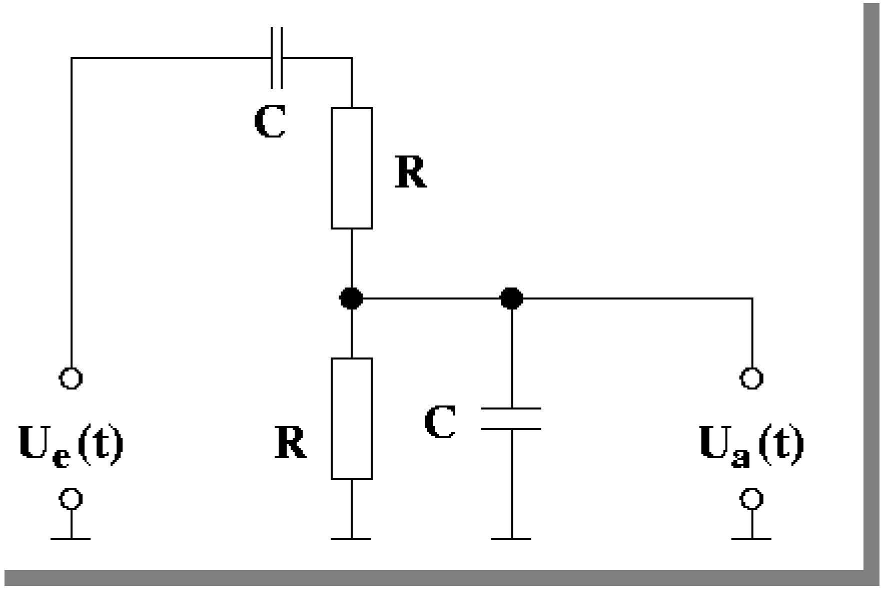
Passive Filter

- Hochpaß
  - ⇨ Bodediagramm



Passive Filter

- **Bandpaß**



$$A(j\omega) = \frac{U_a}{U_e} = \frac{j\omega RC}{(j\omega RC + 1)^2 + j\omega RC}$$

$$= \frac{j\Omega}{1 + 3j\Omega - \Omega^2}$$

mit

$$\omega RC = \Omega$$

Passive Filter

- **Bandpaß**

$$A(j\omega) = \frac{j\Omega}{1 + 3j\Omega - \Omega^2}$$

Zerlegung in Real- und Imaginärteil

$$A = |A| e^{j\varphi}$$

mit

$$|A| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\Omega} - \Omega\right)^2 + 9}} \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{1 - \Omega^2}{3\Omega}\right)$$

Passive Filter

- **Bandpaß**

$$f_r = \frac{1}{2\pi}\omega_r = \frac{1}{2\pi RC}$$

Resonanzfrequenz Bandpaß

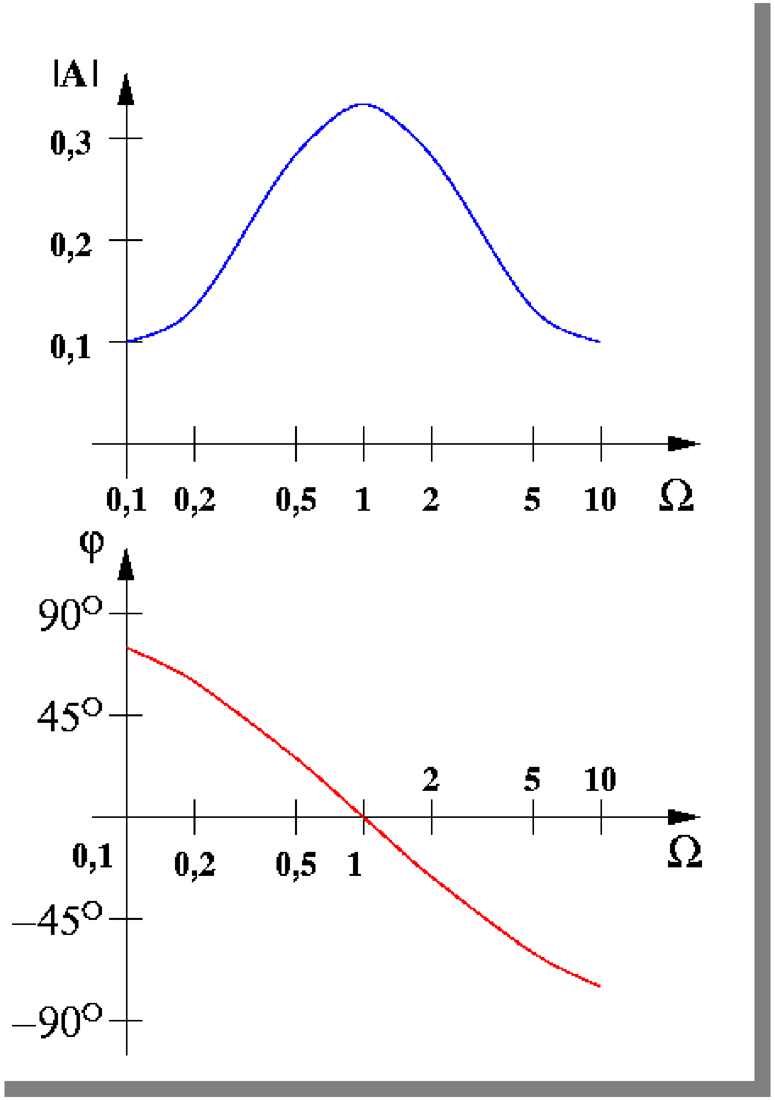
Normierte Frequenz Ω: $\Omega = \frac{\omega}{\omega_r} = \frac{f}{f_r}$

Verstärkung bei Resonanzfrequenz f_r: $A_r = \frac{1}{3}$

Phasenverschiebung bei Resonanzfrequenz f_r: $\varphi = 0$

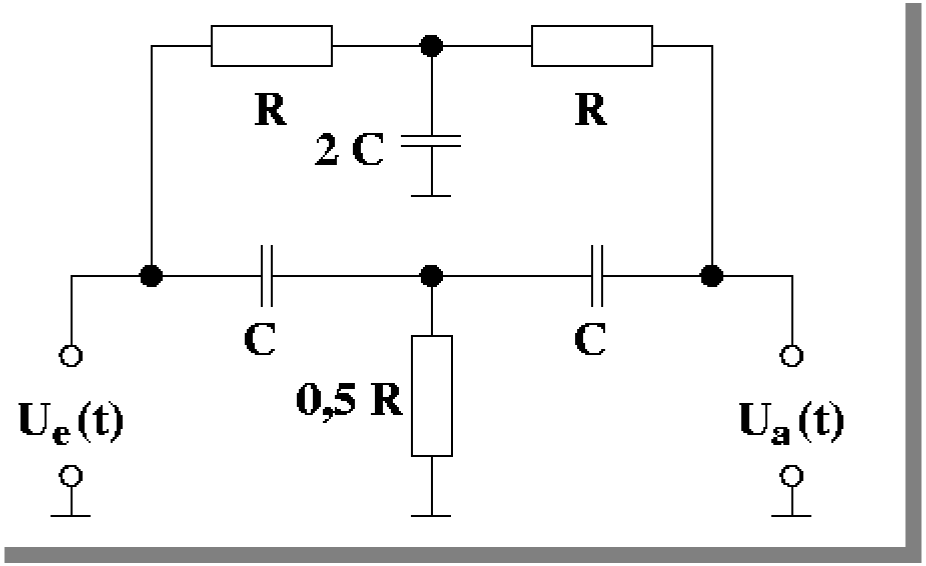
Passive Filter

- **Bandpaß**
  - ⇨ **Bodediagramm**



Passive Filter

- **Bandsperre: Doppel-T-Filter**



$$A(j\omega) = \frac{1+(j\omega RC)^2}{1+4j\omega RC-(\omega RC)^2} = \frac{1-\Omega^2}{1+4j\Omega-\Omega^2}$$

mit

$$\omega RC = \Omega$$

Passive Filter

- **Bandsperre: Doppel-T-Filter**

$$A(j\omega) = \frac{1-\Omega^2}{1+4j\Omega-\Omega^2}$$

Zerlegung in Real- und Imaginärteil

$$A = |A| e^{j\varphi}$$

mit

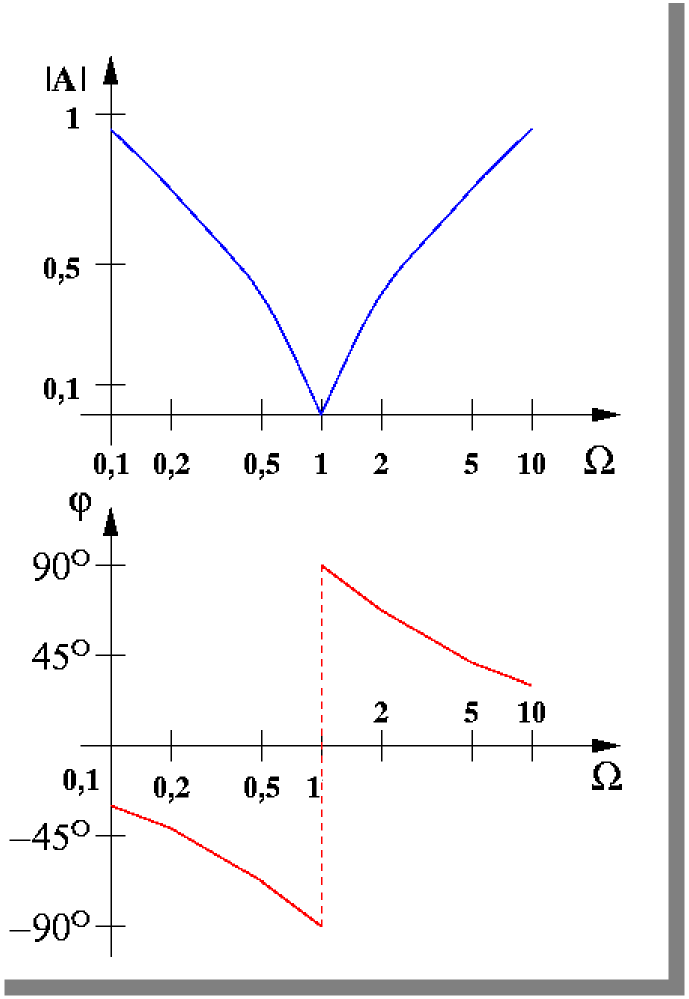
$$|A| = \frac{|1-\Omega^2|}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2+16\Omega^2}} \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{4\Omega}{\Omega^2-1}\right)$$

Passive Filter

- **Bandsperre: Doppel-T-Filter**
  - ⇨ **Bodediagramm**

$$f_r = \frac{1}{2\pi}\omega_r = \frac{1}{2\pi RC}$$

Resonanzfrequenz Bandsperre



3 Halbleiter

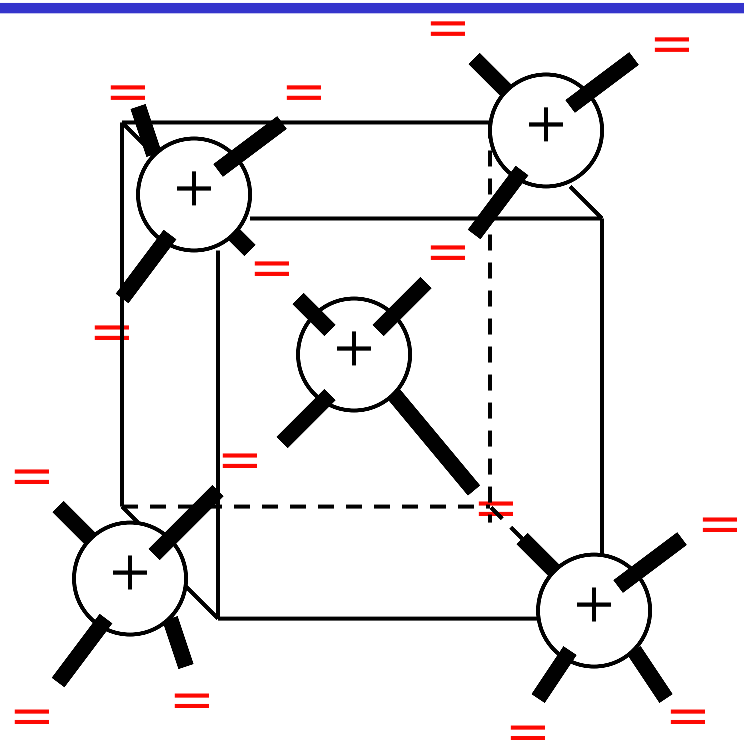
- Halbleiter sind Elemente, deren Leitfähigkeit zwischen der von Isolatoren und Leitern liegt
  - ⇨ besitzen einen kristallinen Aufbau ohne Metallbindung
  - ⇨ die Leitfähigkeit kann durch Fremdatome beeinflusst werden
- Die Leitfähigkeit von Halbleitern schwankt mit der Temperatur
  - ⇨ beim absoluten Nullpunkt ist sie Null
  - ⇨ bei höheren Temperaturen liegt sie zwischen Metallen und Nichtleitern

Beispiele

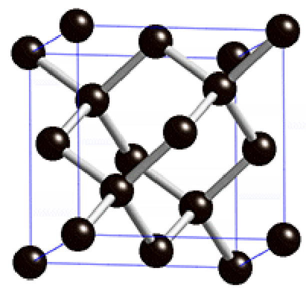
Material	*Widerstand (Ω/m)*	*Einordnung*
Hartgummi	10^{16}	**Nichtleiter**
Glas	10^{10}	**Nichtleiter**
Galliumarsenid (rein)	10^{3}	**Halbleiter**
Silizium (rein)	**100**	**Halbleiter**
Silizium (dotiert)	**1 bis 100**	**Halbleiter**
Germanium (rein)	**1**	**Halbleiter**
Germanium (dotiert)	**1 bis** 10^{-5}	**Halbleiter**
Eisen	10^{-7}	**Leiter**
Silber	10^{-8}	**Leiter**

Kristallstruktur in Germanium und Silizium

- **Kristallstruktur**
  - ⇨ **regelmäßig angeordnetes Atomgefüge**
- **Amorphe Struktur**
  - ⇨ **kein regelmäßiges Atomgefüge**
- **Mischkristalle**
  - ⇨ **Fremdatome sind in die Kristallstruktur eingebaut**
- **Polykkristalle**
  - ⇨ **Mehrere Kristalle bilden ein Gefüge**
- **Einkristall**
  - ⇨ **der Körper besteht aus einem einzigen Kristall**
- **In Siliziumkristallen sind die Atome in einer Tetraederstruktur aufgebaut**



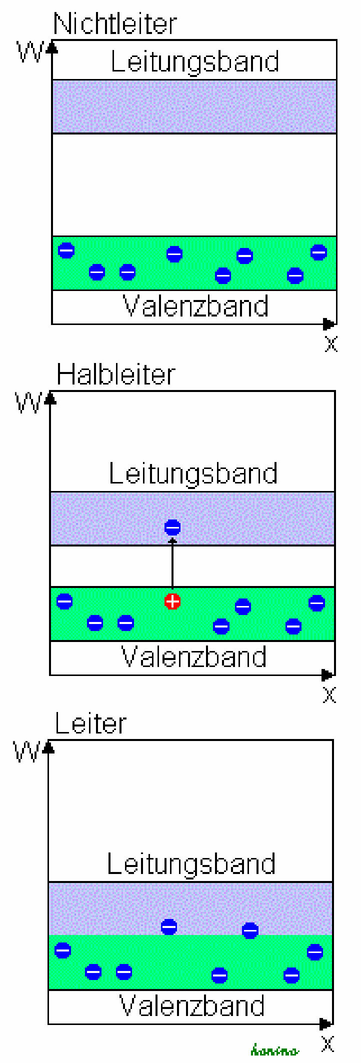
Silizium



Diamant

Valenz- und Leitungsband

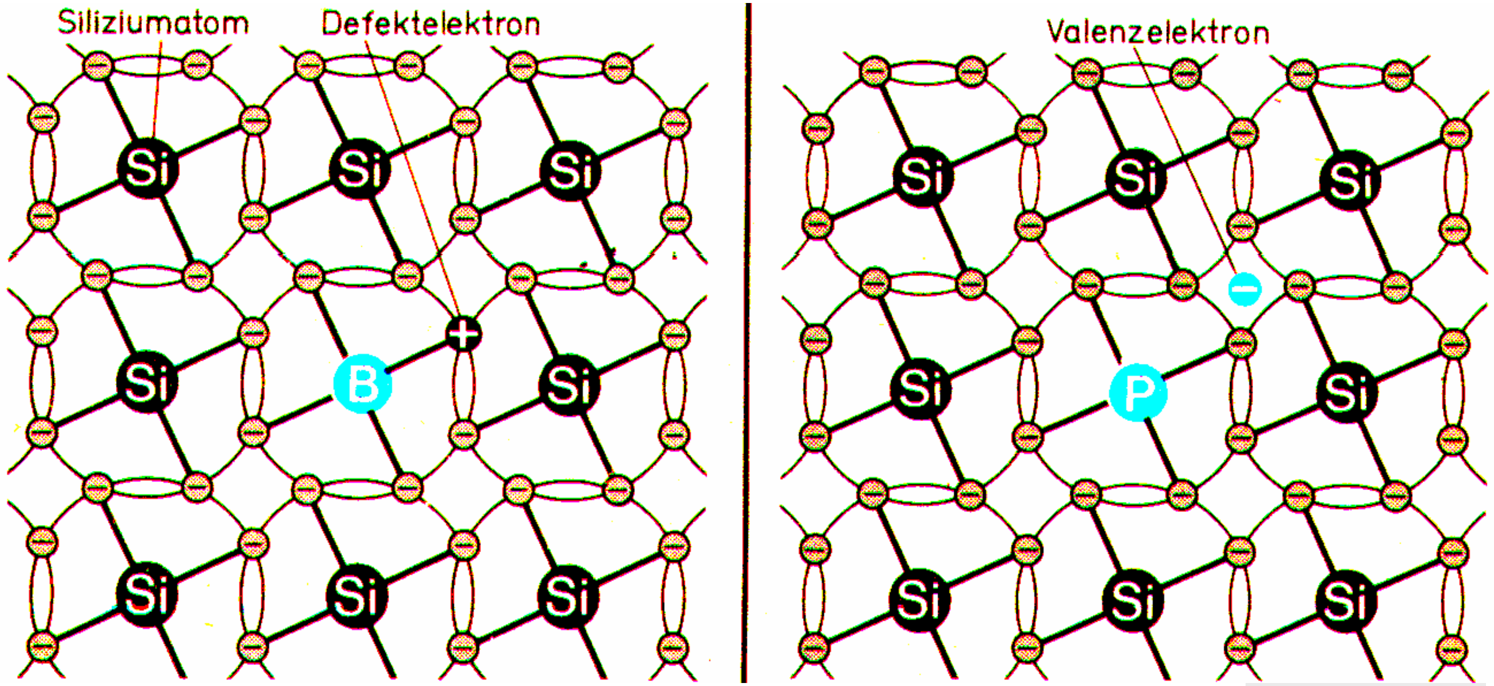
- In voll besetzten oder in leeren Bändern ist ein Elektronenfluss nicht möglich
- Valenzband: Elektronen im obersten Energieband
  - ⇨ ist dies voll besetzt, findet kein Ladungstransport statt
- Leitungsband: das nächste Energieband über dem Valenzband
  - ⇨ Werden Elektronen durch Energiezufuhr in das Leitungsband gehoben, können sie sich in diesem frei bewegen



Wikipedia.de

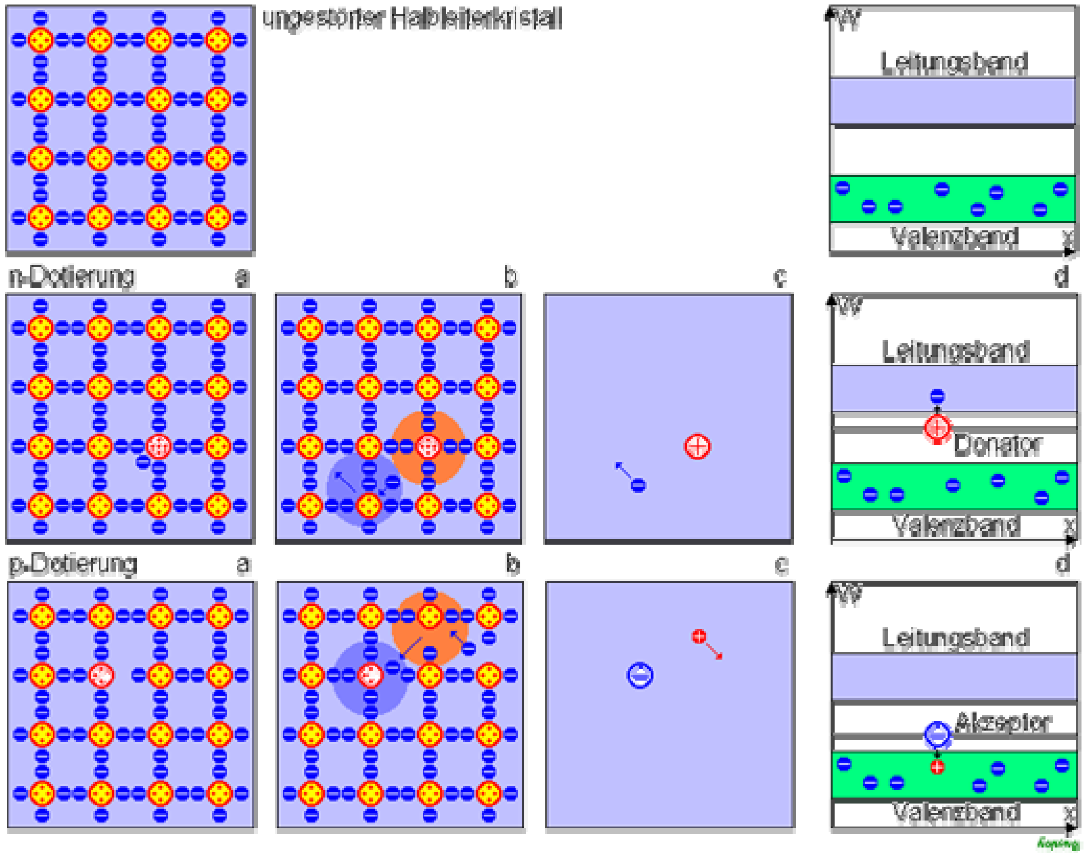
Dotierte Halbleiter

- Gezielter Einbau von Fremdatomen in Silizium- oder Germaniumkristalle durch *Dotierung*
  - ⇨ zusätzliche Valenzelektronen durch Arsen (As), Antimon (Sb) oder Phosphor (P)
  - ⇨ fehlende Valenzelektronen durch Aluminium (AL), Bor (B) oder Indium (In)



Leitfähigkeit durch Störstellen

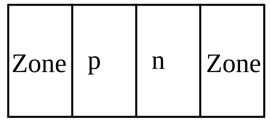
- **Geringe Energie reicht aus, um das Elektron in das Leitungsband zu heben**
- **Donatoratom**
  - ⇨ **Das Atom gibt das zusätzliche Elektron leicht ab**
  - ⇨ **n-Dotierung**
- **Akzeptoratom**
  - ⇨ **Das Atom nimmt ein Elektron leicht auf**
  - ⇨ **p-Dotierung**



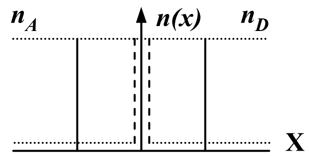
Wikipedia.de

3.1 Der *pn*-Übergang

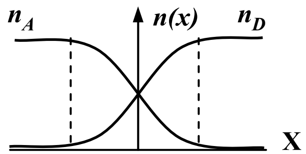
- **Grenzschicht zwischen p- und n-dotierten Schicht**
- **Ein Ausgleich der Ladungsträger durch Diffusion über die Grenzschicht**
  - ⇨ **Es entsteht ein elektrisches Feld**
- **wenn Diffusionswirkung und Feldwirkung gleich sind**
  - ⇨ **Gleichgewicht**
  - ⇨ **Ladungsträgerfreie Zone**
  - ⇨ **Diffusionsspannung U_D**
- **Bei Zimmertemperatur**
  - ⇨ **Germanium** $U_D = 0{,}37$ V
  - ⇨ **Silizium** $U_D = 0{,}75$ V



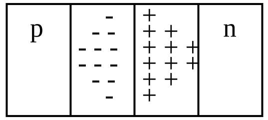
a) Grenzschicht mit n - dotierter und p - dotierter Zone



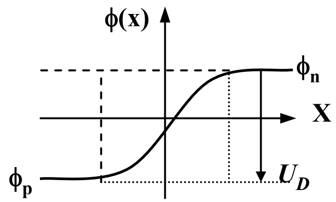
b) Konzentration der Donatoren n_D und Akzeptoren n_A ohne Ausgleich



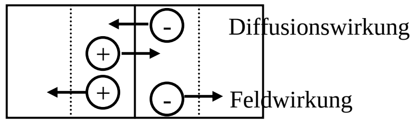
c) Konzentrationsdichte nach der Diffusion



d) Raumladung



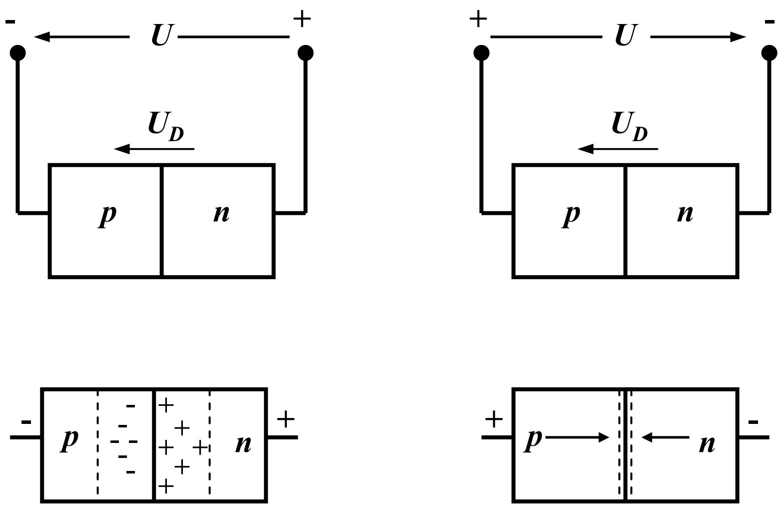
e) Potenzialverlauf quer zur Grenzschicht



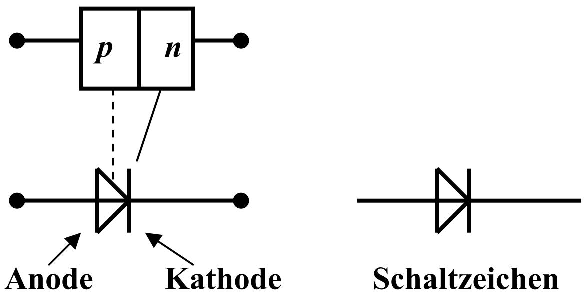
f) Kraftwirkung

Halbleiterdioden

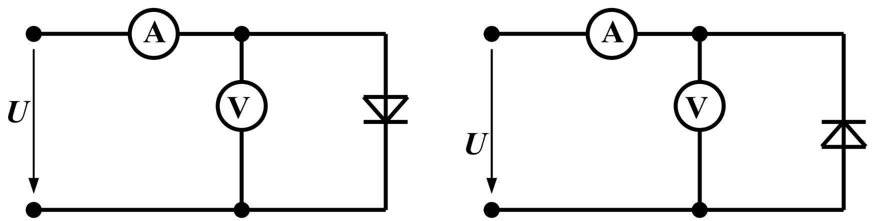
- Bauelemente, welche die Leitfähigkeitseigenschaften eines pn-Übergangs benutzen
- *pn*-Übergang mit äußerer Spannung
- Sperrrichtung
  - ⇨ Ladungsträgerfreie Zone wird größer
  - ⇨ Es fließt kein Strom
  - ⇨ Durchbruch, wenn die Feldstärke (Spannung) zu groß wird (*Lawinen-Effekt*)
- Durchlassrichtung
  - ⇨ Ladungsträgerfreie Zone wird kleiner
  - ⇨ Wenn $U > U_D$ wird, fließt ein Strom



Kennlinie des *pn*-Übergangs

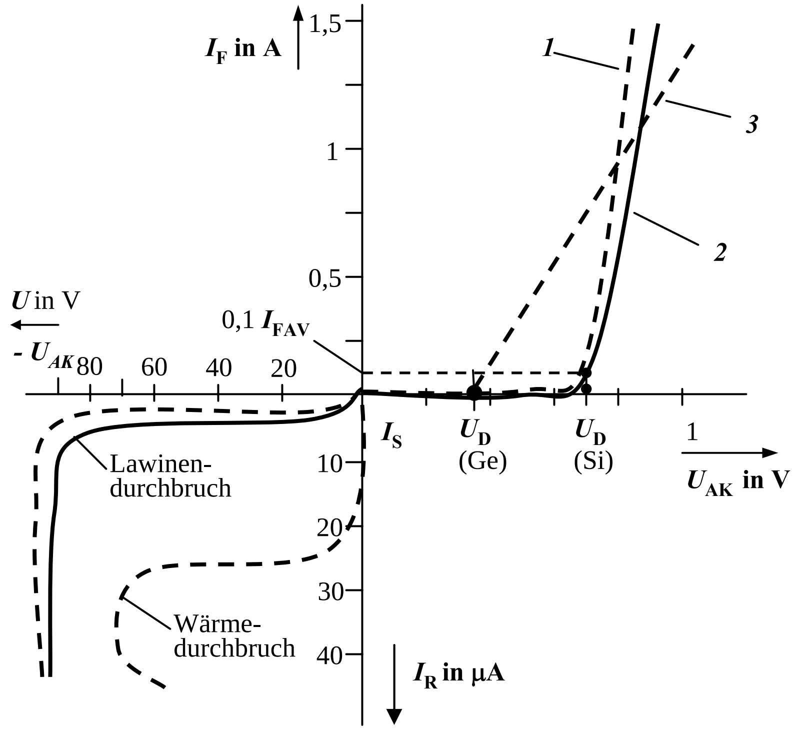


Schaltzeichen



Schaltung in Durchlassrichtung

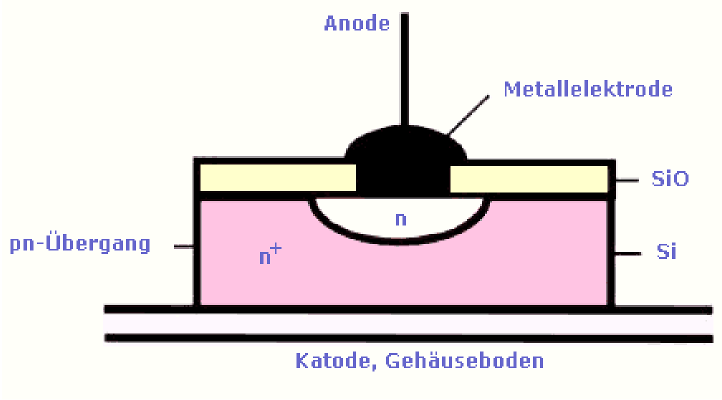
Schaltung in Sperrichtung



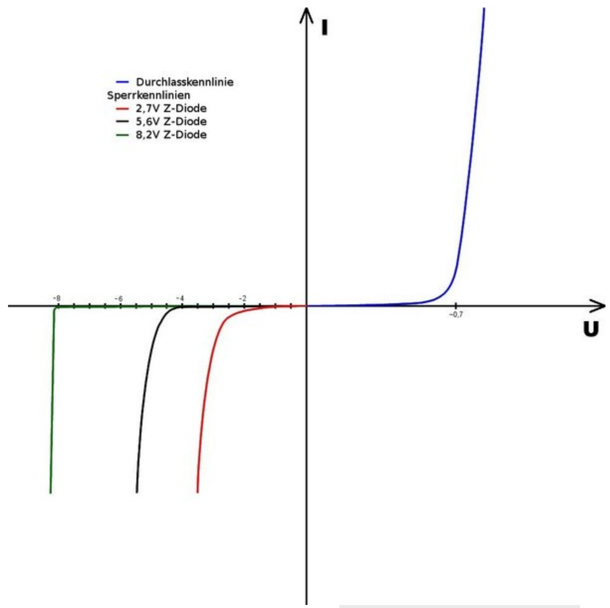
1: Silizium ideal
2: Silizium real
3: Germanium real

Halbleiterdioden mit besonderen Eigenschaften

- **Schottky-Dioden**
  - ⇨ **Beruht auf dem von Schottky untersuchten Metall-Halbleiter Übergang**
  - ⇨ **Diffusion wie bei pn-Übergang**
  - ⇨ **besonders schnelle Dioden**

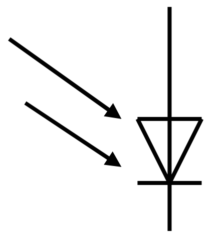


- **Z-Dioden**
  - ⇨ **Ausnutzung des Lawinen-Effekts**
  - ⇨ **Strom darf einen Höchstwert I_{Zmax} nicht überschreiten**
  - ⇨ **Spannungsbegrenzung bei Wechselspannungen**

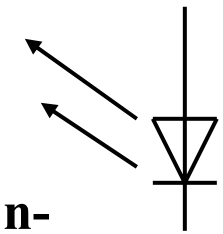


Halbleiterdioden mit besonderen Eigenschaften

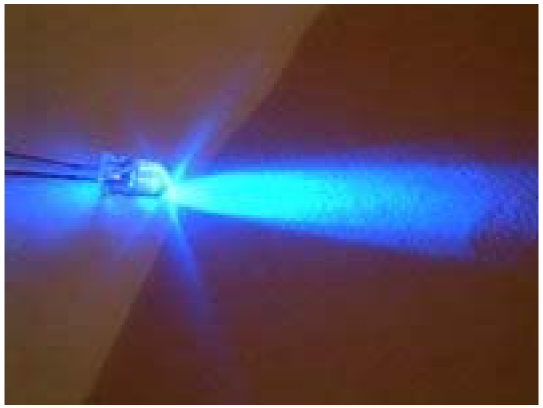
- Fotodioden
  - ⇨ Licht kann durch eine Öffnung an den pn-Übergang gelangen
  - ⇨ ein einfallendes Lichtquant erzeugt ein Elektron-Loch-Paar
  - ⇨ Fotodioden werden in Sperrichtung betrieben
    - ist kein Licht vorhanden, fließt kein Strom
    - bei Lichteinfall fließt durch den Photoeffekt ein Strom
  - ⇨ Lichtschranken
  - ⇨ Datenübertragung mit Lichtwellenleitern



Halbleiterdioden mit besonderen Eigenschaften

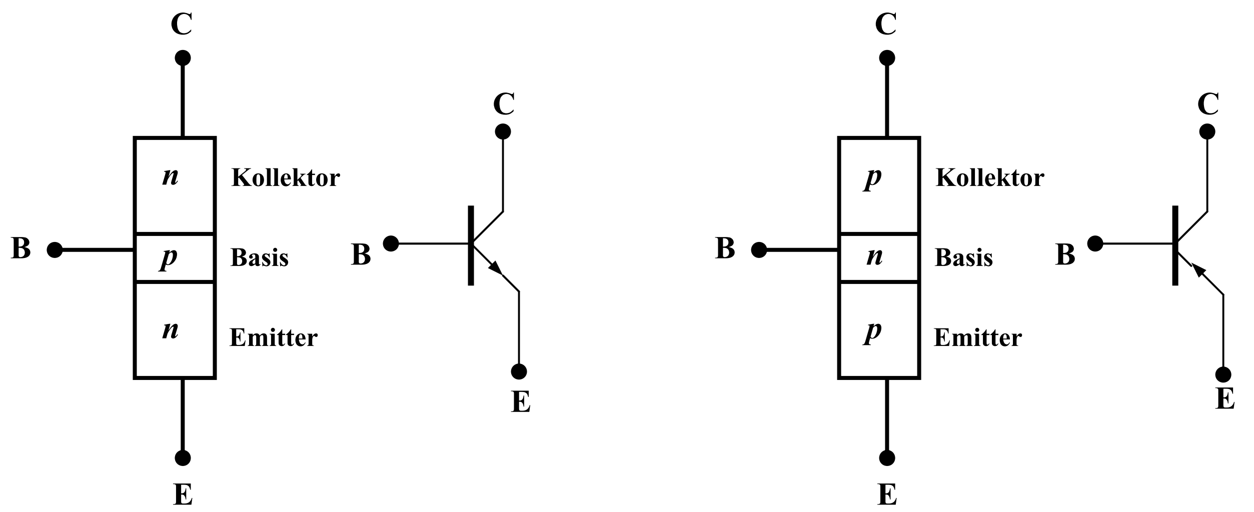


- Lumeniszenzdioden (Light Emitting Diod, LED)
  - ⇨ pn-Übergang mit hoher Dotierung
  - ⇨ Betrieb in Durchlassrichtung (Vorwiderstand)
  - ⇨ Durchlassstrom injiziert Ladungsträger in den p- und n-Bereich
  - ⇨ Ladungsträgerwerden aus dem Leitungsband in das energetisch günstigere Valenzband gezogen (Rekombination)
  - ⇨ Energieerhaltungssatz: Energie muss abgegeben werden
  - ⇨ Es entsteht ein Lichtquant
    - Farbe hängt von Wellenlänge ab
      - – Wellenlänge von Material abhängig
- Verwendung
  - ⇨ Anzeigen
  - ⇨ Datenübertragung durch Lichtwellenleiter
  - ⇨ Optokoppler



3.2 Bipolare Transistoren

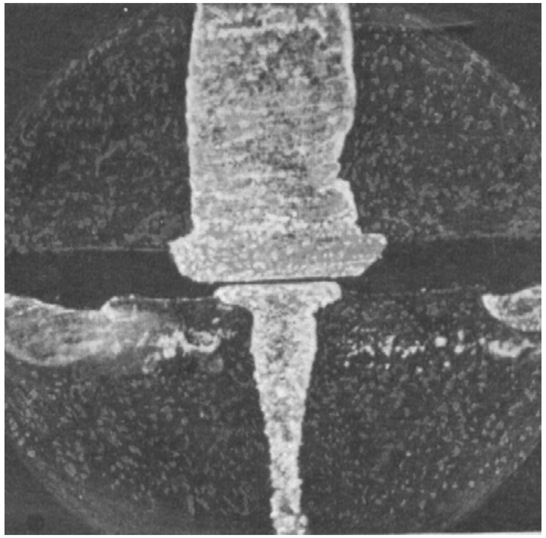
- **Ausnutzen der Eigenschaft zweier pn-Übergänge**
  - ⇨ **NPN-Transistor**
  - ⇨ **PNP-Transistor**
- **Von jeder Zone wird ein Anschluss herausgeführt**
  - ⇨ **Emitter (E)**
  - ⇨ **Basis (B)**
  - ⇨ **Kollektor (C)**

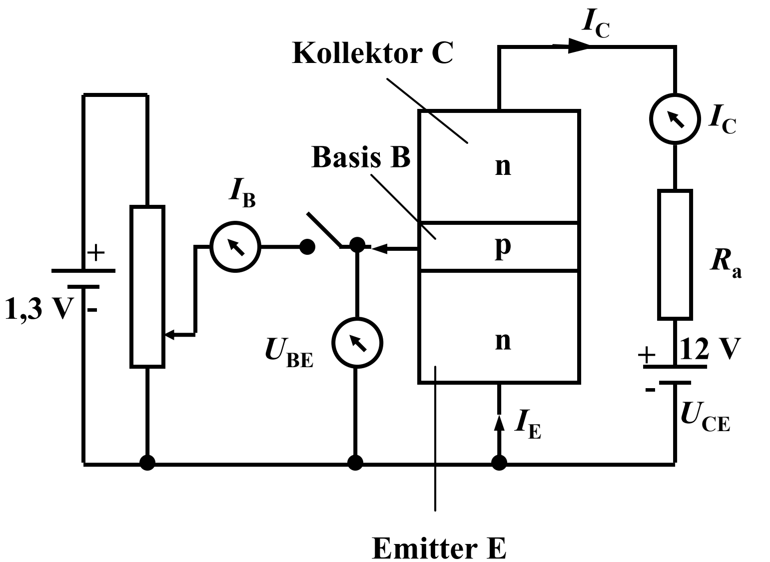


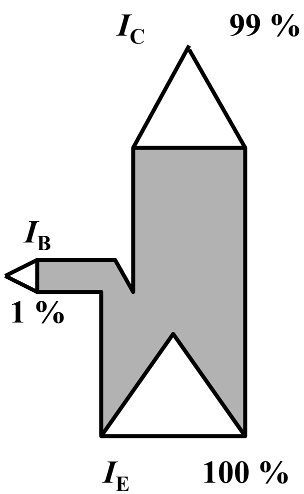
NPN-Transistor **PNP-Transistor**

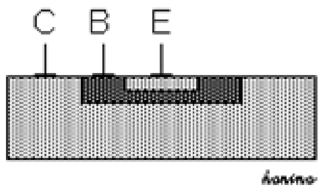
Der Transistoreffekt

- Basis des Transistors ist sehr dünn
  - ⇨ Die Emitter-Basis-Diode wird in Durchlassrichtung gepolt
  - ⇨ Die meisten der Elektronen fließen jedoch nicht über die Basis ab, sondern werden vom Kollektor aufgenommen (starkes elektrisches Feld)
  - ⇨ Es fließt nur ein kleiner Basisstrom





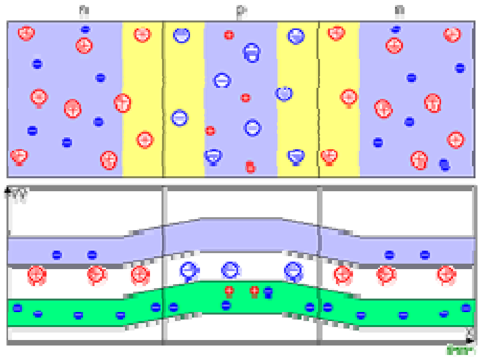


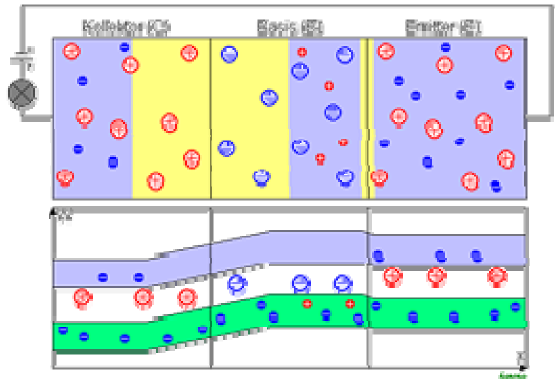


Der Transistoreffekt

- **Hier Prinzip**
  - ⇨ **Achtung Größenverhältnisse Basis-Kollektor-Emitter nicht richtig dargestellt!**

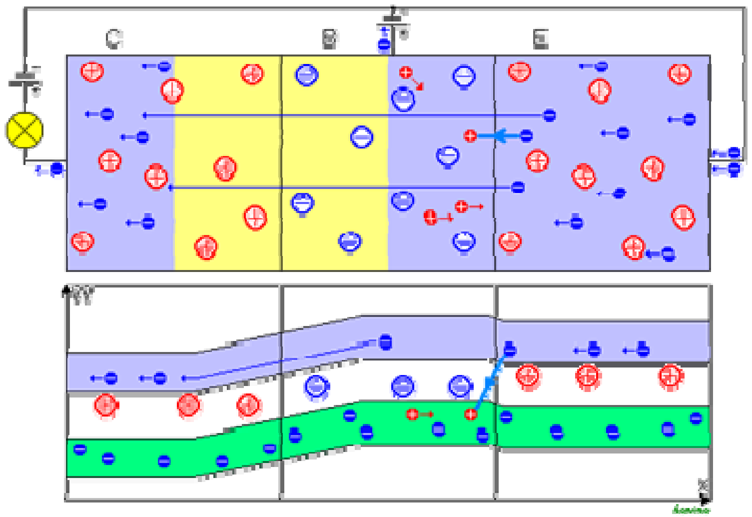
In Ruhe

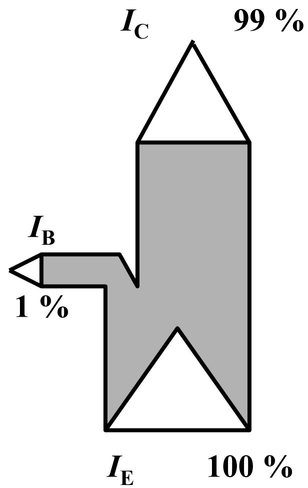




Mit U_{CE}

Mit U_{CE} und U_{BE}





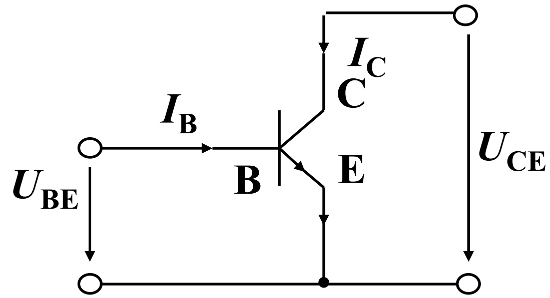
Der Transistoreffekt

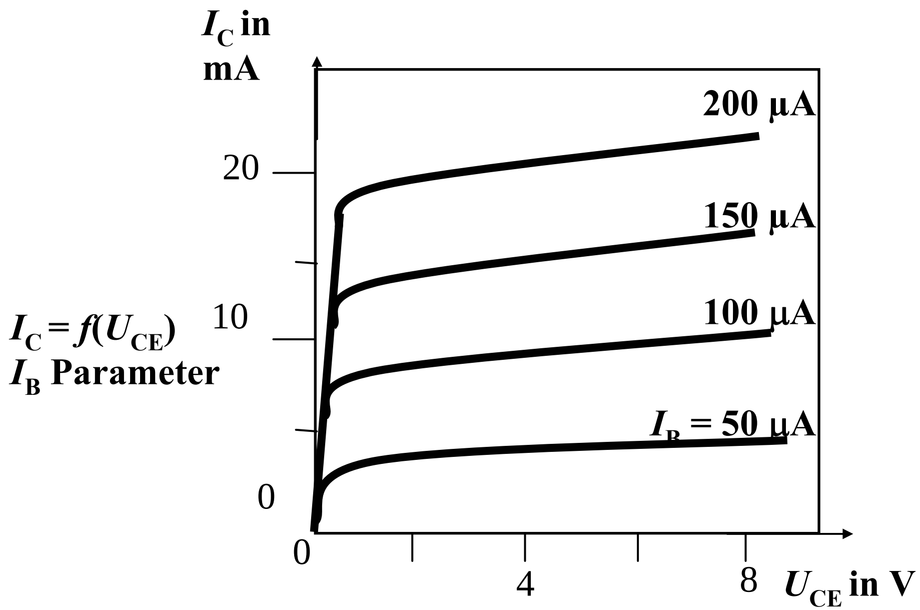
- Erhöht man die Spannung an der Basis, so bleibt der Basisstrom relativ klein, der Kollektorstrom wächst hingegen relativ stark
  - ⇨ Der Transistor ist ein stromgesteuerter Widerstand
- Stromverstärkung

$$\beta = \frac{I_C}{I_B}$$

- Der Basisstrom steuert den Kollektorstrom

$$I_B \cdot \beta = I_C$$



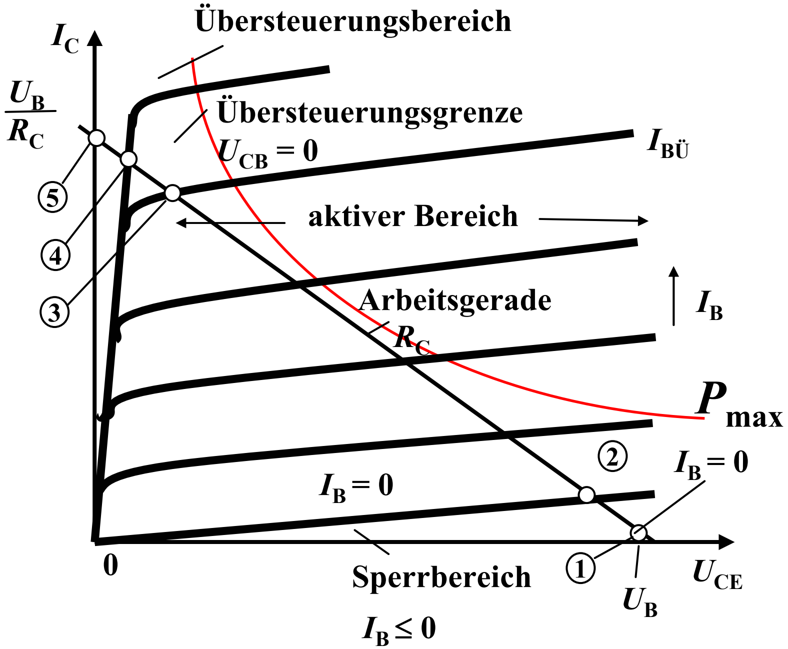


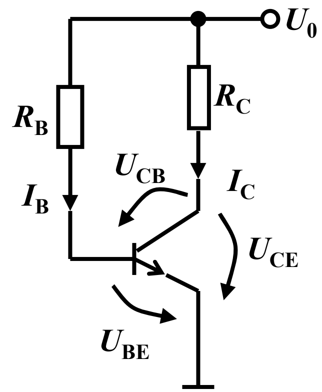
Bemerkung: Da nicht überall das „β“ gekannt wird, wird die Stromverstärkung oft auch B genannt.

Ausgangskennlinien (Stromsteuerung)

Arbeitspunkt

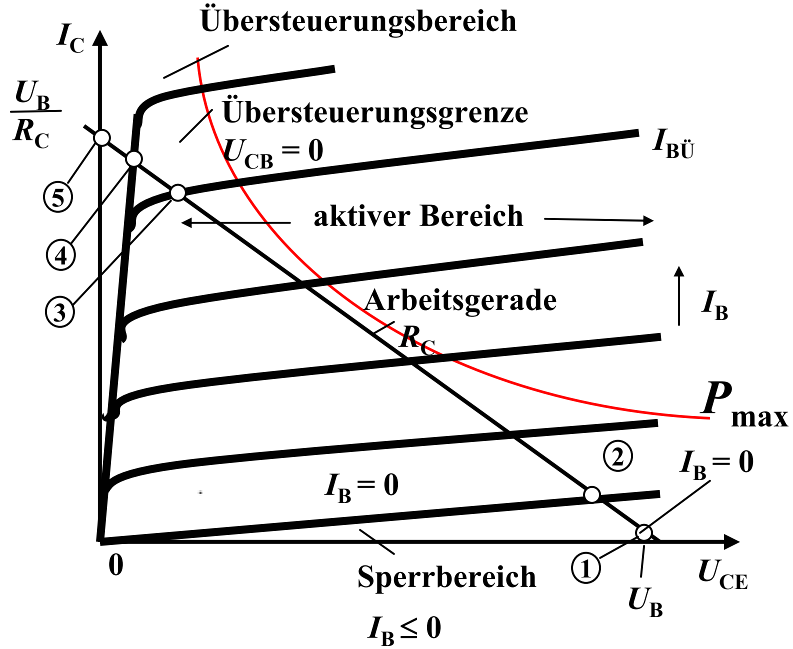
- Die Arbeitspunkte können sich nur entlang der Arbeitsgeraden verschieben
- Sperrbereich
  - ⇨ AP 1 bis AP 2
  - ⇨ $I_B = 0, U_{CE} \approx U_B, I_C \approx 0$
  - ⇨ Schalter aus
- Aktiver Bereich
  - ⇨ AP 2 bis AP 3
  - ⇨ Transistor als Verstärker
- Sättigungsbereich
  - ⇨ Übersteuerung
  - ⇨ AP 3 bis AP 4
  - ⇨ $I_C \approx U_B/R_C$
  - ⇨ Schalter ein

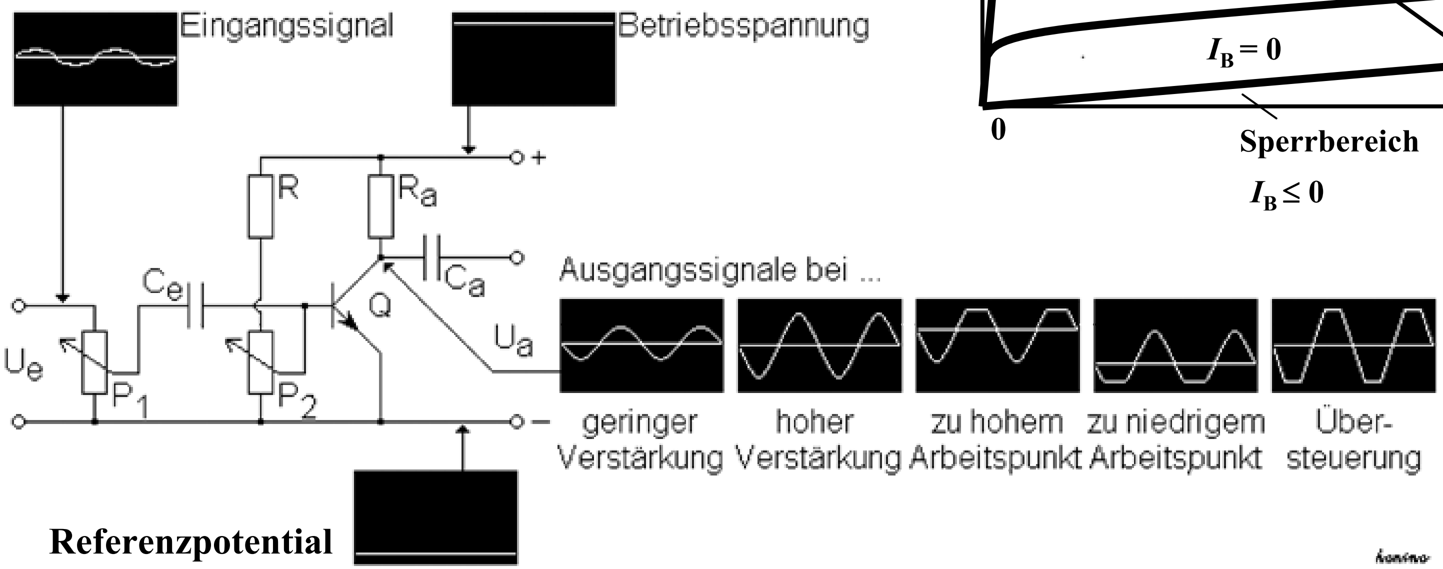




M.Bogdan

Arbeitspunkt



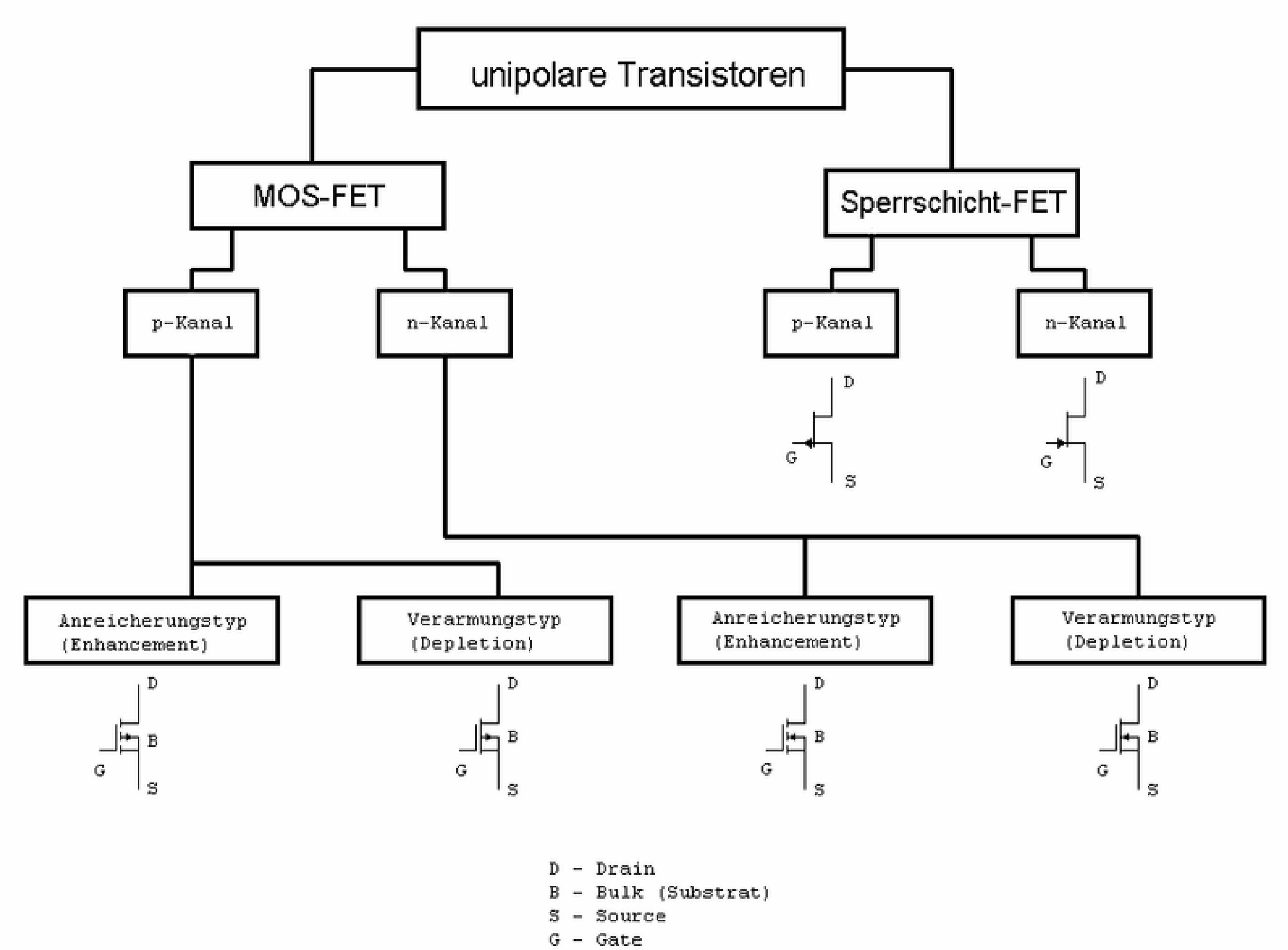


3.3 Unipolare Transistoren

- **Im Gegensatz zum bipolaren Transistoren wird bei unipolaren Transistoren der Strom durch eine Spannung gesteuert**
  - ⇨ **Elektrisches Feld**
  - ⇨ **Feldeffekt-Transistor (FET)**
  - ⇨ **Spannungsgesteuerter Widerstand**
- **Isolierschicht-FET**
  - ⇨ **Isolation des Gates durch Isolator (Siliziumoxid, SiO_2)**
  - ⇨ **Beeinflussung der Leitfähigkeit durch Influenz**
- **Anschlüsse**
  - ⇨ **Source S (Quelle)**
  - ⇨ **Drain D (Senke)**
  - ⇨ **Gate G (Tor)**

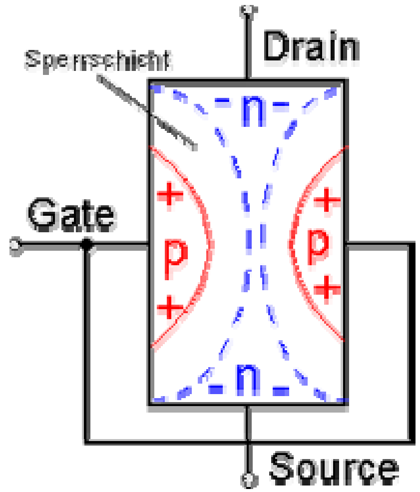
3.3 Unipolare Transistoren

❍ Übersicht wichtiger Typen



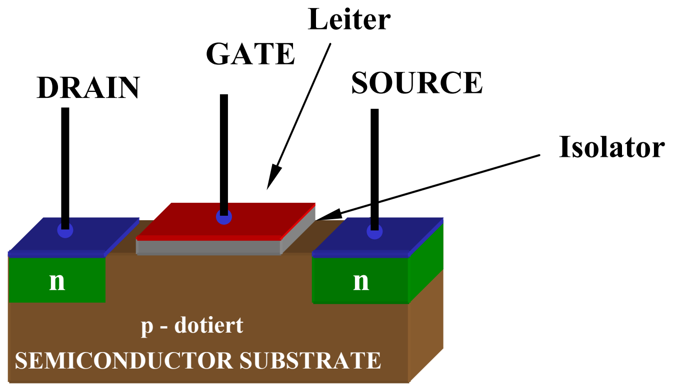
3.3 Unipolare Transistoren

- **Sperrschicht-Feldeffekttransistor (JFET Junction-FET)**
  - **Hier: N-Kanal**
  - **N-Kanal dieses Fet ist der leitende Bereich**
  - **Stromfluß durch Vorspannung am Gate gesteuert**
  - **Erhöhung negative Gate-Spannung hat Ausdehnung der Sperrschicht (Raumladungszone) zur Folge**
    - **Strom von Drain nach Source verringert sich**

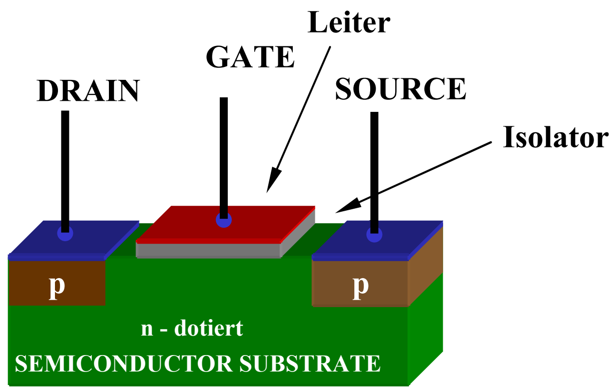


Isolierschicht-FET (MOS-FET)

- Gate-Elektrode ist durch eine dünne Oxidschicht getrennt
  - ⇨ MOS: Metal Oxide Semiconductor
- n-MOS
  - ⇨ Das gesteuerte Halbleiter-Substrat ist p-dotiert
  - ⇨ Die Anschlüsse sind stark n-dotiert
  - ⇨ n-Kanal-MOS-FET
- p-MOS
  - ⇨ Der gesteuerte Halbleiter-Substrat ist n-dotiert
  - ⇨ Die Anschlüsse sind stark p-dotiert
  - ⇨ p-Kanal-MOS-FET
- Da die n-Zonen (p-Zonen) weit auseinanderliegen, kommt es nicht zum Transistoreffekt



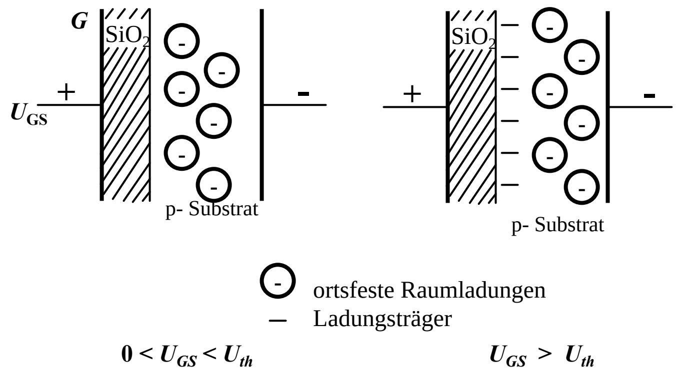
n - TRANSISTOR

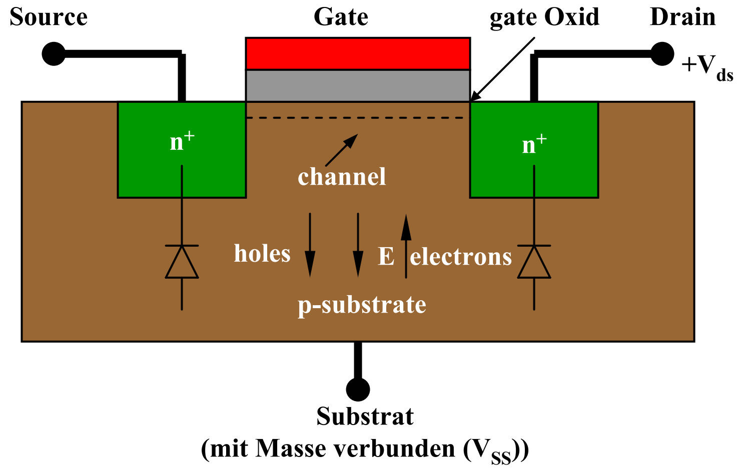


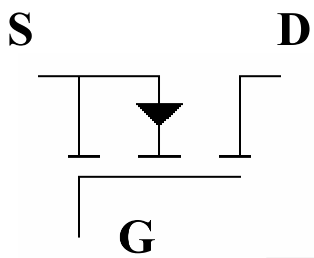
p - TRANSISTOR

Der NMOS-Transistor

- Anreicherungstyp
  - enhancement
  - selbstsperrend
- Funktionsweise
  - Unter der Oxidschicht werden durch Influenz Ladungsträger angesammelt
  - Die Raumladungen (Löcher) werden zurückgedrängt
  - Es bildet sich ein n-Kanal
  - Die Dicke des Kanals hängt von U_{GS} ab
- Source ist mit dem Substrat verbunden
- Der NMOS-Transistor leitet, wenn U_{GS} positiv ist
  - Am Gate liegt dann eine positive Spannung gegenüber Source an
- Der NMOS-Transistor sperrt, wenn U_{GS} nahe 0V oder negativ ist

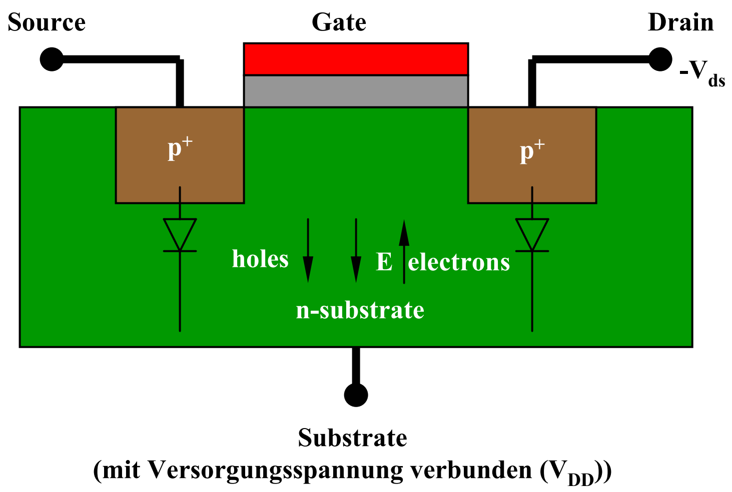


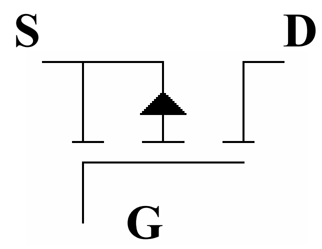




Der PMOS-Transistor

- Alle Dotierungen sind umgekehrt
- Funktionsweise
  - ⇨ Wie bei n-MOS Transistor
  - ⇨ Statt Ladungsträger werden Löcher unter der Oxidschicht durch Influenz angesammelt
  - ⇨ Es bildet sich ein leitender p-Kanal
- Der PMOS-Transistor leitet, wenn U_{GS} negativ ist
  - ⇨ Am Gate liegt dann eine negative Spannung gegenüber Source an
- Der PMOS-Transistor sperrt, wenn U_{GS} nahe 0V oder positiv ist

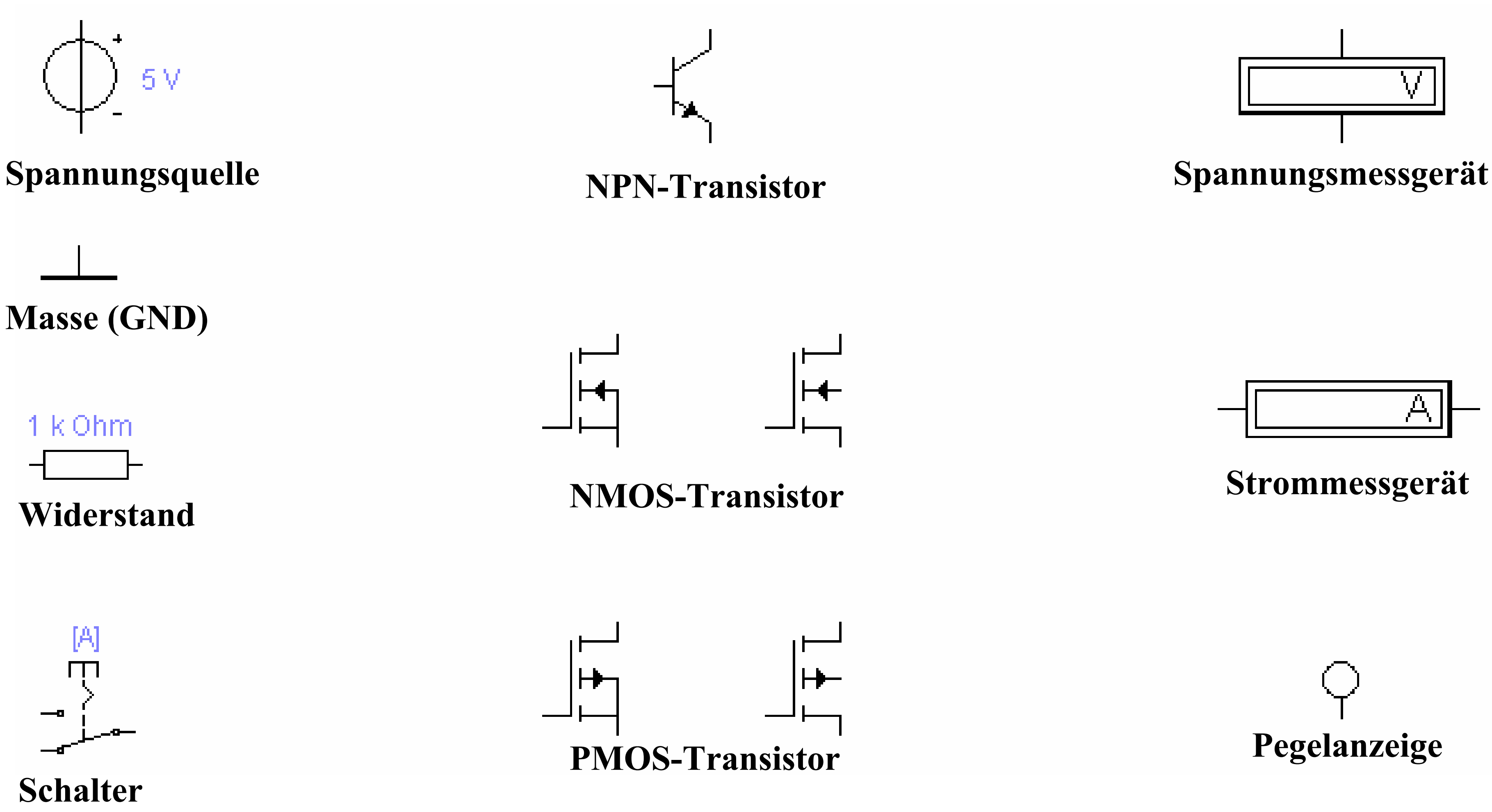




4 Der Transistor als Schalter

- **Elektronische Verknüpfungsglieder werden aus Halbleiterbauelementen aufgebaut**
  - ⇨ **Binäre Schaltvariablen werden nach den Gesetzen der Schaltalgebra miteinander verknüpft**
  - ⇨ **Werte entsprechen der Zweiwertigkeit von Schalterzuständen**
- **Im Folgenden gilt:**
  - ⇨ **„Ein“ entspricht „1“, 5 V, POWER oder VDD**
  - ⇨ **„Aus“ entspricht „0“, 0 V, GROUND oder VSS**
- **Verknüpfungsglieder werden zu komplexen Schaltnetzen und Schaltwerken zusammengefasst**
  - ⇨ **Die Schaltglieder müssen die gleichen Signalpegel besitzen**

Schaltzeichen nach DIN



Idealer Schalter

- Annahme: der Verknüpfungsvorgang
  - erfordert keine Leistung
  - benötigt keine Zeit
  - Im Schalter fällt keine Spannung ab
- Im Schalterzustand „Ein“

$$R_i = 0$$

$$I = \frac{U_B}{R}$$

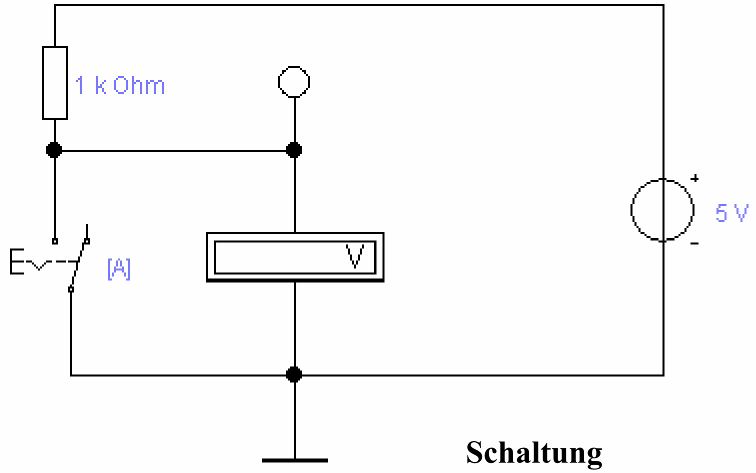
$$U_Q = 0$$

- Im Schalterzustand „Aus“

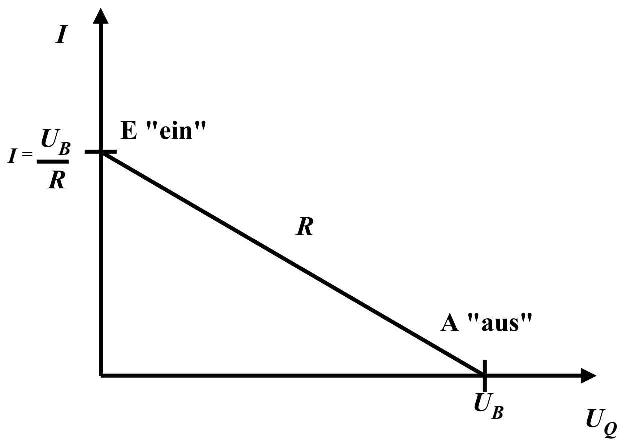
$$R_S = \infty$$

$$I = 0$$

$$U_Q = U_B$$



Schaltung



Kennlinie

M.Bogdan

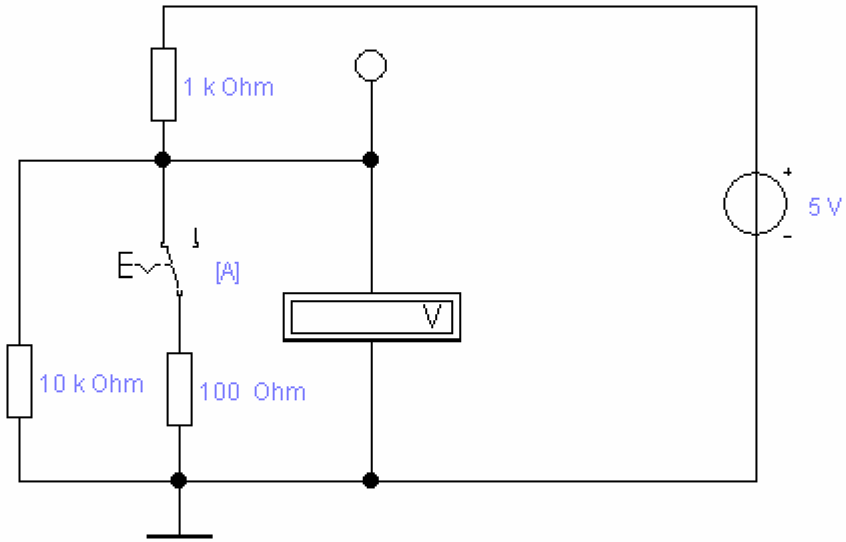
Realer Schalter

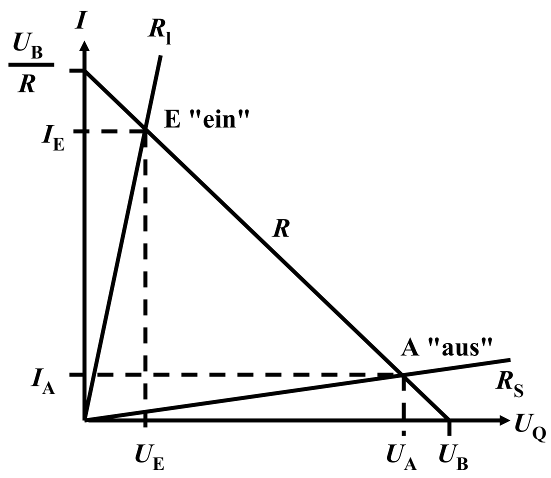
- R_i kann nicht 0 sein
- R_S kann nicht unendlich werden
  - ⇨ in der Praxis versucht man, R_i möglichst klein und R_S möglichst groß zu machen
- Im Schalterzustand „Ein“

$$I_E = \frac{U_B}{R + R_i}; U_E = \frac{U_B \cdot R_i}{R + R_i}$$

- Im Schalterzustand „Aus“

$$I_A = \frac{U_B}{R + R_S}; U_A = \frac{U_B \cdot R_S}{R + R_S}$$

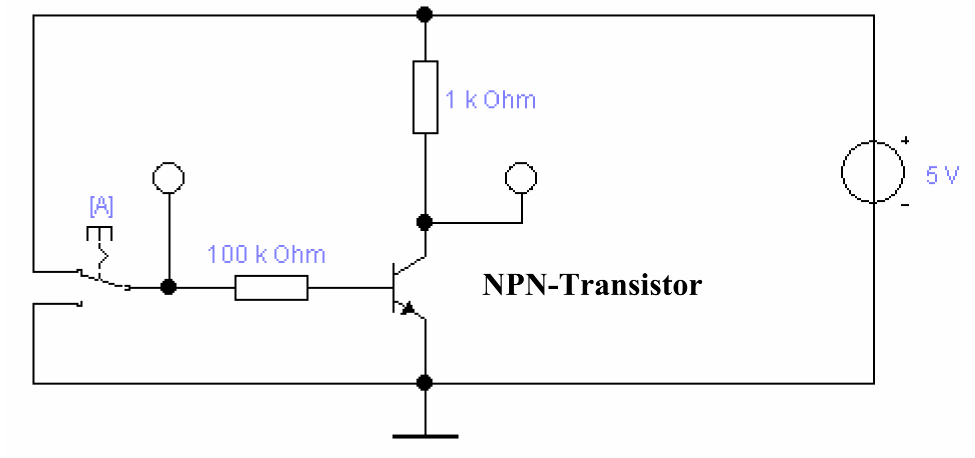


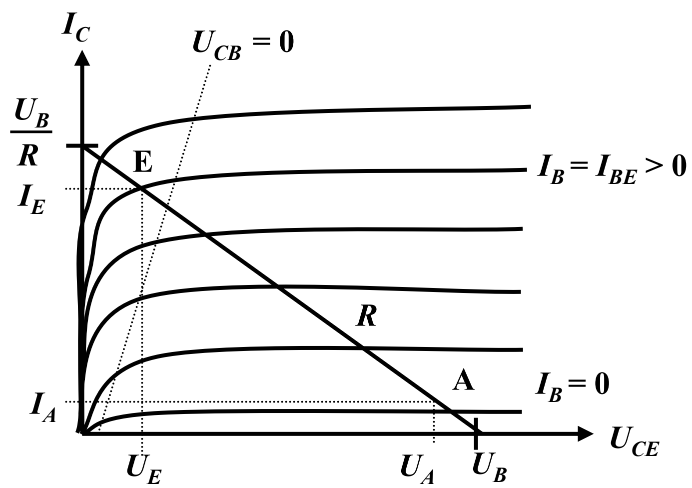


Kennlinie

Bipolarer Transistor als Schalter

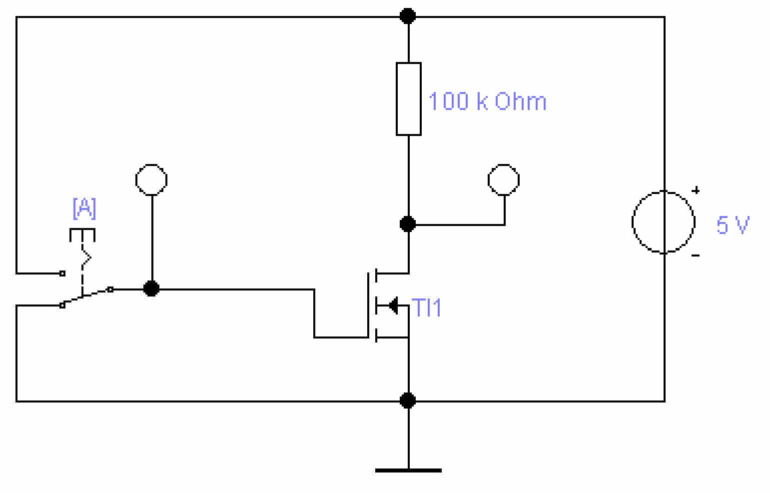
- **Schaltvorgang wird durch den Basisstrom I_B gesteuert**
  - ⇨ **Schalter Ein: Transistor leitet**
  - ⇨ **Schalter Aus: Transistor sperrt**
- **Die Arbeitspunkte werden so berechnet, dass sich der Transistor im Übersteuerungsbereich befindet**

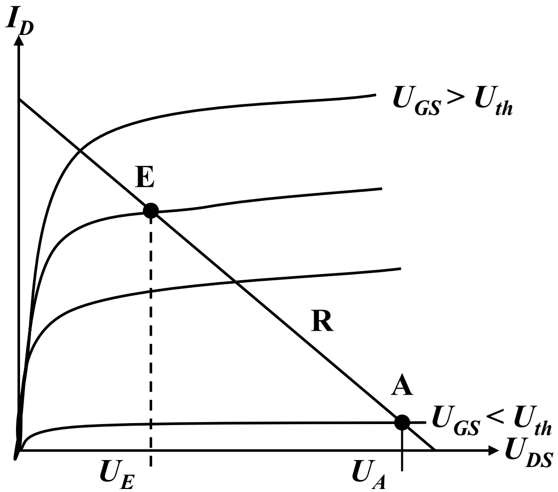




Der NMOS-Transistor als Schalter

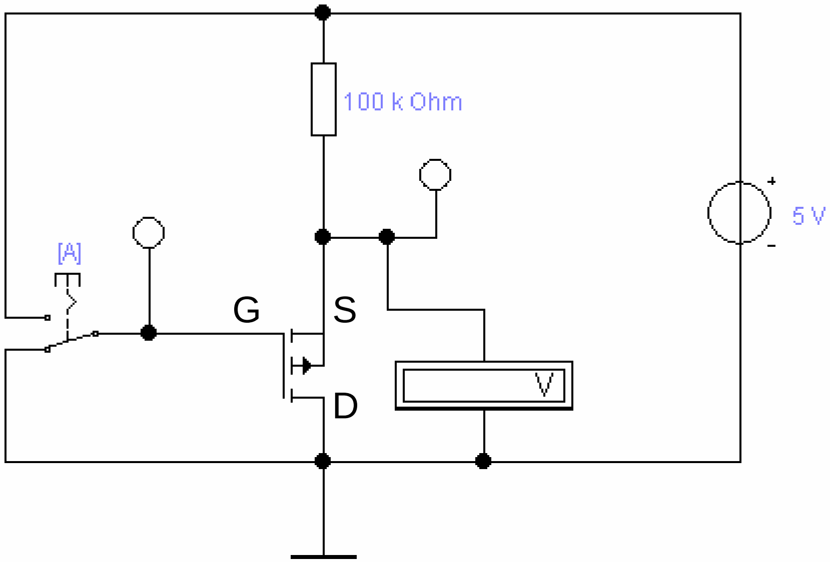
- NMOS Transistoren leiten wenn U_{GS} positiv ist
  - ⇨ Verwendung wie bei Bipolar-Transistore
- Der Substrat-Anschluss (Bulk) muss „negativer“ sein als das Gate
  - ⇨ Häufig zusätzliche negative Spannung (-5V)





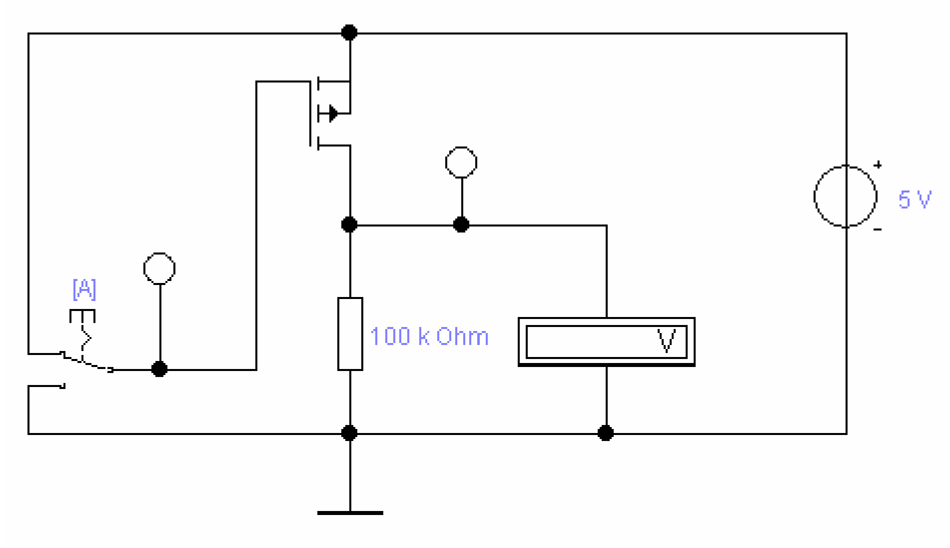
Der PMOS-Transistor als Schalter

- PMOS Transistoren leiten wenn U_{GS} negativ ist
  - ⇨ Der Gate-Anschluss liegt auf 0 V (Masse)
  - ⇨ Die Spannung U_{GD} ist hoch (ca. 1,7 V)
  - ⇨ Der p-MOS-Transistor leitet schlecht, da der Spannungsunterschied zwischen Gate und Source (U_{GS}) gering ist

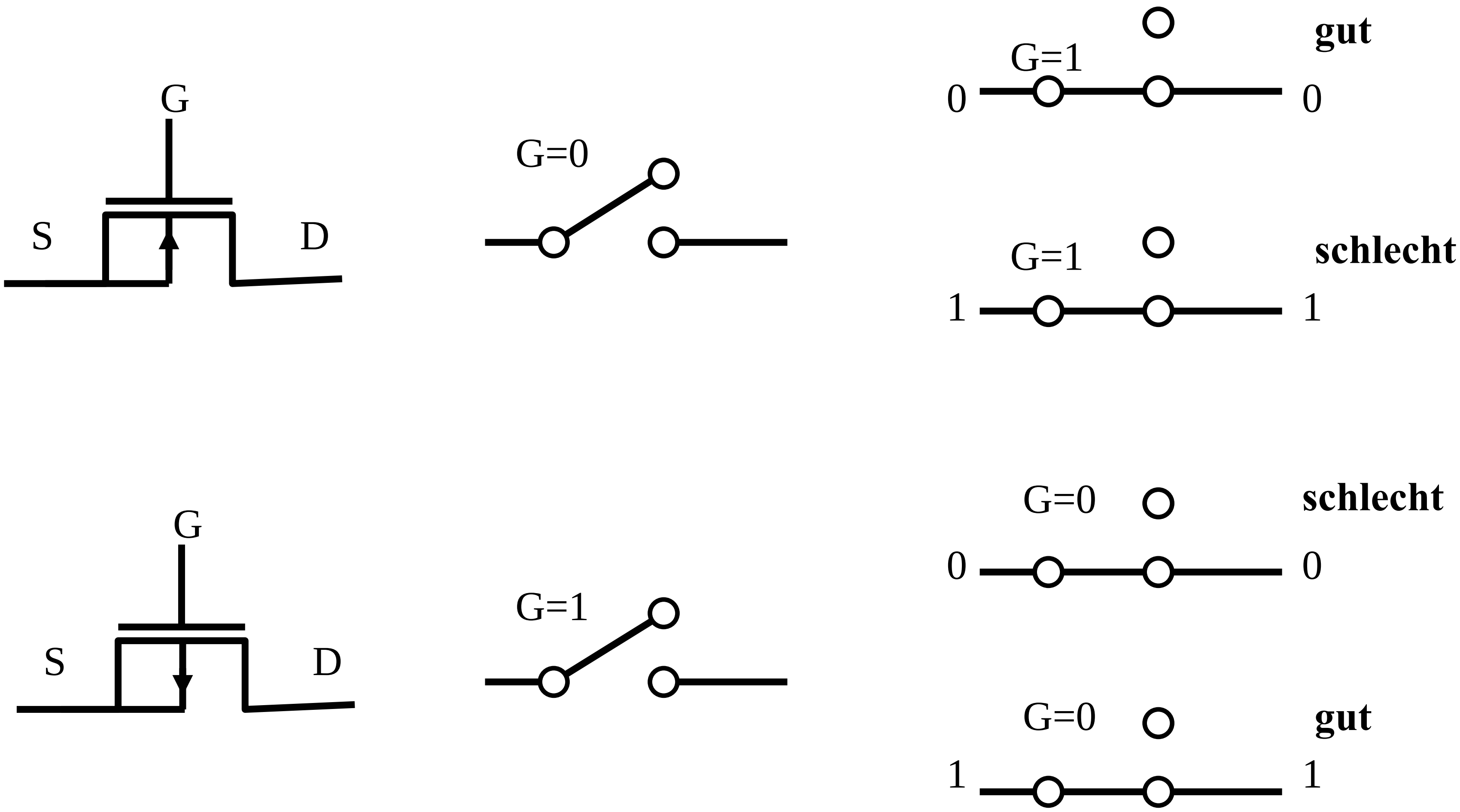


Der PMOS-Transistor als Schalter

- **Besserer Einsatz des PMOS-Transistors**
  - **Der Transistor leitet gut, da der Spannungsunterschied zwischen Gate und Source (U_{GS}) mit 5V hoch ist**

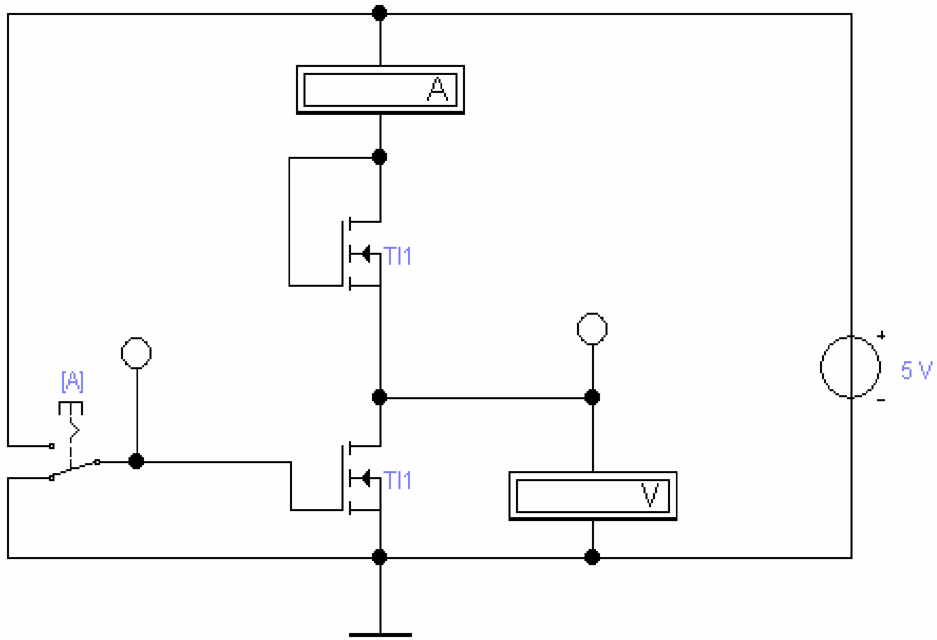


Übersicht: MOS-Transistoren als Schalter



Integrierte Widerstände

- In integrierten Schaltkreisen benötigen Widerstände zu viel Platz
  - ⇨ Der Gate-Widerstand kann ersatzlos entfallen, da das Gate isoliert ist und daher kein Strom fließt
  - ⇨ Die Drain-Widerstände können durch schlecht leitende NMOS- bzw. PMOS-Transistoren ersetzt werden
  - ⇨ Transistoren lassen sich kleiner bauen als integrierte Widerstände
- Nachteile:
  - ⇨ Die Versorgungsspannung und der 0-Pegel werden am Ausgang nicht mehr erreicht
  - ⇨ Schaltungen können so nicht miteinander verbunden werden

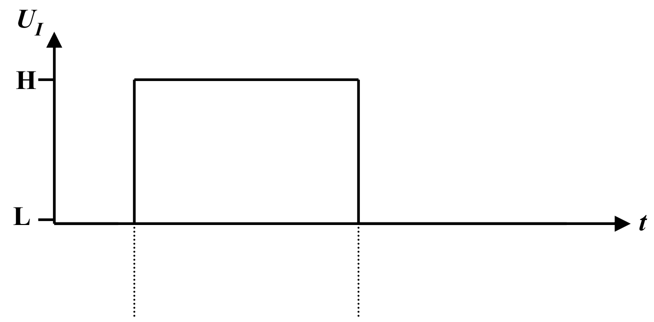


Kenngrößen: Signalpegel

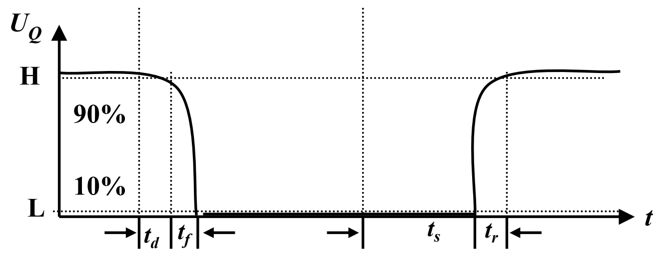
- **Die Signale nehmen nie genau GND oder die Versorgungsspannung an**
  - **Ein Transistor ist kein idealer Schalter**
  - **Übersprechen zwischen benachbarten Leitungen**
  - **Der Eingang des nachfolgenden Transistors hat Auswirkungen auf den vorgehenden**
- **Solche Signale nennt man Störspannungen**
- **Zur Eliminierung der Störspannungen definiert man Pegel**
  - **High: die Spannung ist hoch**
  - **Low: die Spannung ist nieder**
- **Die Pegel werden willkürlich logischen Werten zugeordnet**
  - **High ist logisch „1“**
  - **Low ist logisch „0“**
  - **bei negativer Logik sind diese Pegel umgekehrt**

Kenngrößen: Signalübergangszeit und -laufzeit

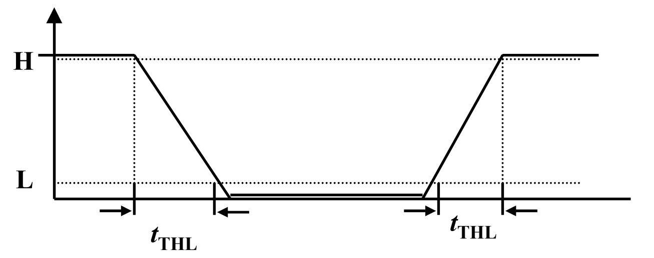
- Signalübergangszeit
  - ⇨ Flankensteilheit
  - ⇨ Übergang von „H“ nach „L“ oder „L“ nach „H“
- Signallaufzeit
  - ⇨ Zeit die ein Signalimpuls vom Eingang der Schaltung bis zum Ausgang benötigt



idealer Rechteckimpuls am Eingang

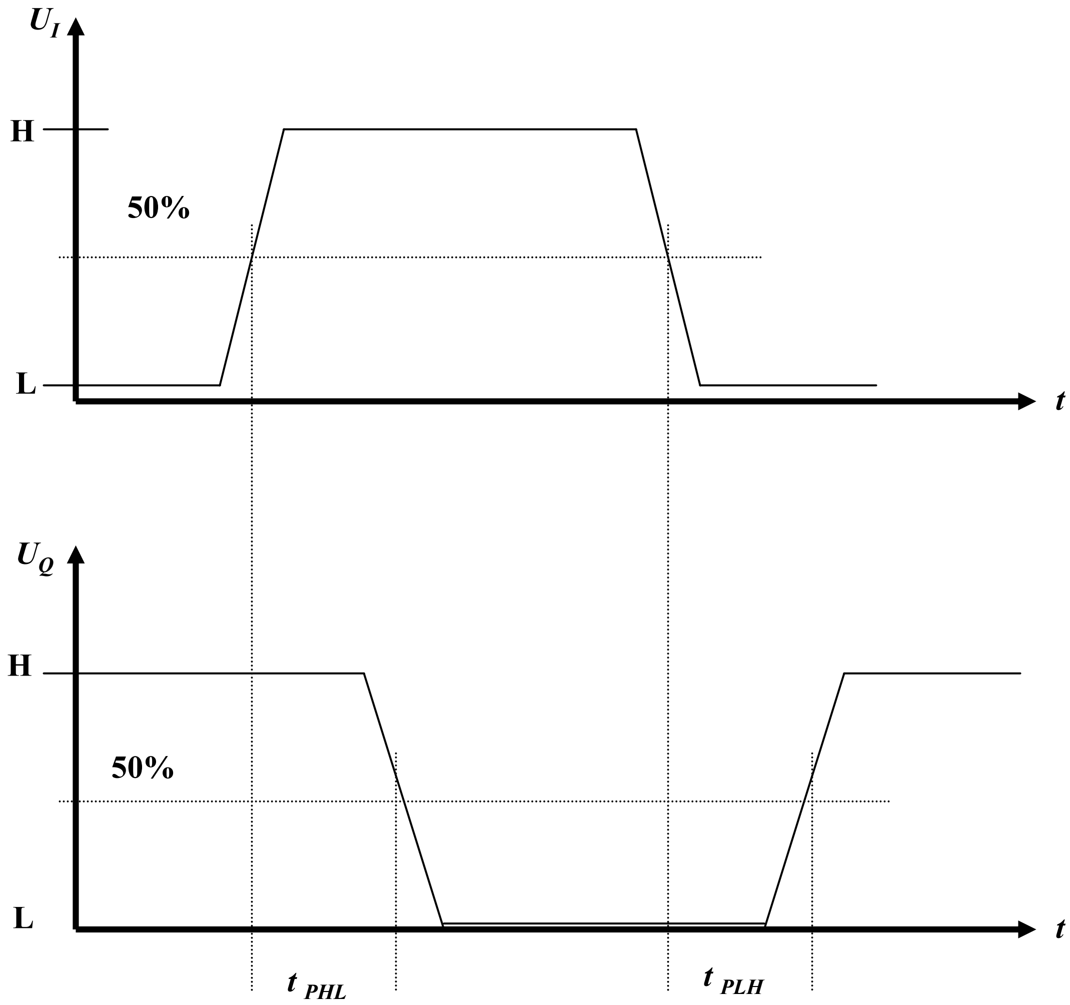


verformter Rechteckimpuls am Ausgang



linearisierter Ausgangsimpuls

Schaltvorgang eines Inverters

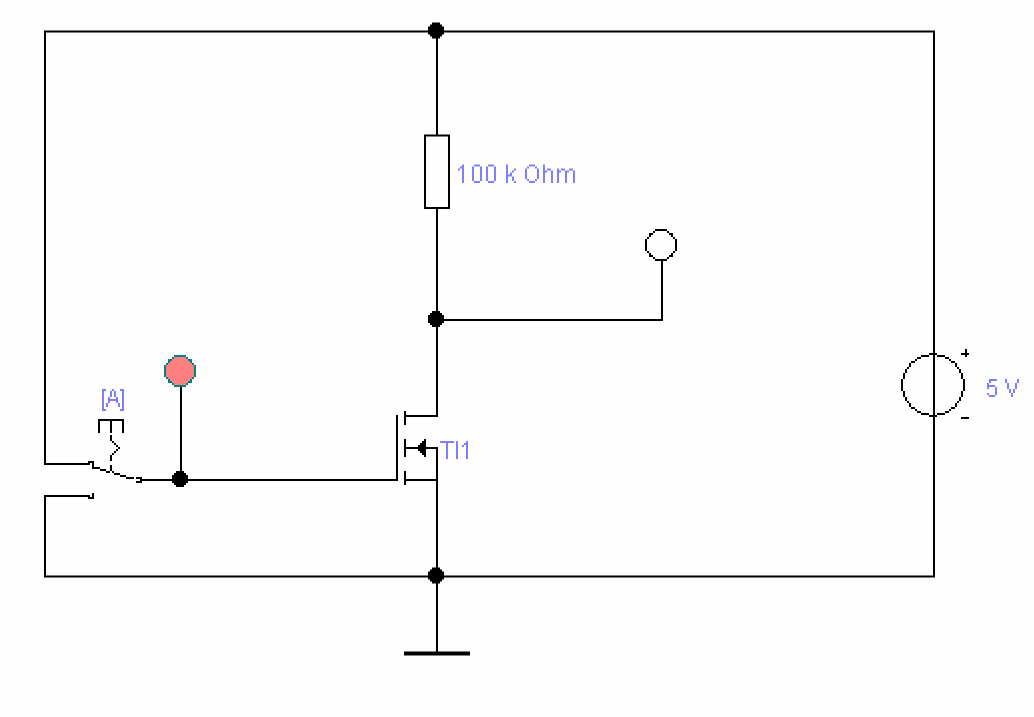


5 Logische Schaltglieder

- Komplexe Schaltungen werden aus einfachen logischen Gattern aufgebaut
- Man benötigt logische Grundfunktionen
  - ⇨ UND, ODER, NICHT
- Logische Gatter werden später als atomare Bausteine in der Digitaltechnik betrachtet
  - ⇨ In diesem und im nächsten Kapitel steht der innere Aufbau im Vordergrund
- Die Eingangssignalpegel der Gatter müssen zu den Ausgangssignalpegeln kompatibel sein
  - ⇨ Leitungen verbinden die Ausgänge eines Gatters mit nachfolgenden Gattern

NICHT-Gatter

- Der Wert des Eingangs wird negiert

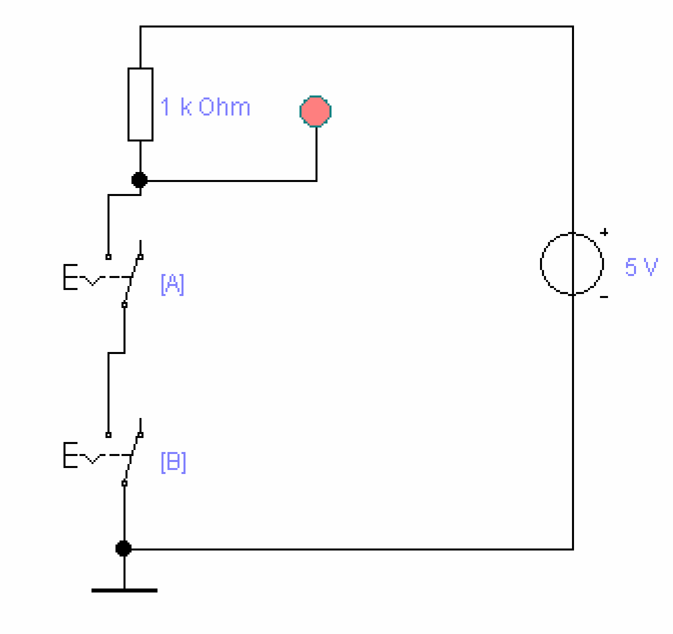


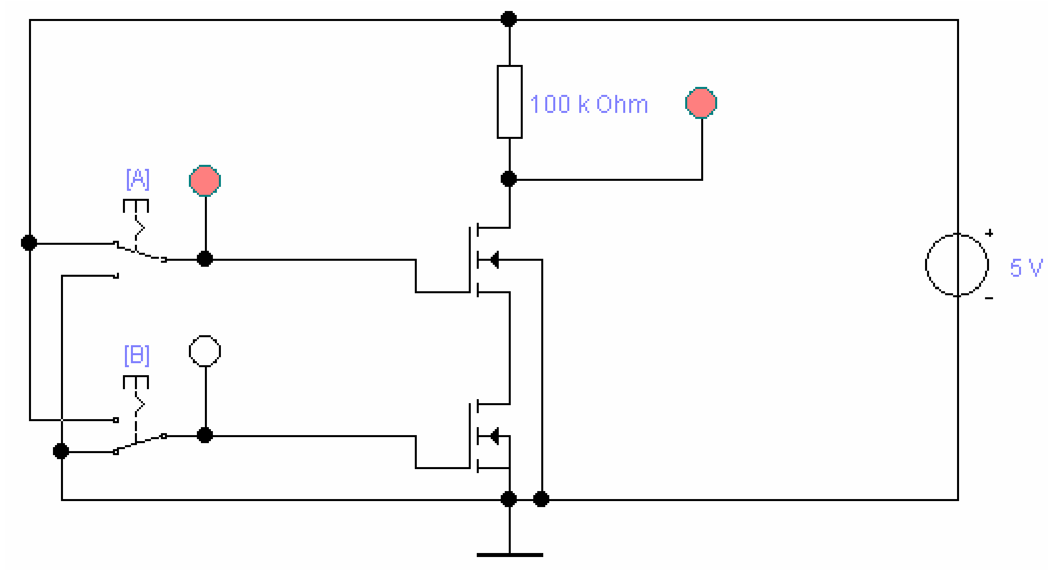
Wertetabelle

A	Y
0	1
1	0

NAND-Gatter

- Reihenschaltung zweier Schalter/Transistoren





NAND-Verknüpfung mit Schaltern

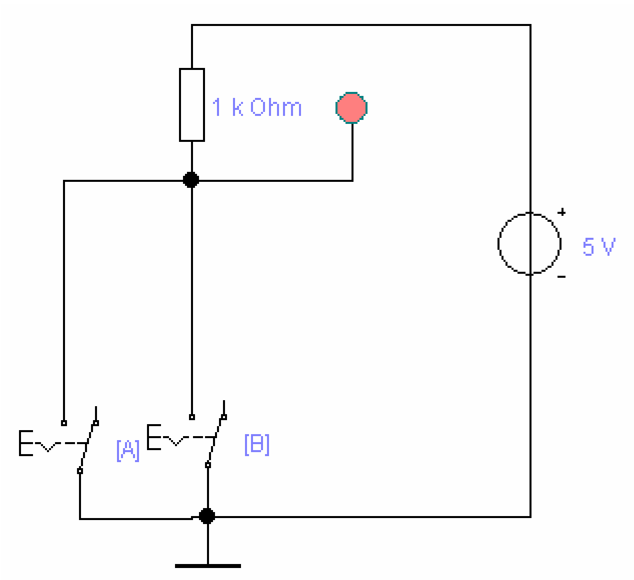
Wertetabelle

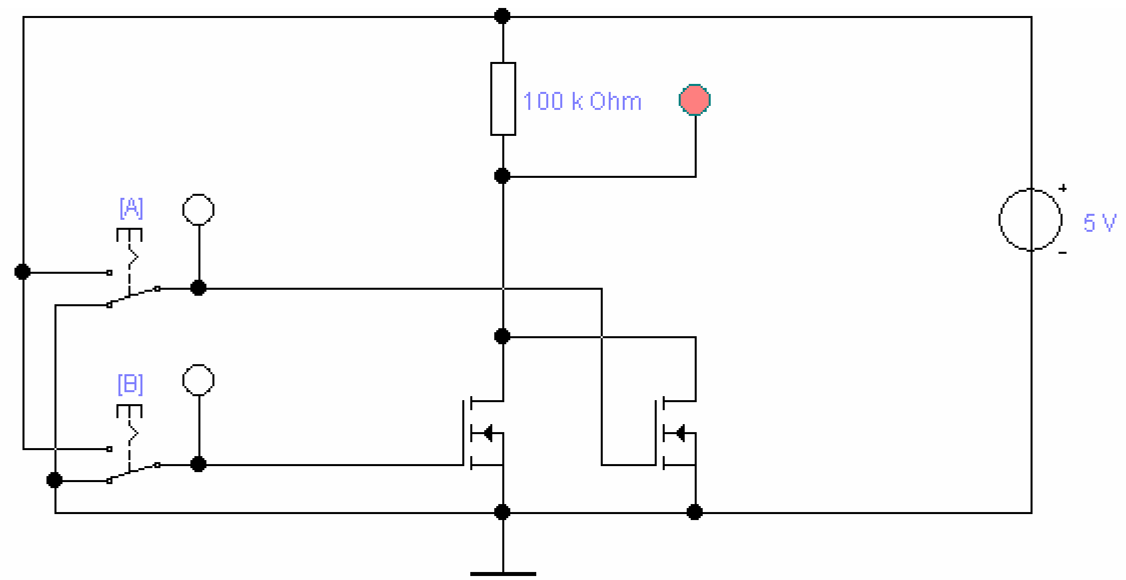
B	A	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NAND-Verknüpfung mit NMOS-Transistoren

NOR-Gatter

- Parallelschaltung zweier Schalter/Transistoren





NOR-Verknüpfung mit Schaltern

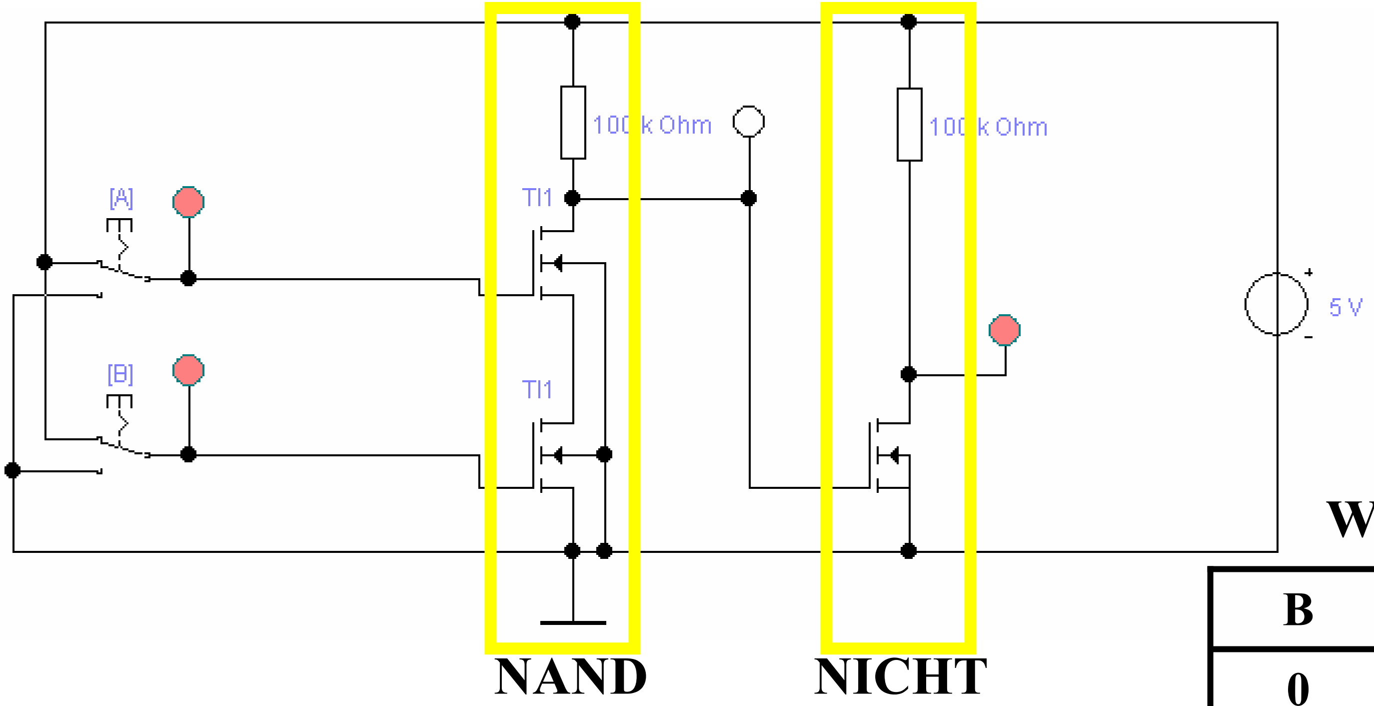
Wertetabelle

B	A	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

NOR-Verknüpfung mit NMOS-Transistoren

UND-Gatter

- Verknüpfung aus NAND und NICHT
  - ⇨ NMOS-Transistorschaltbild

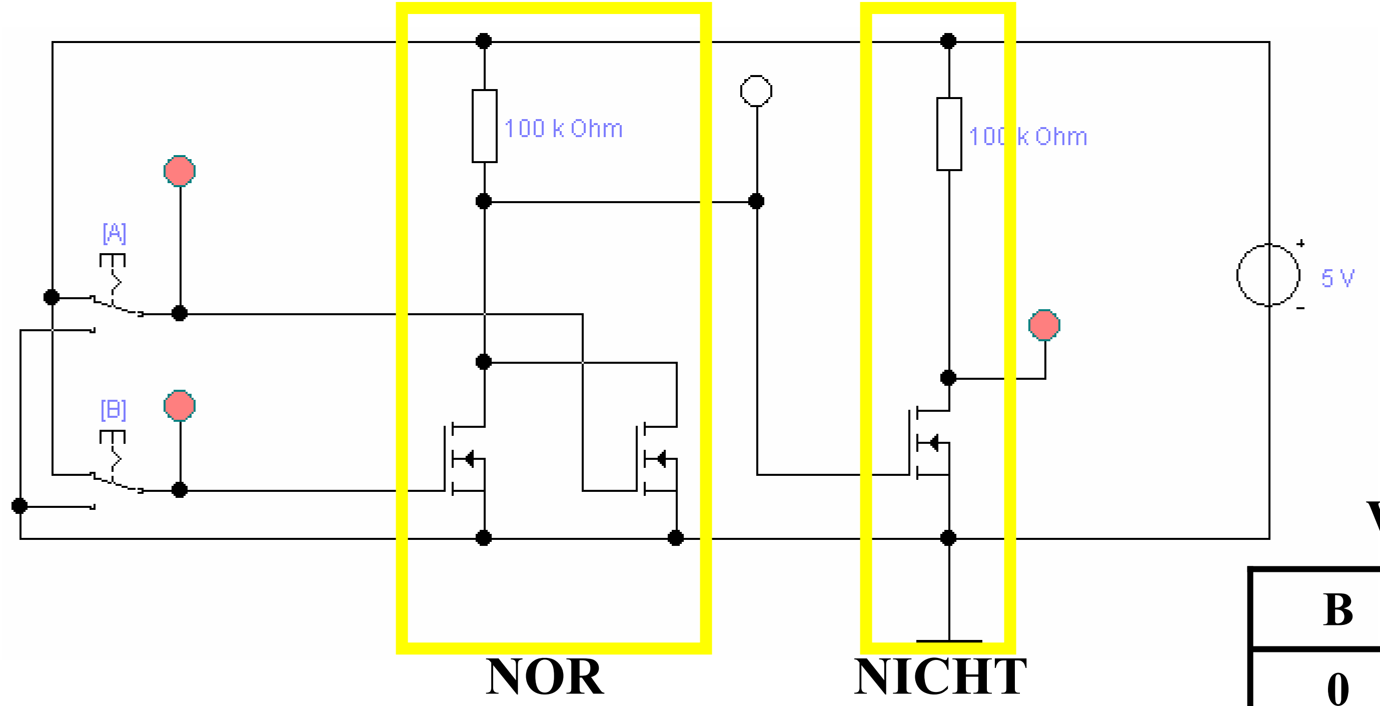


Wertetabelle

B	A	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ODER-Gatter

- Verknüpfung aus NOR und NICHT
  - ⇨ NMOS-Transistorschaltbild



Wertetabelle

B	A	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Vollständige Gruppen

- **Eine Gruppe von Gattern, die alle Boole'schen Verknüpfungen realisieren, nennt man vollständig**

  - ⇨ **$NAND_2$**

  - ⇨ **NOR_2**

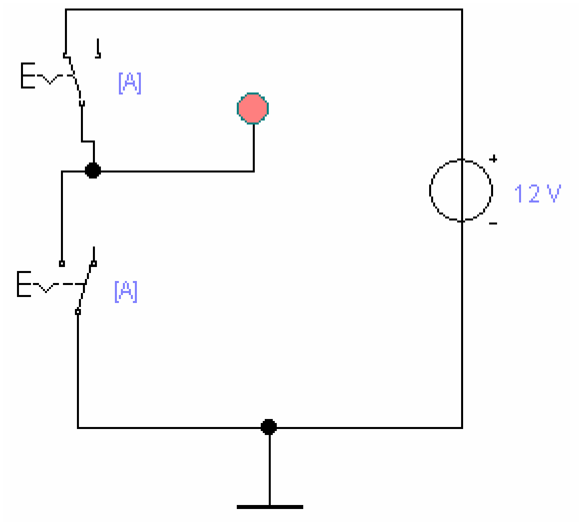
  - ⇨ **AND_2, OR_2, NOT**

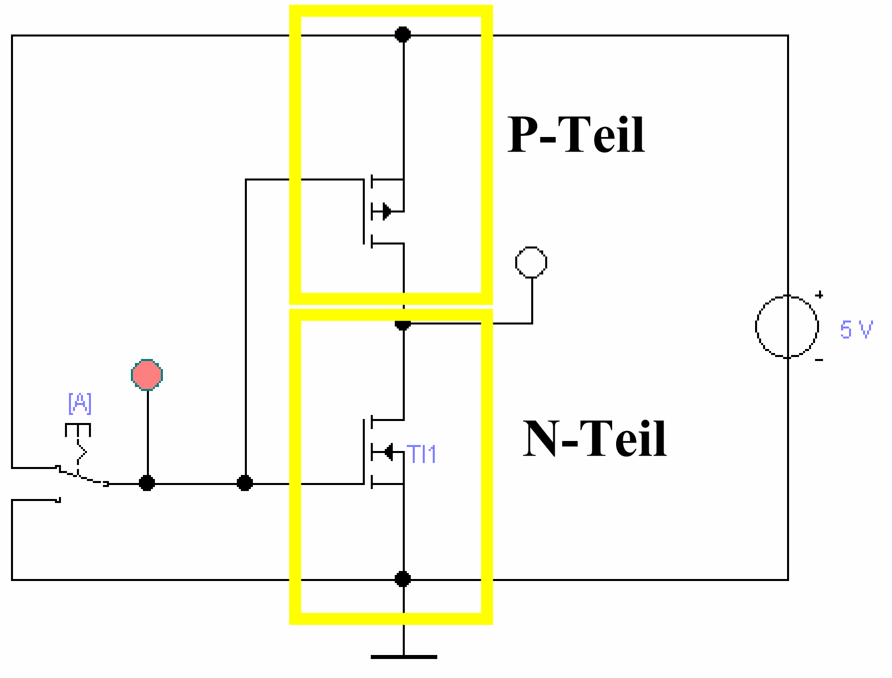
Indizes: Anzahl der Eingänge

6 Logische Schaltungen in CMOS-Technik

- Heute werden fast alle logischen Bauelemente in CMOS-Technik hergestellt
  - ⇨ CMOS: Complementary MOS
- Prinzip
  - ⇨ Widerstand wird durch einen geschalteten PMOS-Transistor ersetzt
  - ⇨ PMOS-Transistoren schalten komplementär zu NMOS-Transistoren
    - Der pMOS-Transistor leitet, wenn eine „0“anliegt und sperrt bei einer „1“
    - Der nMOS-Transistor sperrt, wenn eine „0“ anliegt und leitet bei einer „1“
    - NMOS-Transistoren leiten die „0“ gut
    - NMOS-Transistoren werden mit der Masse (GND) verbunden
    - PMOS-Transistoren leiten die „1“ gut
    - PMOS-Transistoren werden mit der Spannungsversorgung verbunden
  - ⇨ Auf jedem Pfad zwischen VDD und GND ist mindestens ein Transistor gesperrt
- Vorteil
  - ⇨ Keine Widerstände
  - ⇨ Es fließt nur ein geringer Strom
- Nachteil
  - ⇨ Schwierigere Herstellung, da NMOS- und PMOS Transistoren auf dem selben Substrat integriert werden müssen

CMOS NICHT-Gatter



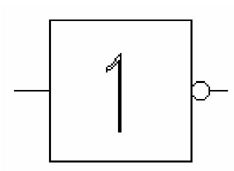


CMOS NICHT-Verknüpfung mit Schaltern
(Beide Schalter werden mit dem gleichen Eingangssignal Gesteuert)

CMOS NICHT-Verknüpfung mit MOS-Transistoren

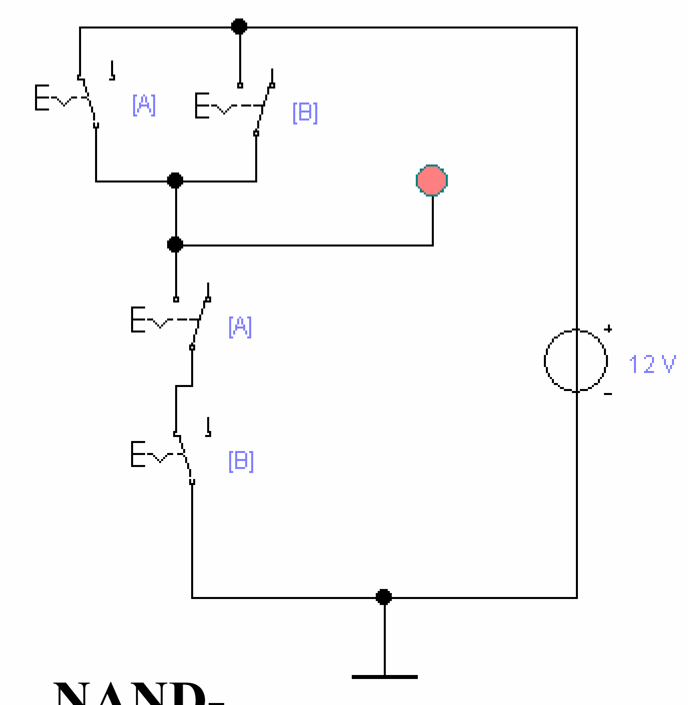
Wertetabelle

A	Y
0	1
1	0

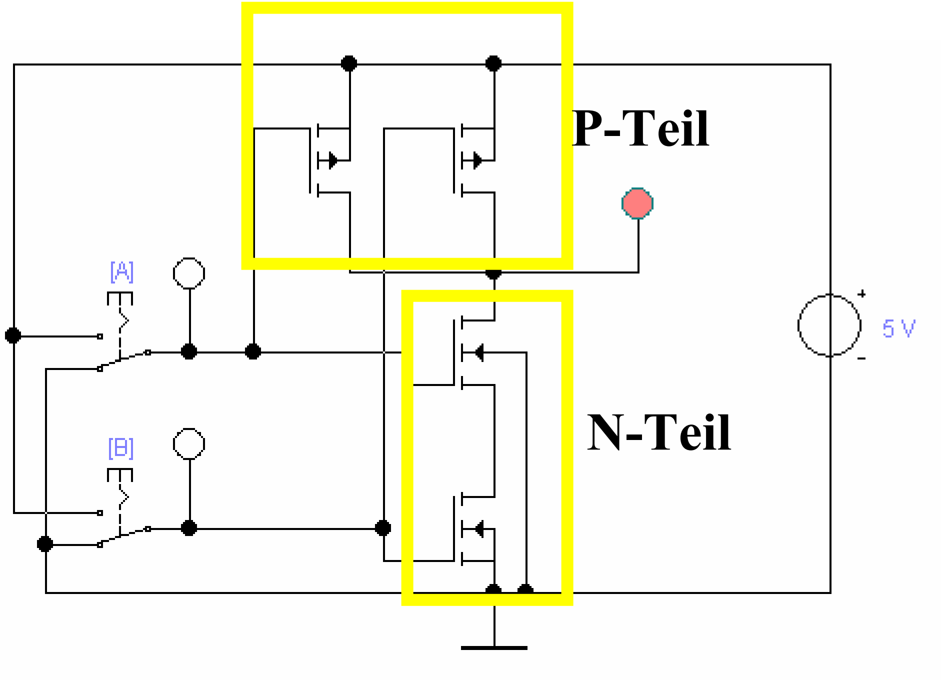


Schaltzeichen

CMOS NAND-Gatter



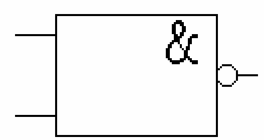
NAND-Verknüpfung mit Schaltern



NAND-Verknüpfung mit MOS-Transistoren

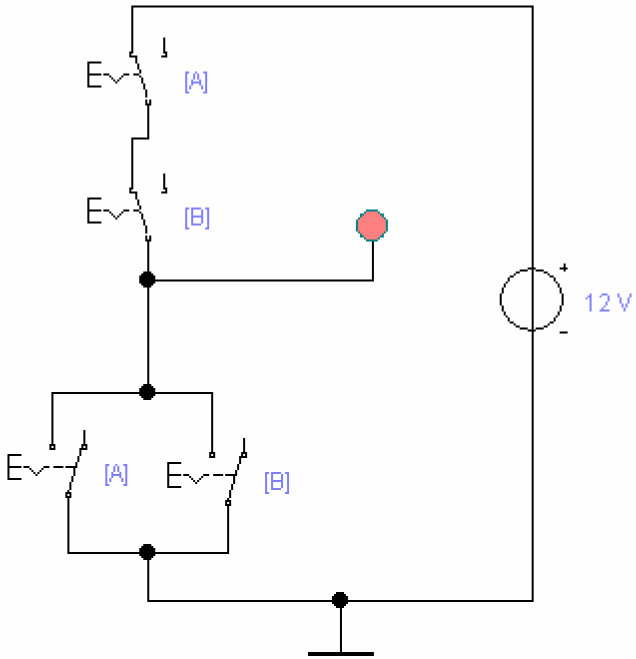
Wertetabelle

B	A	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

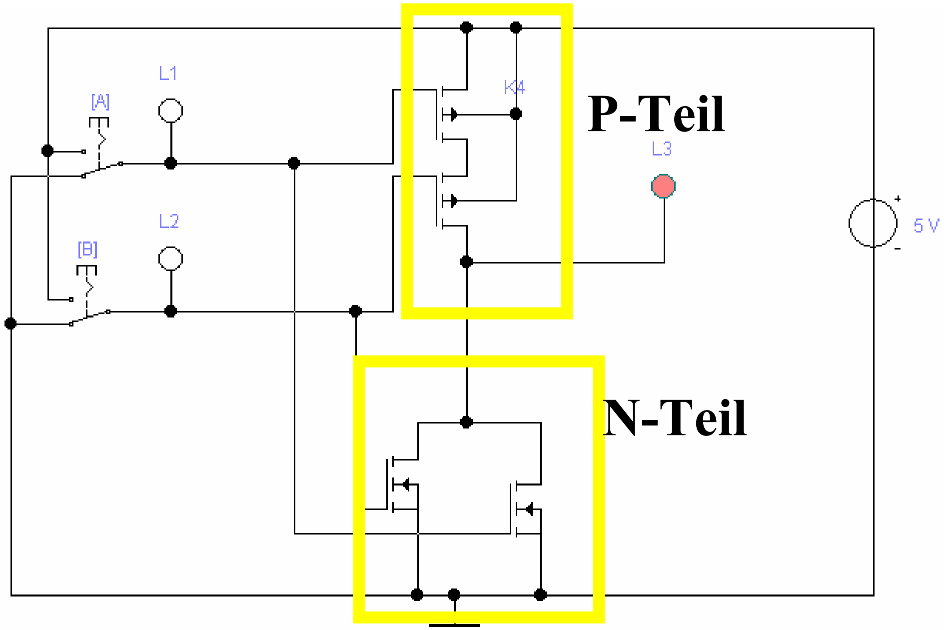


Schaltzeichen

CMOS NOR-Gatter



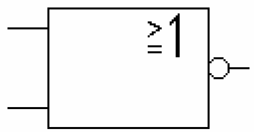
NOR-Verknüpfung mit Schaltern



NOR-Verknüpfung mit MOS-Transistoren

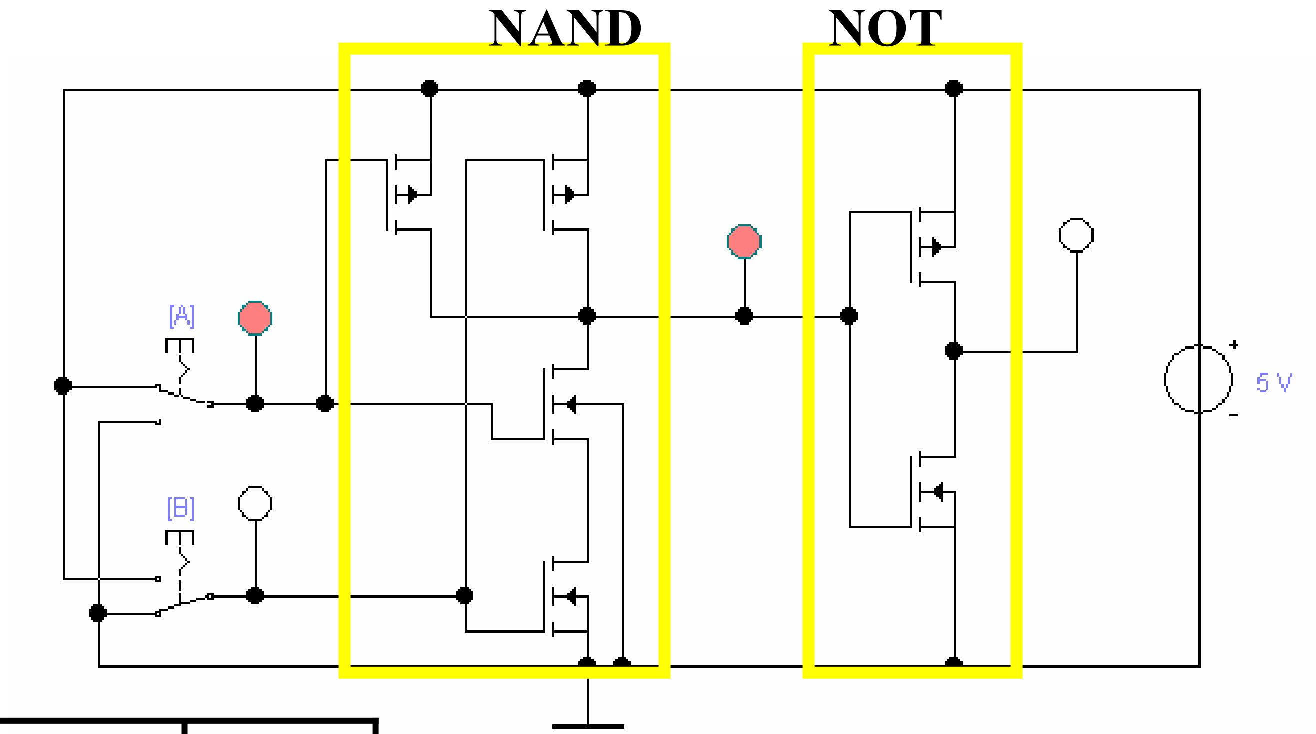
Wertetabelle

B	A	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



Schaltzeichen

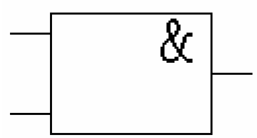
CMOS UND-Gatter



UND-Verknüpfung aus NAND und NOT

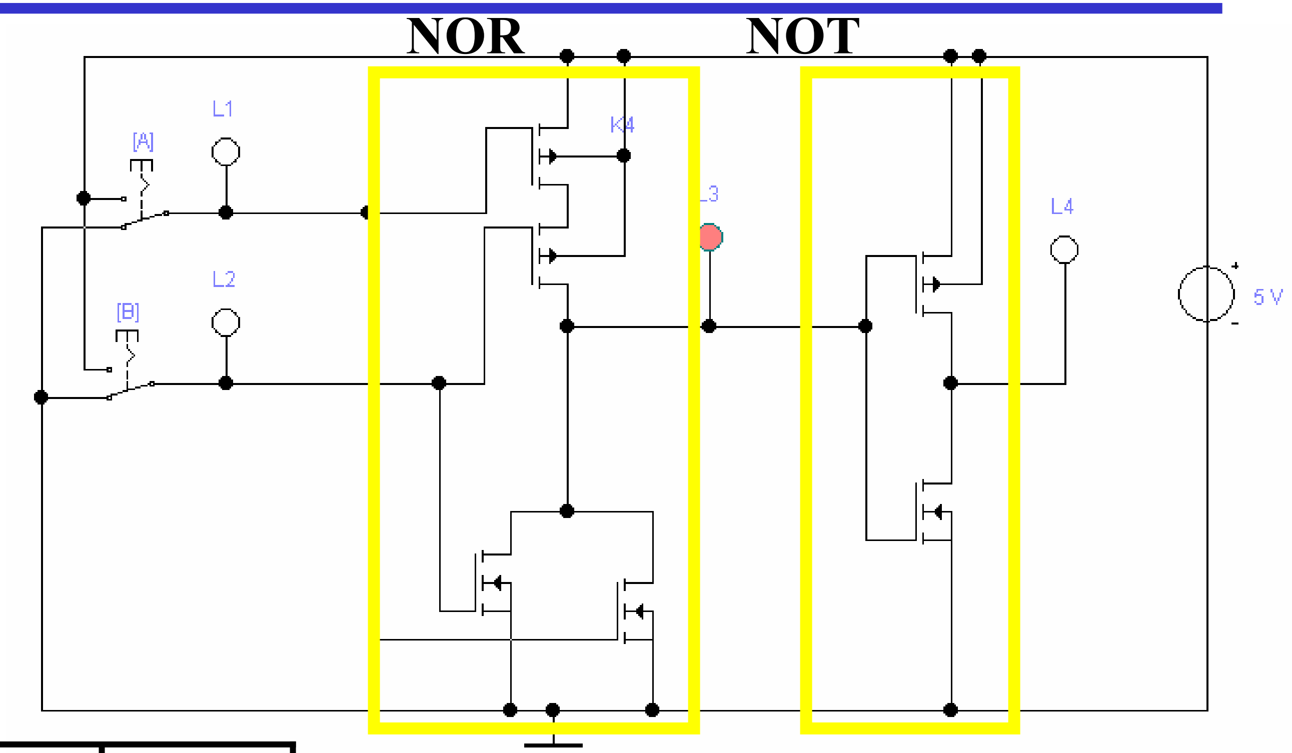
Wertetabelle

B	A	NAND	UND
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1



Schaltzeichen

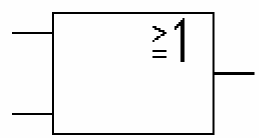
CMOS ODER-Gatter



ODER-Verknüpfung aus NOR und NOT

Wertetabelle

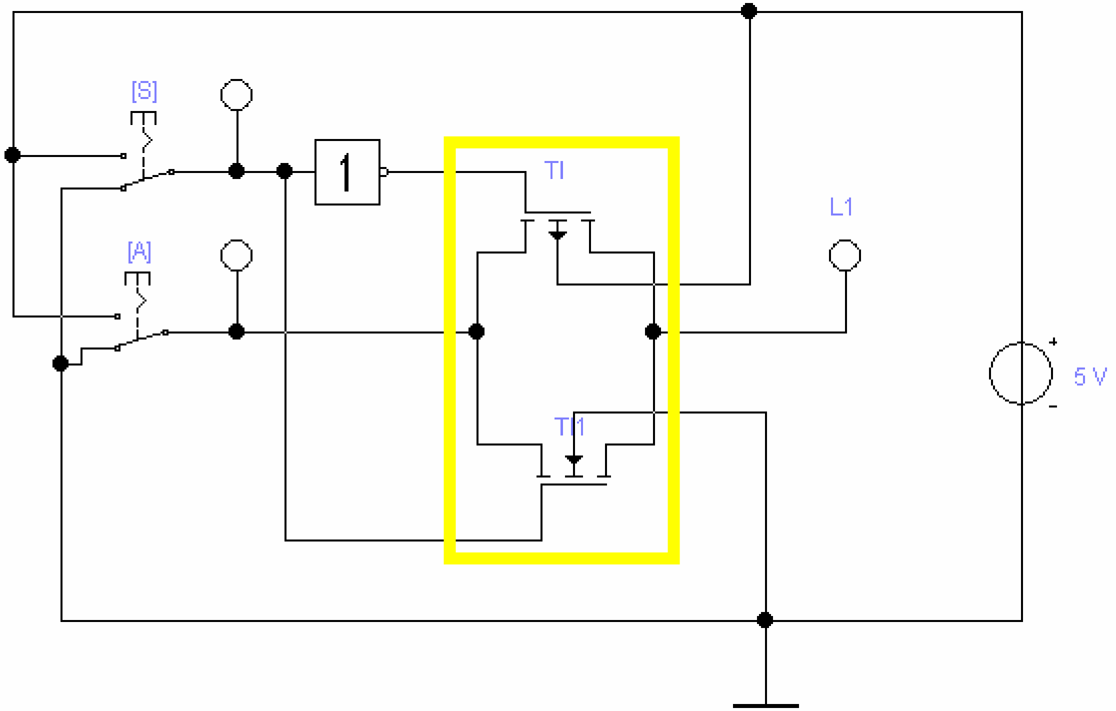
B	A	NOR	ODER
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	1



Schaltzeichen

Komplementärschalter (Transmission Gate)

- Parallelschaltung eines PMOS- und eines NMOS-Transistors

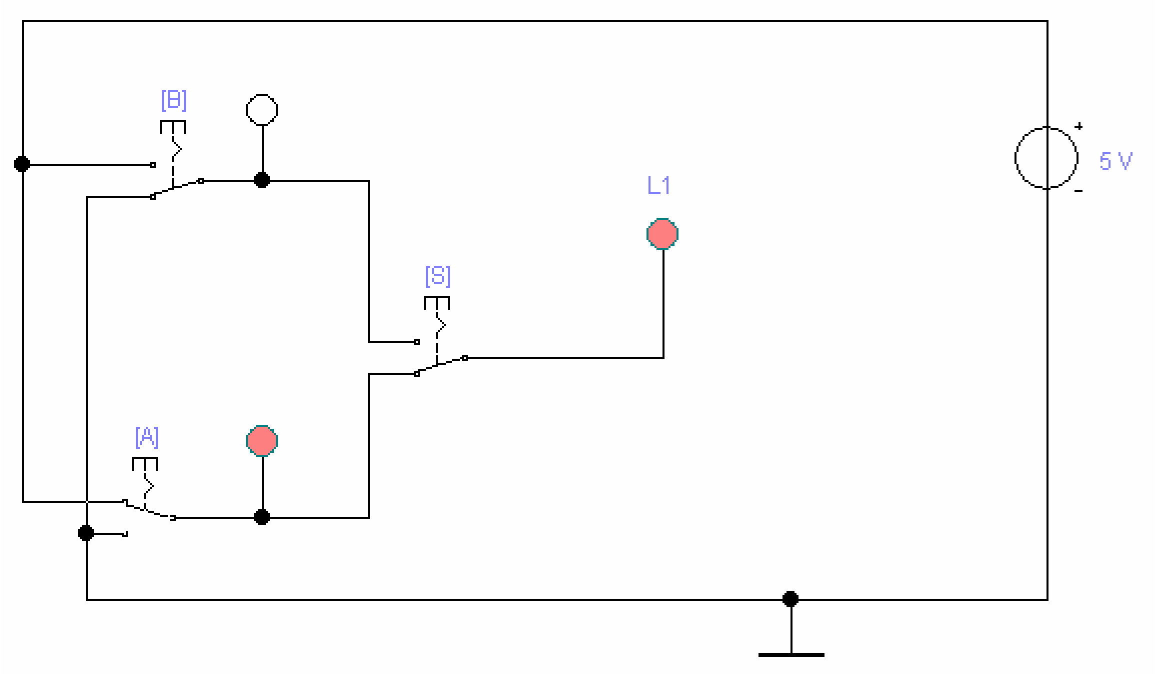


Multiplexer

- Wählt den Signalfluss über ein Steuersignal

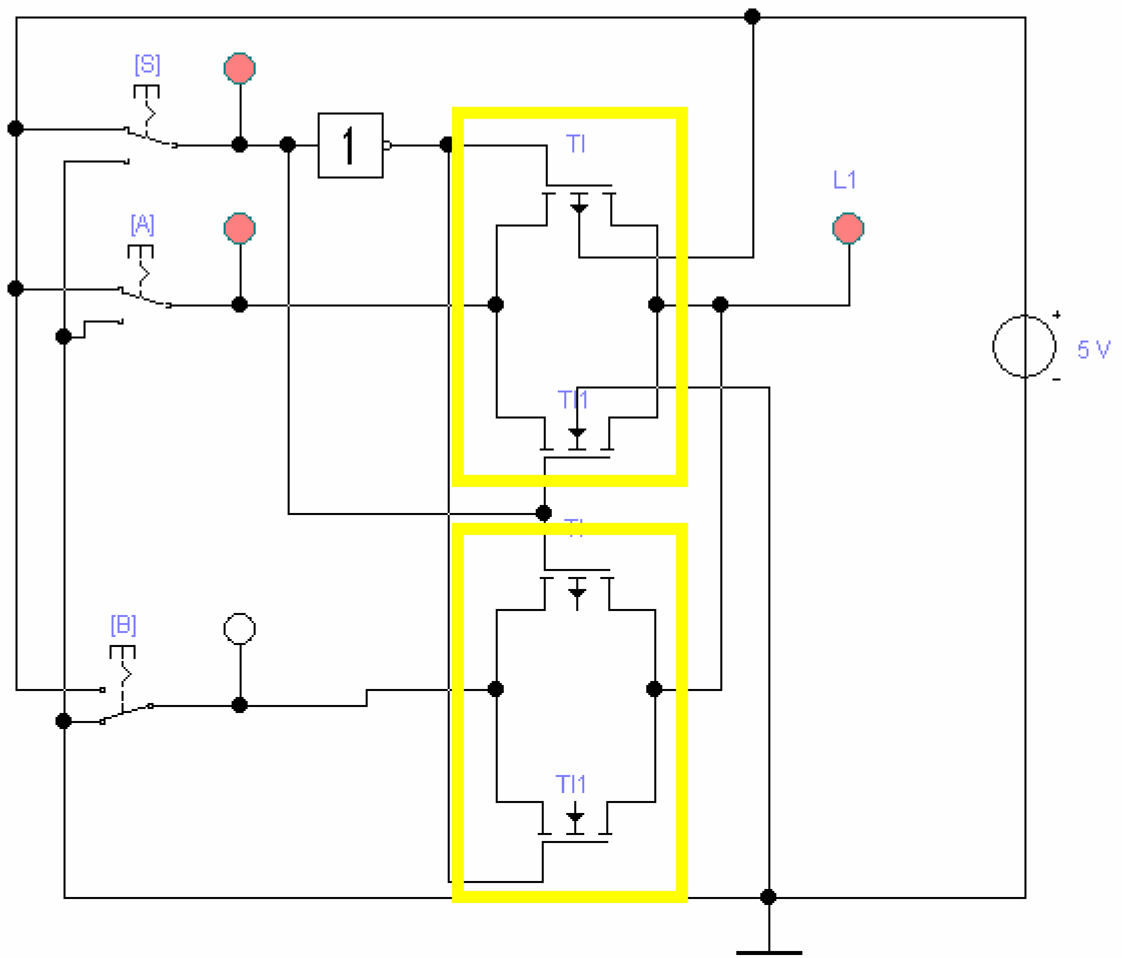
Wertetabelle

S	B	A	MUX
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1



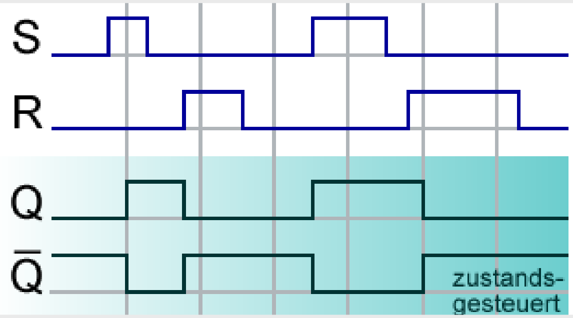
Multiplexer

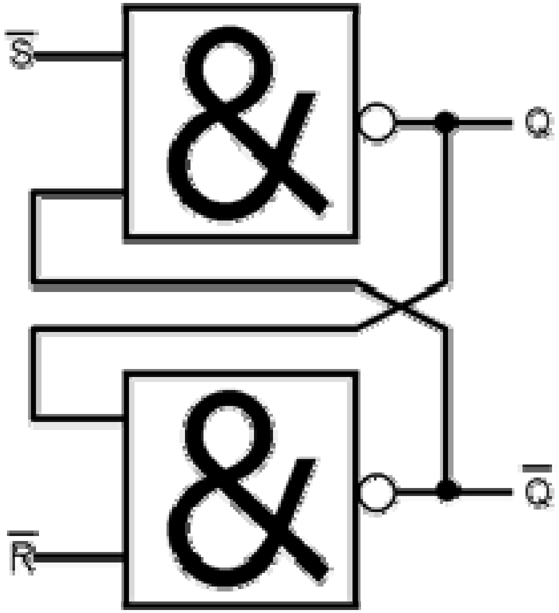
- Multiplexer können aus Komplementärschaltern aufgebaut werden



FlipFlop

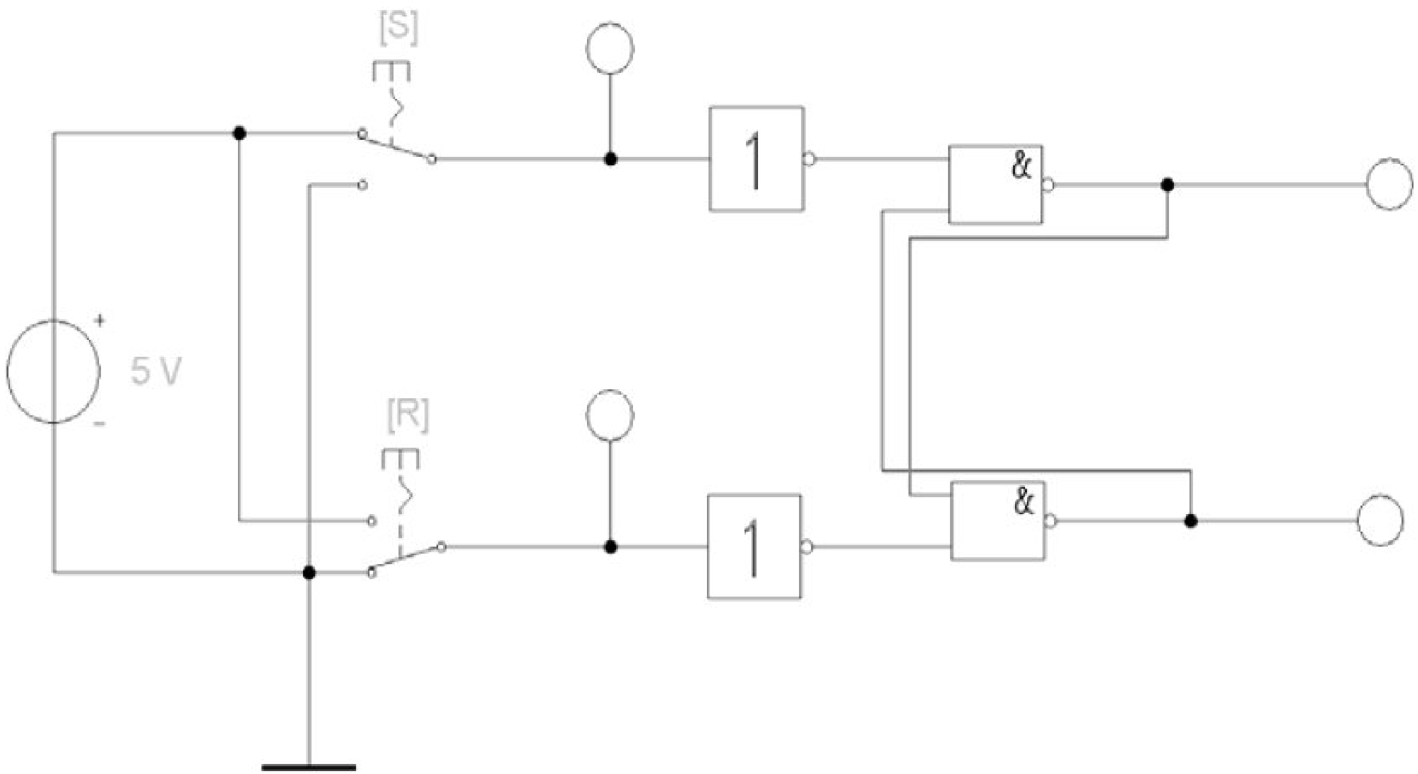
- **FlipFlop**
  - ⇨ **Hält stabile Zustände**
  - ⇨ **Für Zähler entwickelt**





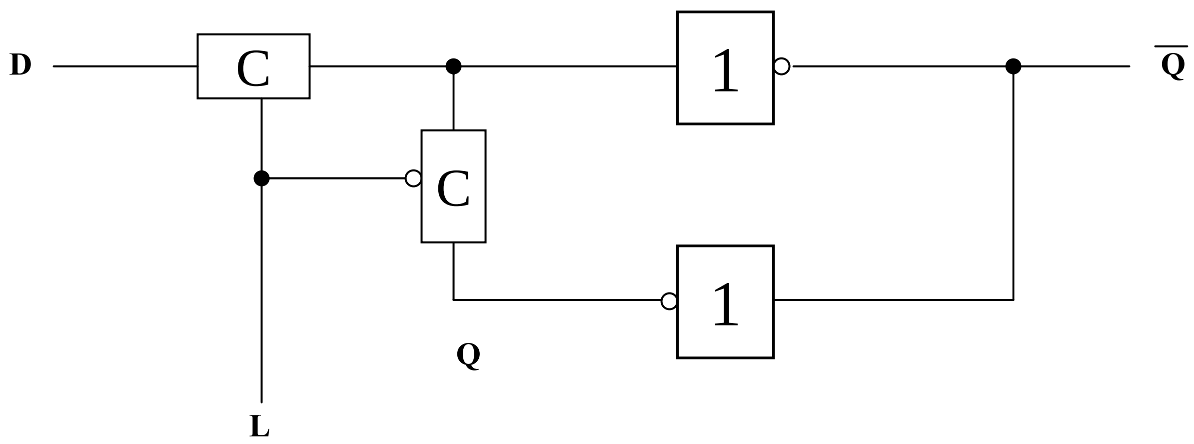
S	R	Q	$\overline{Q}$
0	0	Q_{-1}	$\overline{Q}_{-1}$
1	0	1	0
0	1	0	1
1	1	X	X

- **FlipFlop**

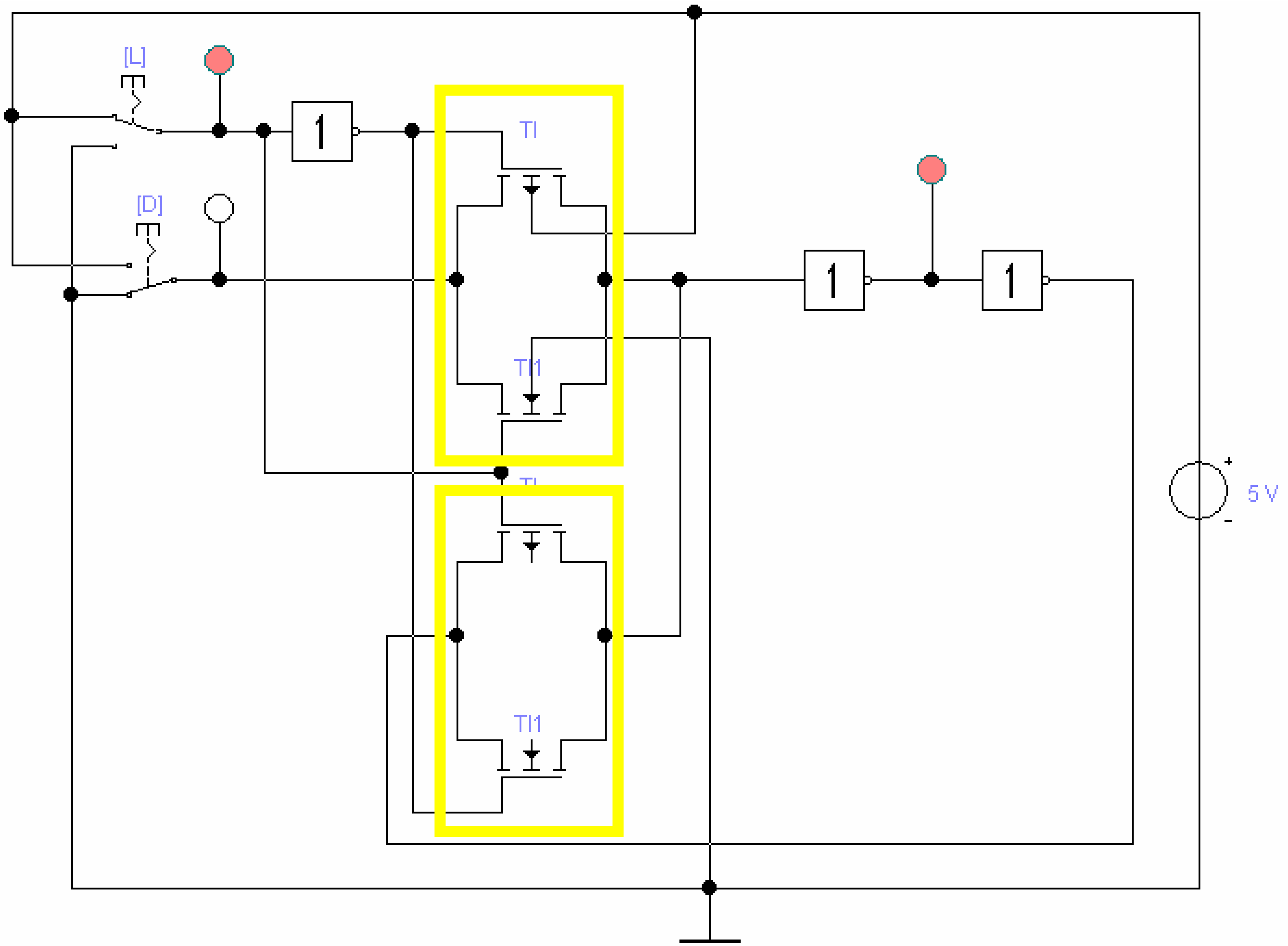


Speicher

- Auch ein Speicherelement kann aus den bisher behandelten CMOS-Strukturen aufgebaut werden
  - ⇨ Man benötigt zwei Inverter und einen Multiplexer.
  - ⇨ Die Ausgabe folgt der Eingabe, wenn L=1
  - ⇨ Die Ausgabe speichert den letzten Wert, wenn L=0
- Schaltbild:



Schaltverhalten des Speichers



Größe der CMOS-Schaltfunktionen

Schaltfunktion	Anzahl der Transistoren
NICHT	2
NAND	4
NOR	4
UND	6
ODER	6
Komplementärschalter	4
Multiplexer	6
FlipFlop	12
Speicher	10

Komplexe Schaltfunktionen

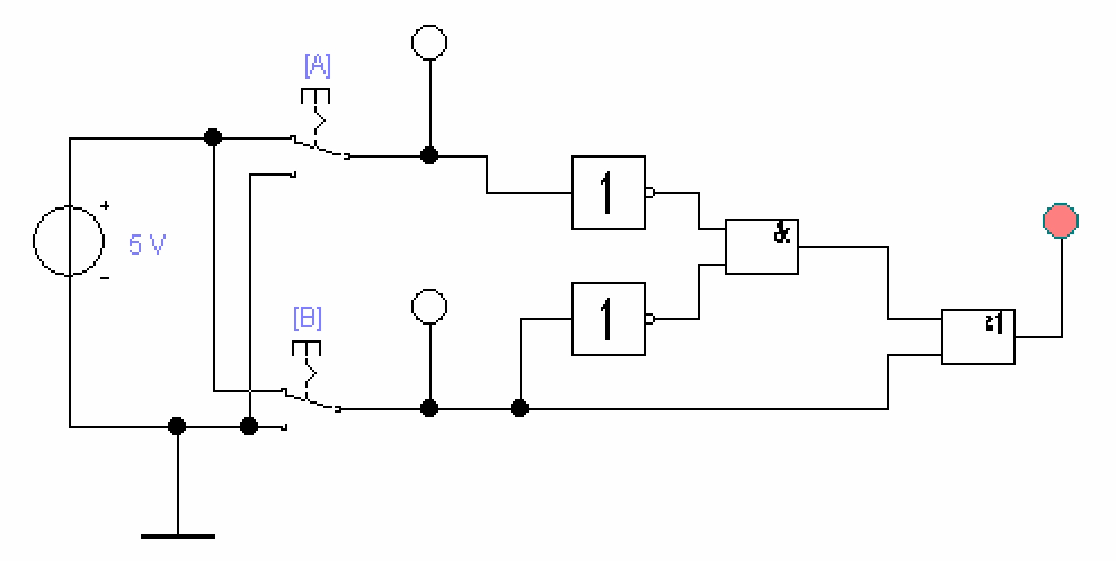
- **Zwei Möglichkeiten**
  - ⇨ **Aufbau durch einfache Gatter**
  - ⇨ **Realisierung als CMOS-Schaltfunktion**
- **Grundregeln des CMOS-Entwurfs**
  - ⇨ **Zu keinem Zeitpunkt darf ein Pfad von der Spannungsversorgung zur Masse geschaltet sein**
    - **Alle parallelen NMOS-Transistoren müssen im P-Teil in Reihe geschaltet werden**
    - **Alle in Reihe geschalteten NMOS-Transistoren müssen im P-Teil parallel geschaltet werden**
  - ⇨ **PMOS-Transistoren schalten die Spannungsversorgung**
  - ⇨ **NMOS-Transistoren schalten die Masse**

Beispiel

- Gegeben: Die Wertetabelle

B	A	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Realisierung mit einfachen Gattern

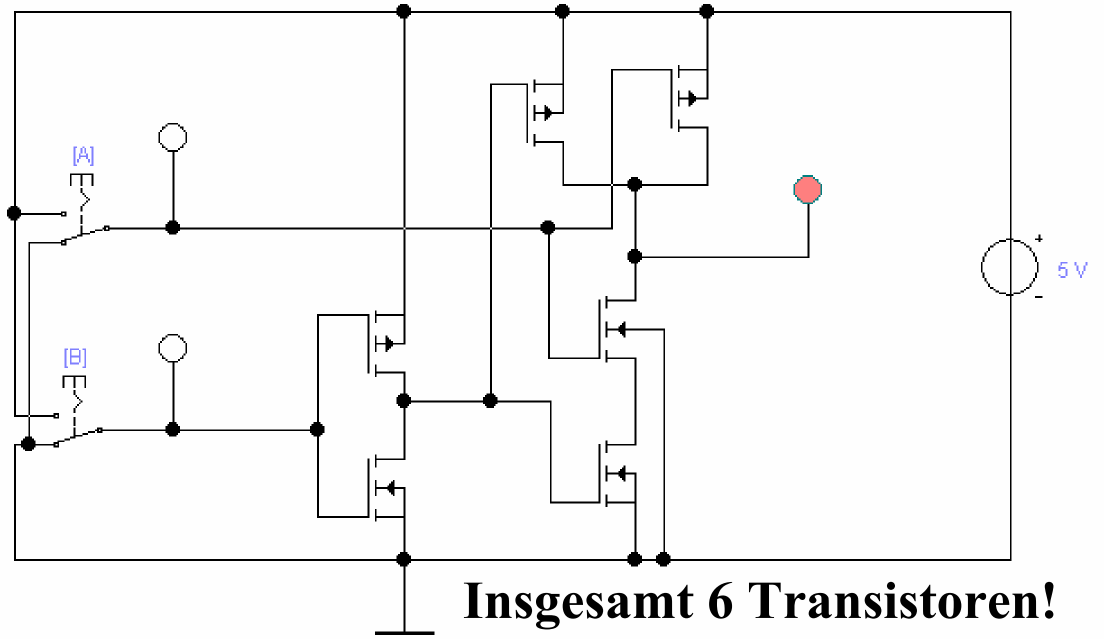


Insgesamt 2+2+6+6=16 Transistoren!

Realisierung als CMOS Komplexgatter

- Realisierung als CMOS-Komplexgatter
  - ⇨ Entwicklung des N-Teils aus den Nullstellen der Wertetabelle
    - Die Schaltung hat den Wert „0“ wenn A auf „1“ ist und B auf „0“
    - Negation des Signals B zu ¬B
    - Reihenschaltung von A und ¬B
  - ⇨ Entwicklung des P-Teils durch Reihen/Parallel Wandlung aus dem N-Teil

B	A	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

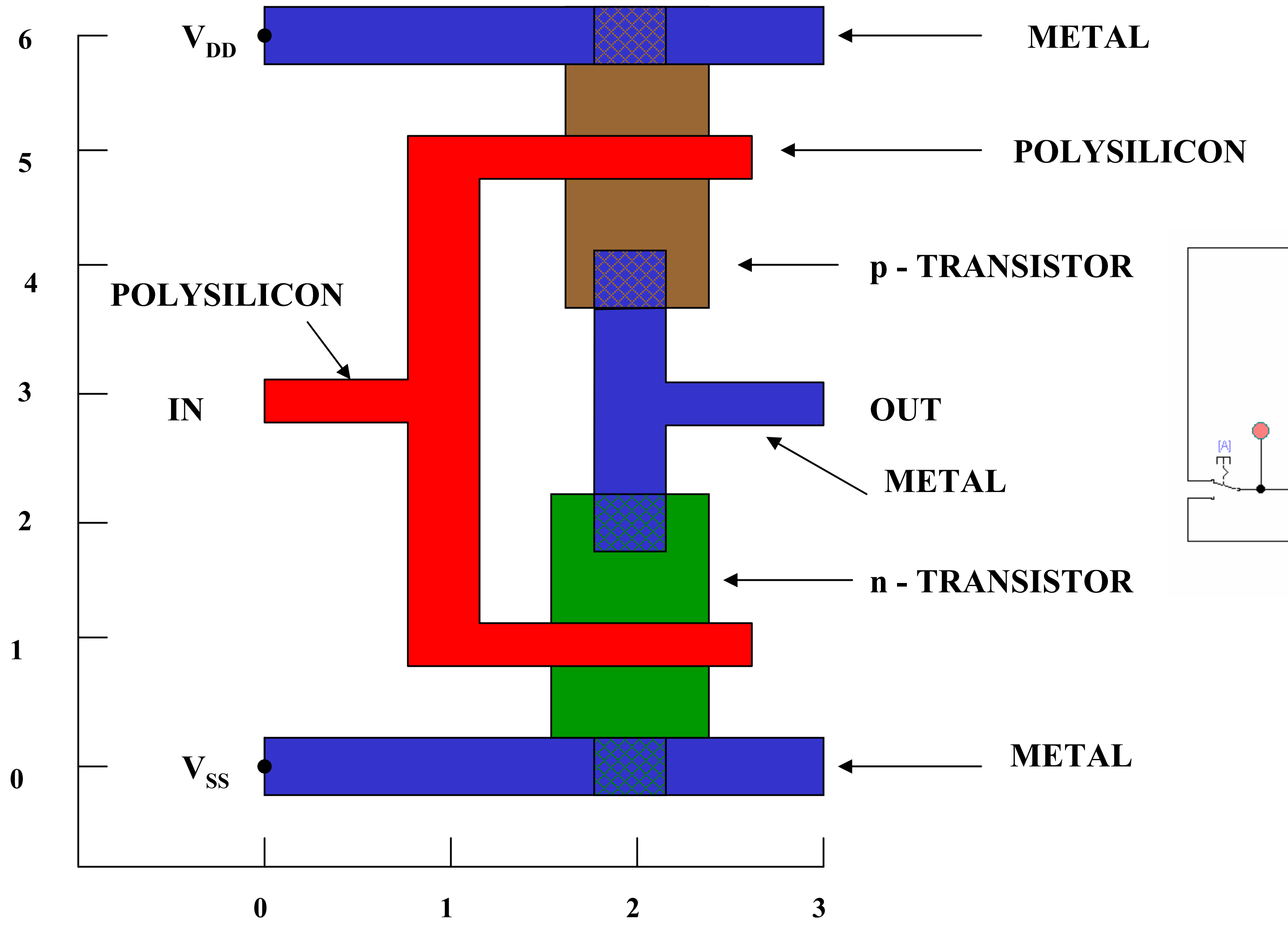


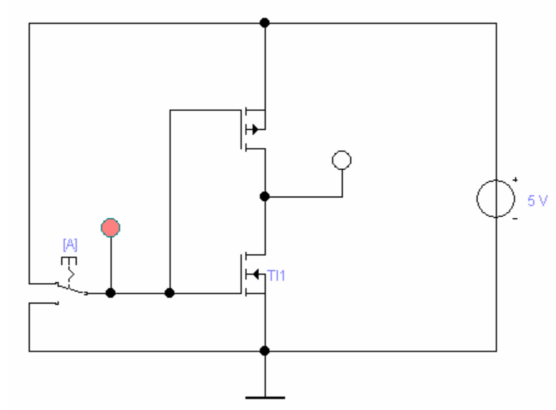
Insgesamt 6 Transistoren!

7 Physikalische Darstellung von MOS-Schaltkreisen

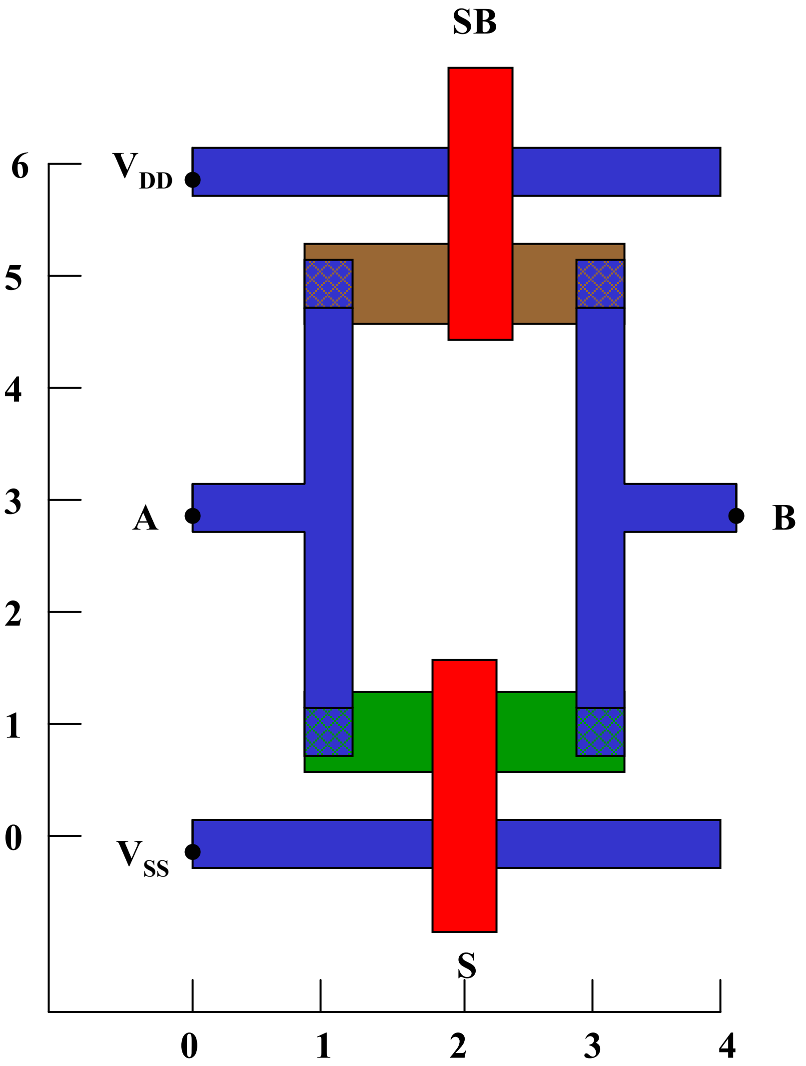
- **Die physikalische Darstellung von MOS-Schaltkreisen wird benutzt um zu beschreiben, wie der physikalische Aufbau einer integrierten Schaltung ist. Im Prinzip können daraus automatisch die Belichtungsmasken erstellt werden.**
- **Die einzelnen Transistoren entstehen durch Übereinanderlegen von Schichten**
  - ⇨ **p-Diffusion (positiv dotiert)**
  - ⇨ **n-Diffusion (negativ dotiert)**
  - ⇨ **Polysilizium (Gate)**
  - ⇨ **Metall1 und Metall2**
  - ⇨ **Kontakte**

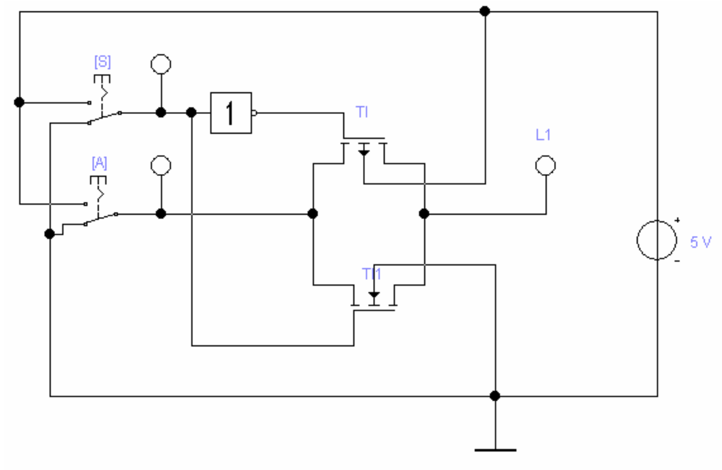
Beispiel Inverter





Beispiel Komplementärschalter



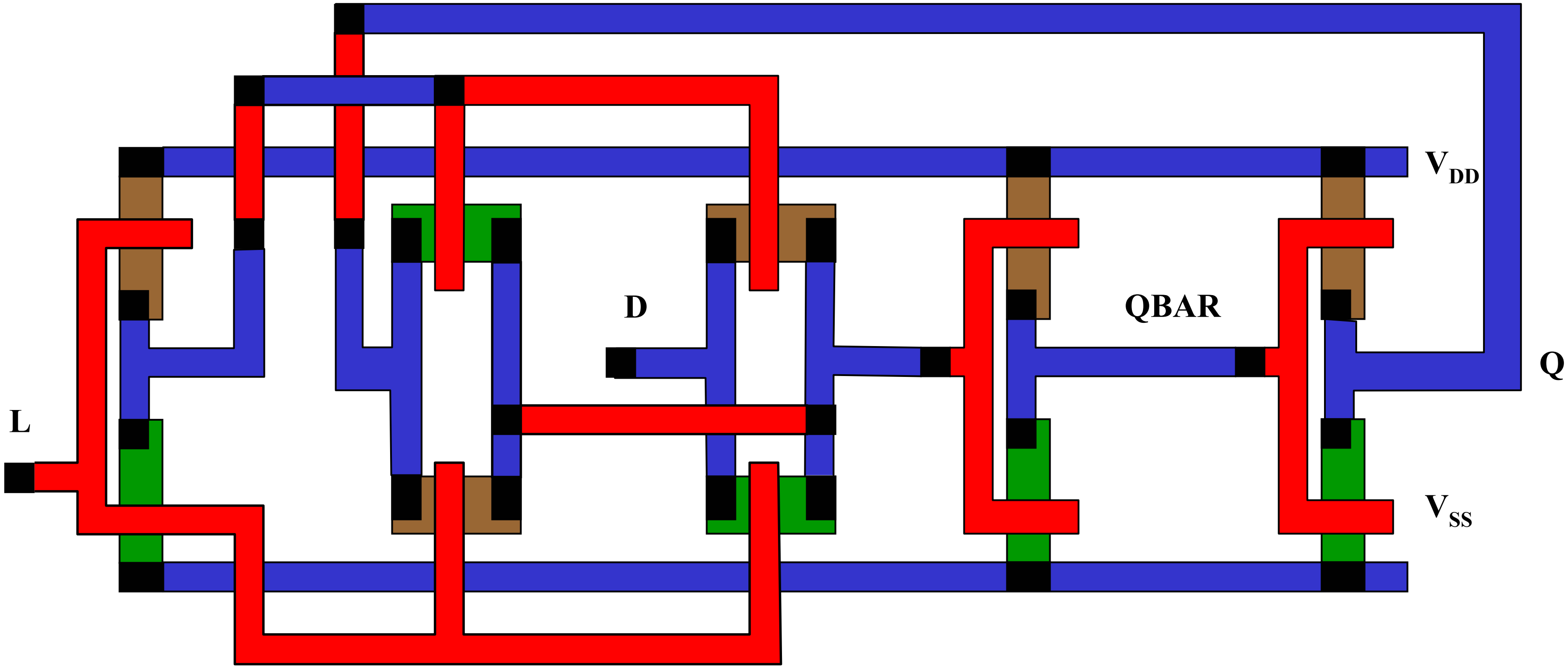


M.Bogdan

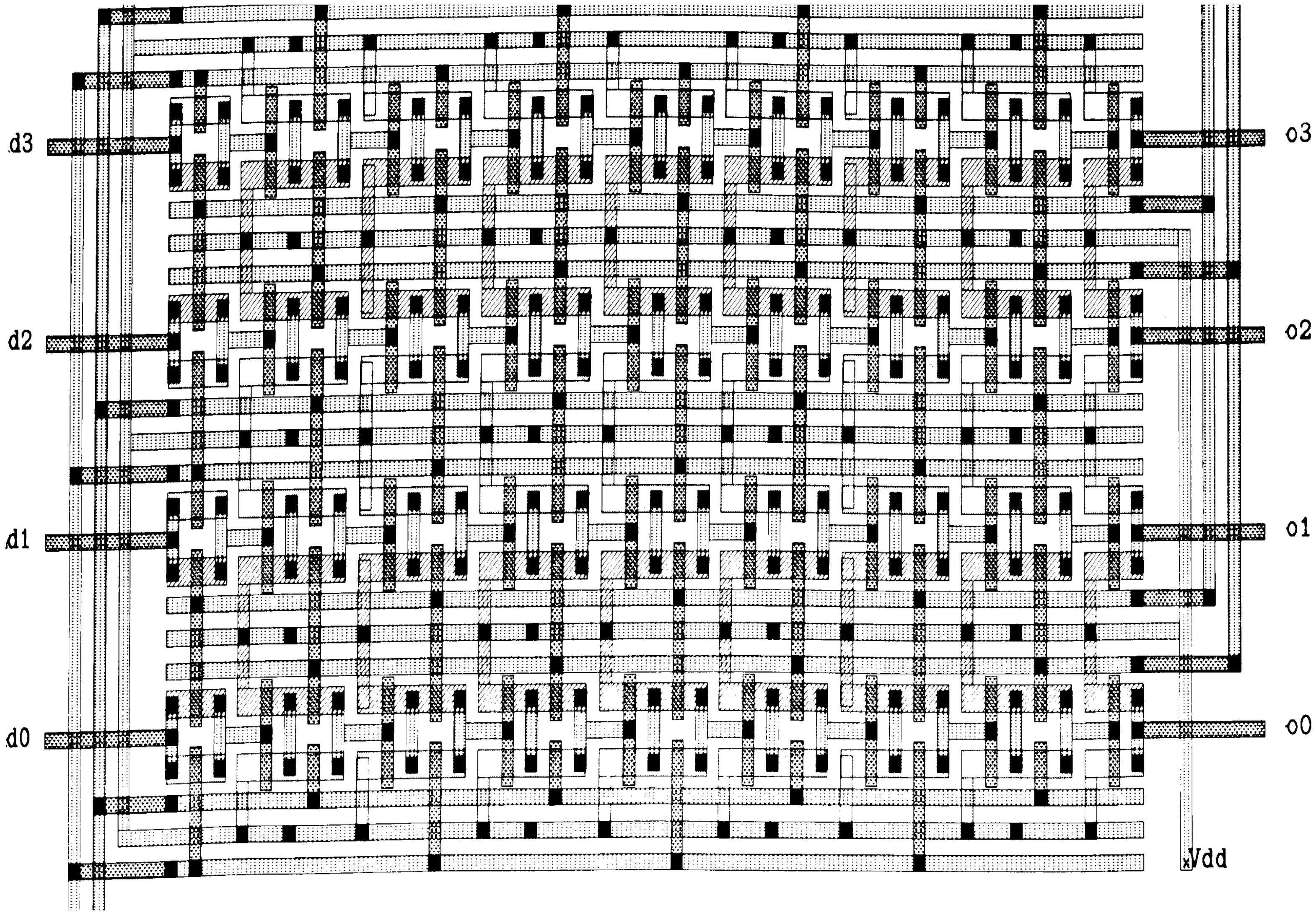
Sprachliche Beschreibung des Layouts eines Komplementärschalters

```
begin tg
t1: device n (2,1) or=east
t2: device p (2,5) or=east
         wire alum (0,0)(4,0)
         wire alum (0,6)(4,6)
         wire poly (2,-1)(2,1)
         wire poly (2,7)(2,5)
         wire alum (1,1)(1,5)
         wire alum (3,1)(3,5)
         wire alum (0,3)(1,3)
         wire alum (3,3) (4,3)
         contact md (1,1)
         contact md (3,1)
         contact md (1,5)
         contact md (3,5)
end
```

Beispiel Flipflop



Beispiel Schieberegister



8 Herstellung CMOS-Schaltung

- Herstellung des Trägermaterials
  - ⇨ Wafer-Herstellung
- Ausgangsmaterial Siliziumdioxid
  - ⇨ $Si0_2$
  - ⇨ Quarzkies, Quarzsand
- Herstellung von Rohsilizium
  - ⇨ SiO
  - ⇨ Hochenergetische Reduktion
    - Reaktion mit Kohle
    - Lichtbogenöfen
  - ⇨ Rohsilizium
    - Metallisches Silizium
  - ⇨ Microsilica
    - Chemie
    - Füllstoffe etc.

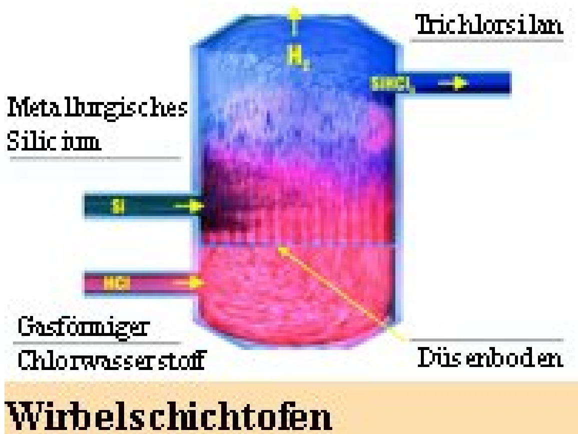

Quarzkies 16-60mm


Lichtbogenofen

www.euroquarz.de

Wafer-Herstellung

- Rohsilizium
  - ⇨ Wird wie in Stahlindustrie abgestochen
  - ⇨ 99% Reinheit
  - ⇨ Basis für Poly-Silizium
- Poly-Silizium
  - ⇨ Rohsilizium mit Chlorwasserstoff in Wirbelschichtofen
  - ⇨ Trichlorsilan
    - wasserklare Flüssigkeit

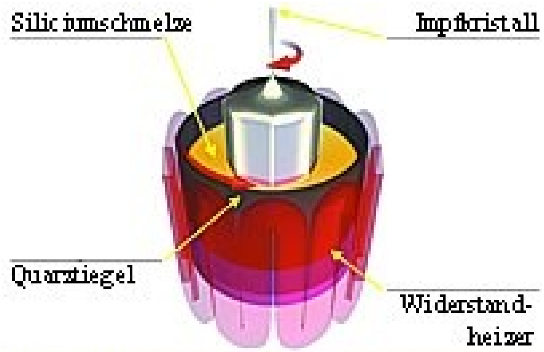


www.euroquarz.de

Wafer-Herstellung

- **Polysilizium**
  - ⇨ **Destillation Trichlorsilan**
  - ⇨ **Reines Polysilizium**
    - **1 Fremdatom auf 10^{10} Siliziumatome**
    - **Je höher die Reinheit, je besser der Wirkungsgrad der Schaltung**
- **Reinstsilizium**
  - ⇨ **Ziel: völlig gleichmäßiges Kristallgitter**
    - **Polysilizium bei 1410 Grad schmelzen**
    - **Impfkristall einsetzen**
    - **Langsam drehend herausziehen**

Umwandlung von Silan in Silicon

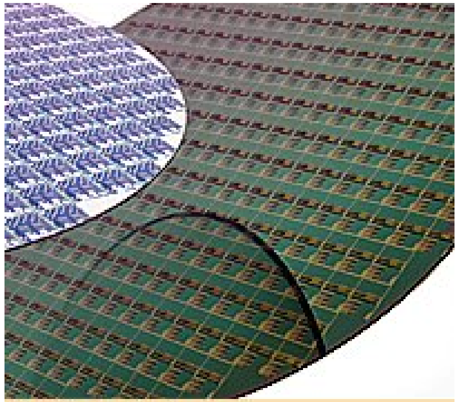


www.euroquarz.de

Wafer-Herstellung

- Reinstsilizium
  - Zylinderförmige Stäbe
    - Bis zu 2 m lang
    - 30 cm dick
  - Leitfähigkeit
    - Zusatz von Bor, Phosphor
- Wafer
  - Weiter Veredlungsschritte
    - Schneiden
    - Polieren
    - Beschichten
    - Aufbringen Schaltung

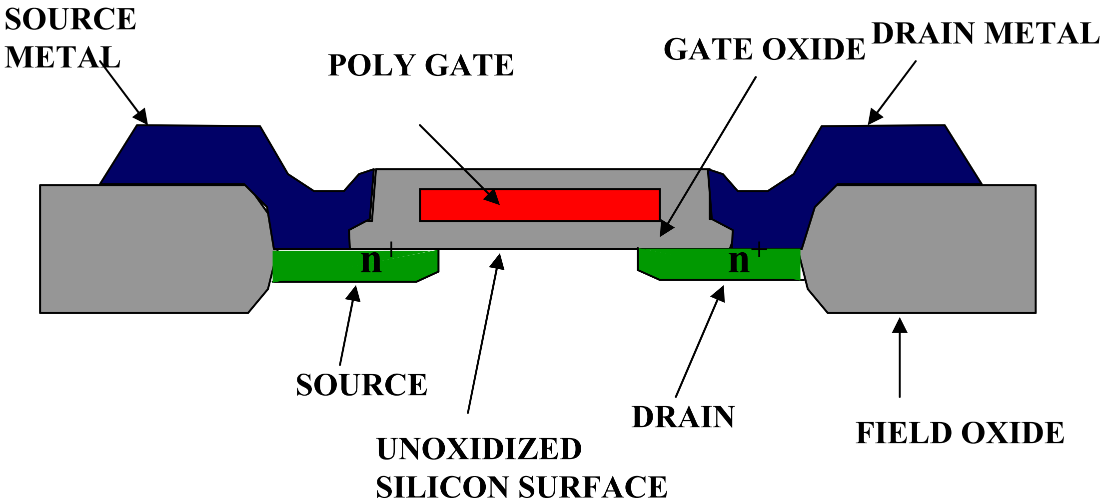

Monokristallines Silicium


Wafer-Scheiben

www.euroquarz.de

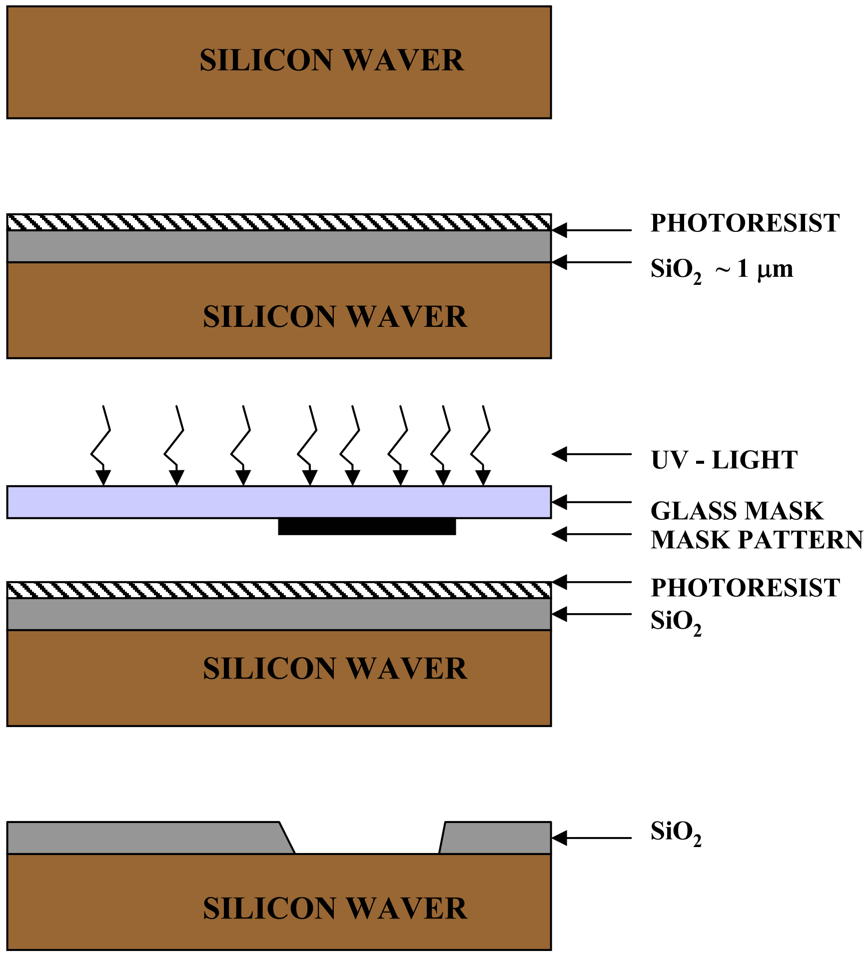
Oxydation

- Siliziumoxyd (SiO_2) ist ein guter Isolator. Es wird erzeugt, indem der Wafer einer oxydierenden Umgebung ausgesetzt wird
- Wasserdampf bei 900×C bis 1000×C (schnelle Oxydierung)
- Sauerstoff bei 1200×C (langsame Oxydierung)
- SiO_2 besitzt etwa das doppelte Volumen von Silizium und es wächst sowohl vertikal als auch horizontal



Selektive Diffusion

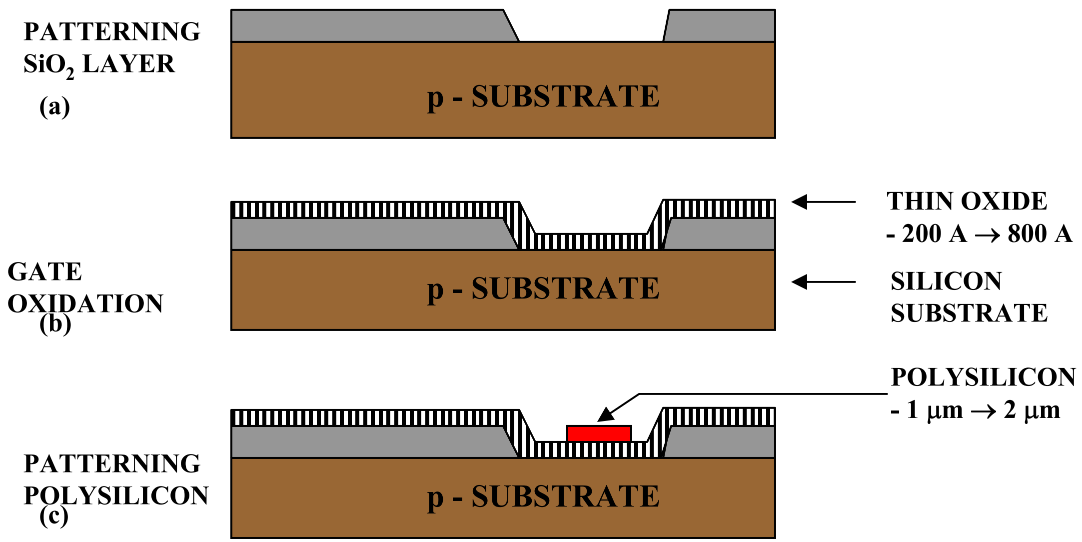
- Selektive Diffusion ist das Erzeugen verschieden dotierter Siliziumschichten.
- Flächen müssen dabei
  - beliebige Formen annehmen können
  - genau plaziert sein
  - genau skaliert sein
- Das SiO_2 verhindert den Dotierungsvorgang. Es kann später durch eine Säure entfernt werden, die das Silizium nicht angreift.
- Prinzip der selektiven Dotierung:
  - Oxydieren der Siliziumoberfläche
  - Beschichten mit einem lichtempfindlichen Lack
  - Belichten mit UV-Licht über eine Maske
  - Entfernen des nicht belichteten Photolacks und des darunterliegenden Siliziumoxyds



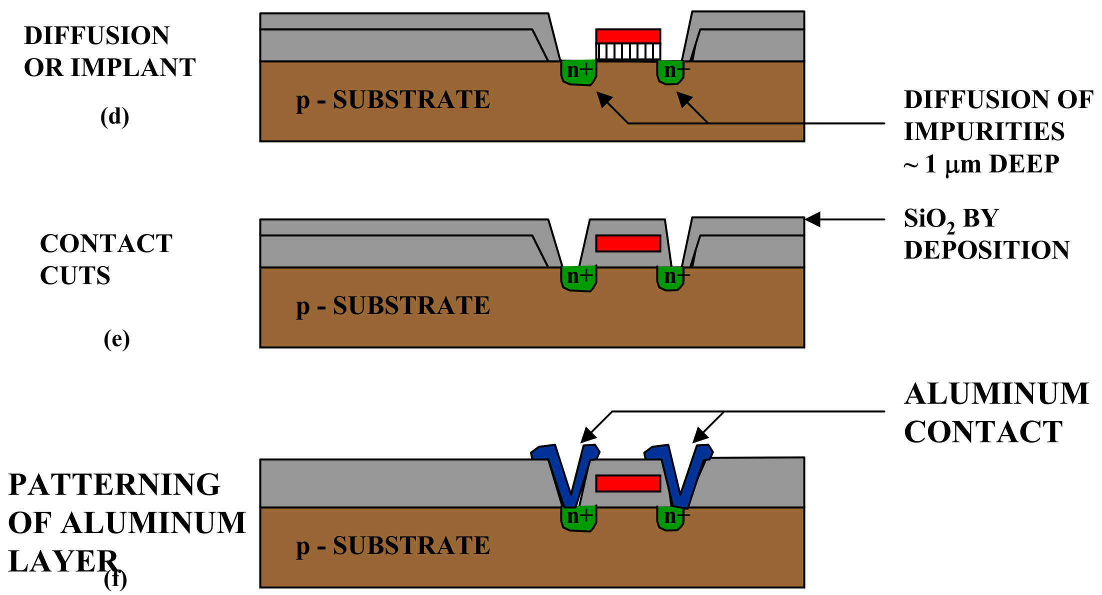
M.Bogdan

8.2 Entstehung eines NMOS Transistors

- **Zunächst wird der Wafer mit einer dicken SiO2-Schicht überdeckt**
- **An den Stellen, an denen Transistoren entstehen sollen, werden diese freigelegt (a)**
- **Die gesamte Fläche wird mit einer dünnen, sehr einheitlichen SiO2-Schicht überdeckt (b)**
- **Der Wafer wird mit einem Photolack überzogen und an den Stellen, an denen Gates entstehen sollen, freigelegt. Polykristallines Silizium wird aufgedampft (c)**

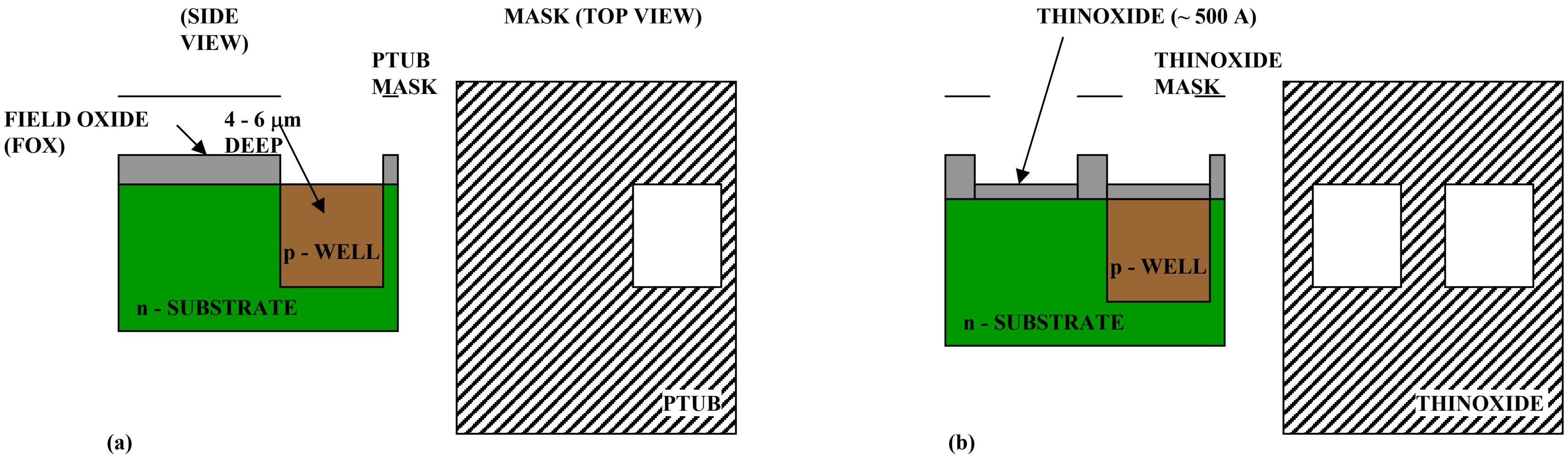


- Mit den gleichen Arbeitsschritten werden die Flächen für die negative Dotierung freigelegt.Die freigelegten Flächen werden negativ dotiert (d).Der Wafer wird erneut mit einer SiO2-Schicht überdeckt
- Die Kontaktstellen werden durch Ätzung freigelegt.
- Die Metallbahnen zur Verbindung werden aufgedampft.

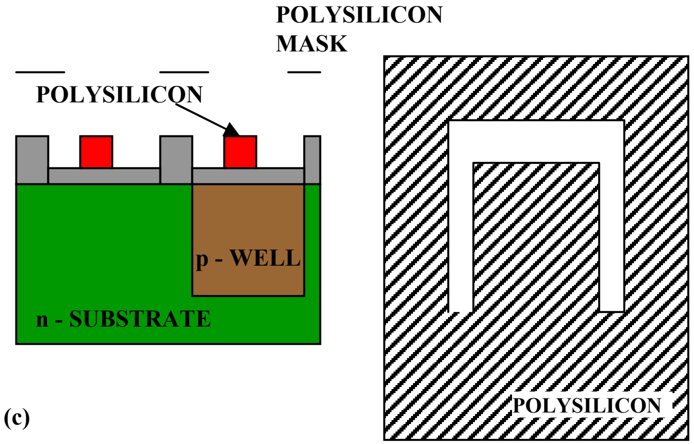


8.3 Entstehung eines CMOS-Inverters

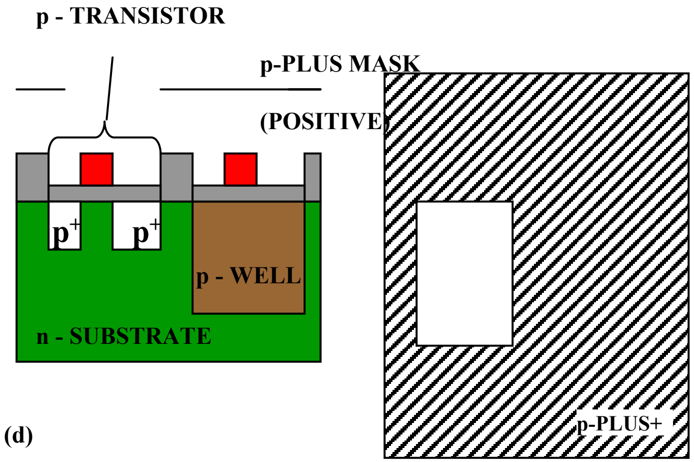
- **Beim CMOS-Prozeß müssen negativ dotierte Flächen für pMOS-Transistoren geschaffen werden (p-Well, p-Wannen).**



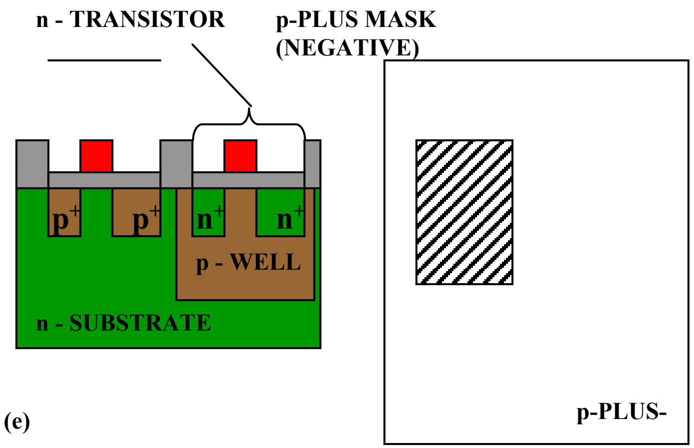
Entstehung eines CMOS-Inverters



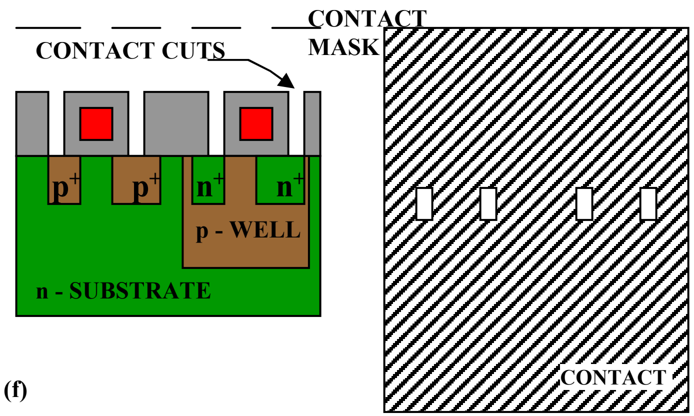
(c)



(d)

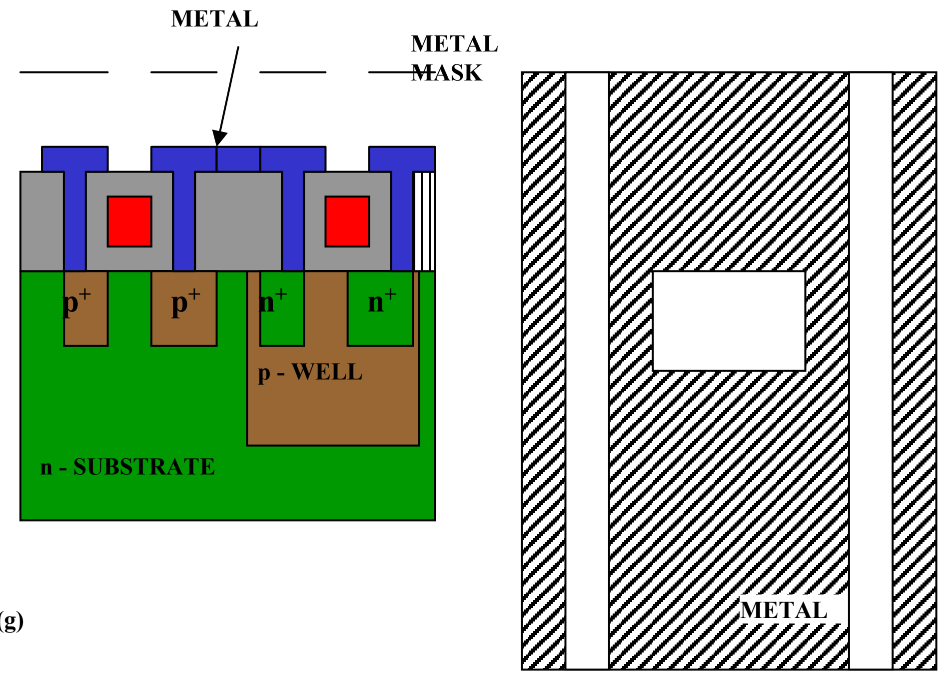


(e)



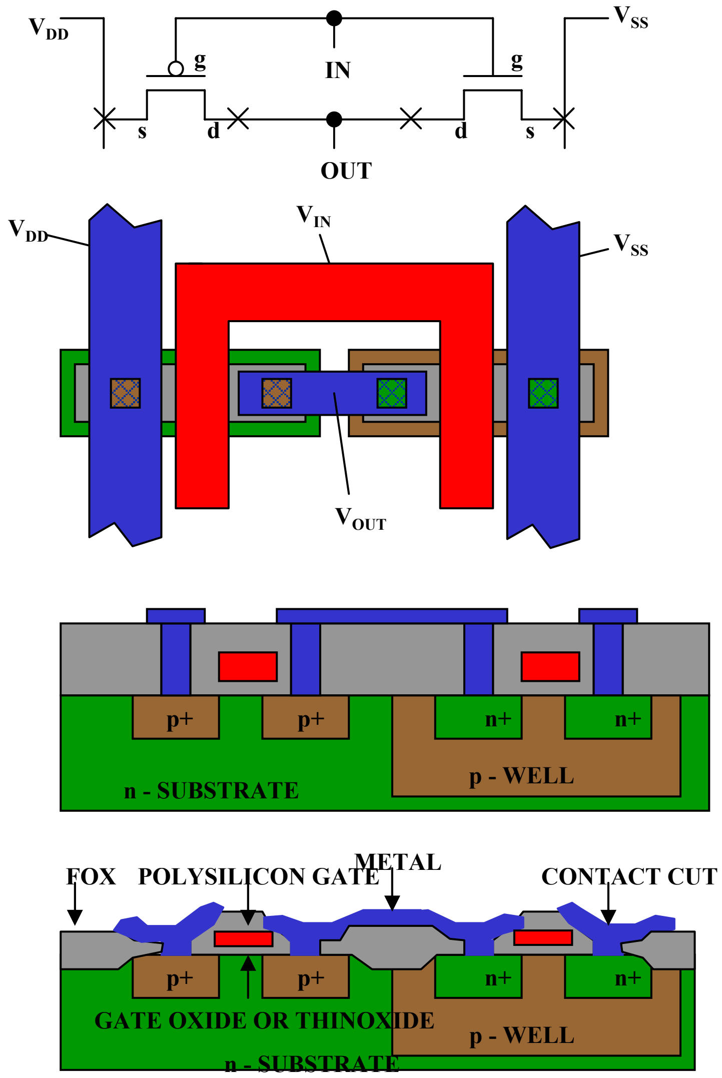
(f)

Entstehung eines CMOS-Inverters

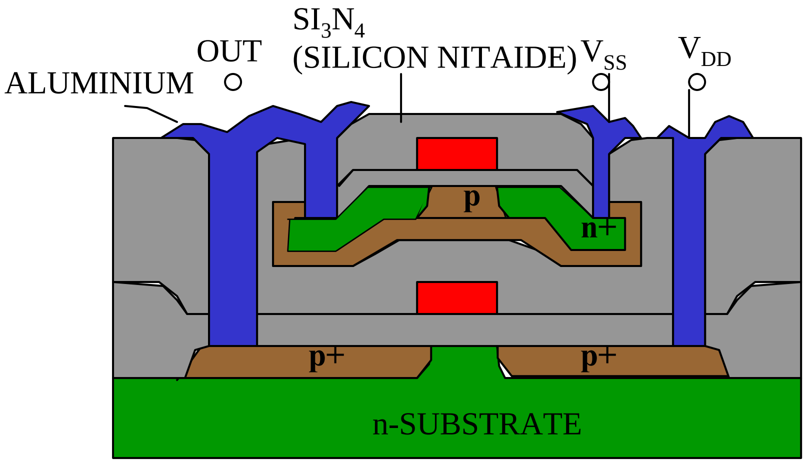


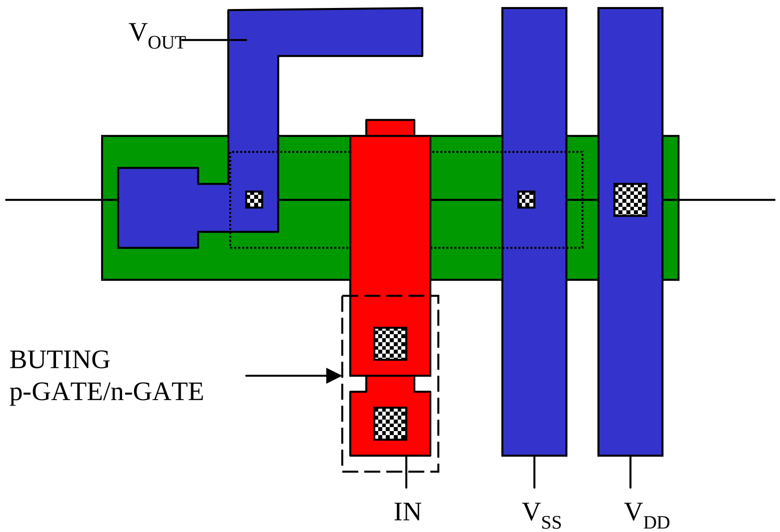
(g)

Zusammenhang zwischen Schaltplan und Realisierung



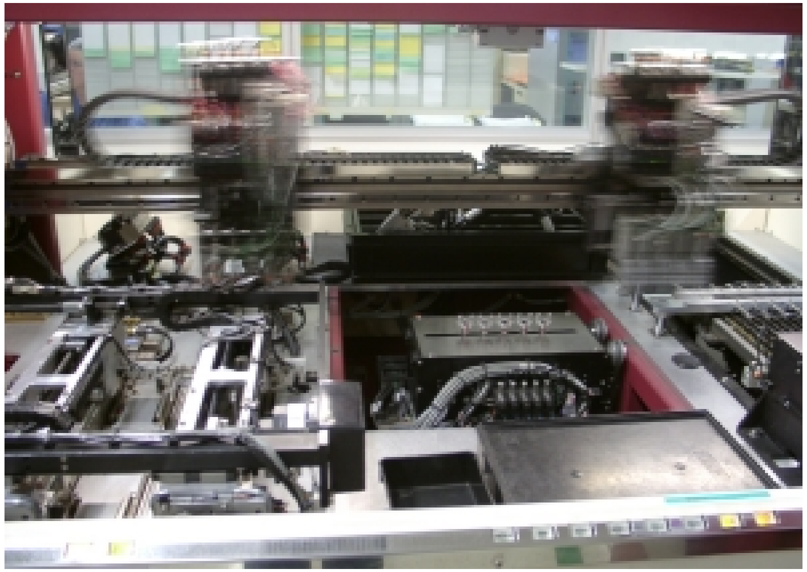
Moderne CMOS-Techniken: ein 3D-CMOS-Inverter





Chip-Herstellung

- Herstellung

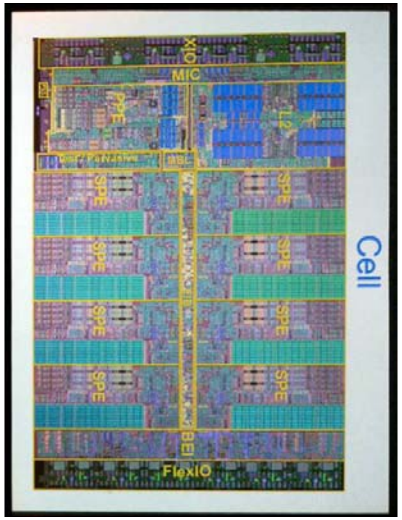


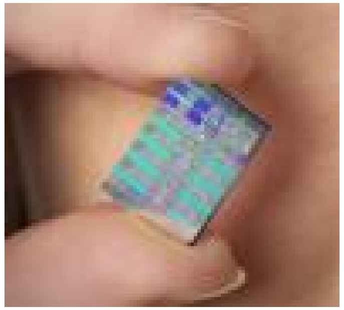
www.elmos.de

Chip-Herstellung

❍ Beispiel: Cell Processor (IBM)

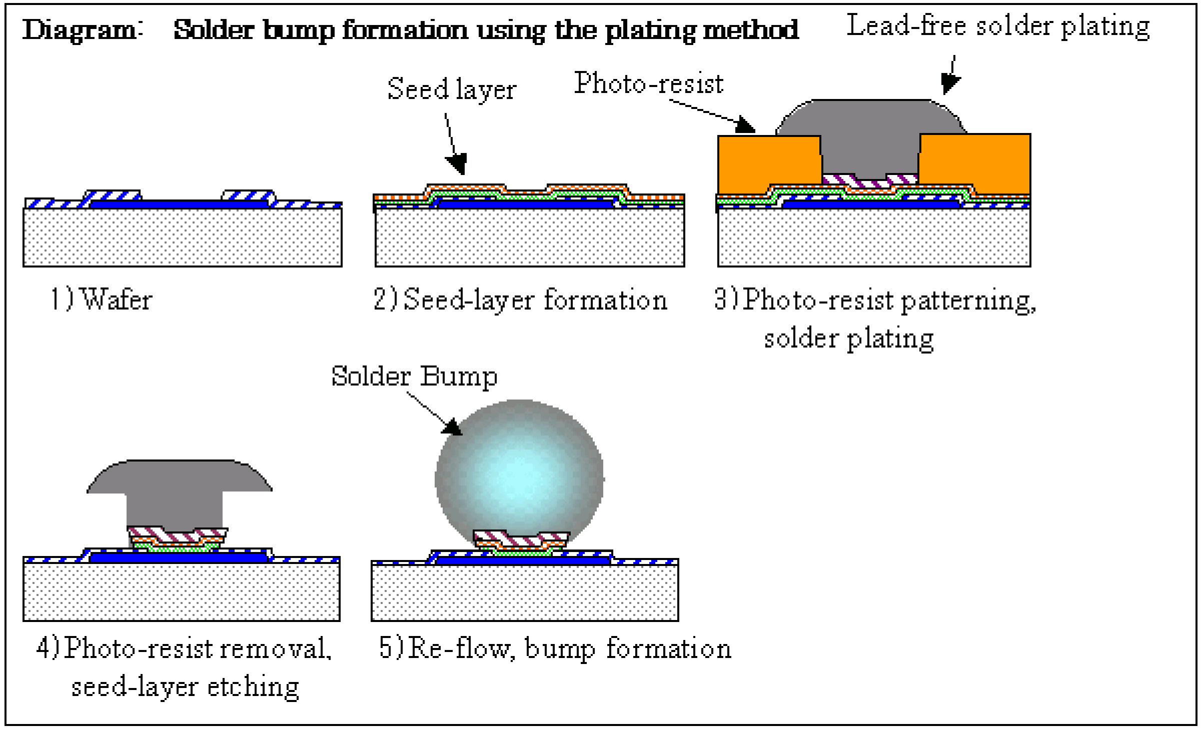
The CELL Architecture





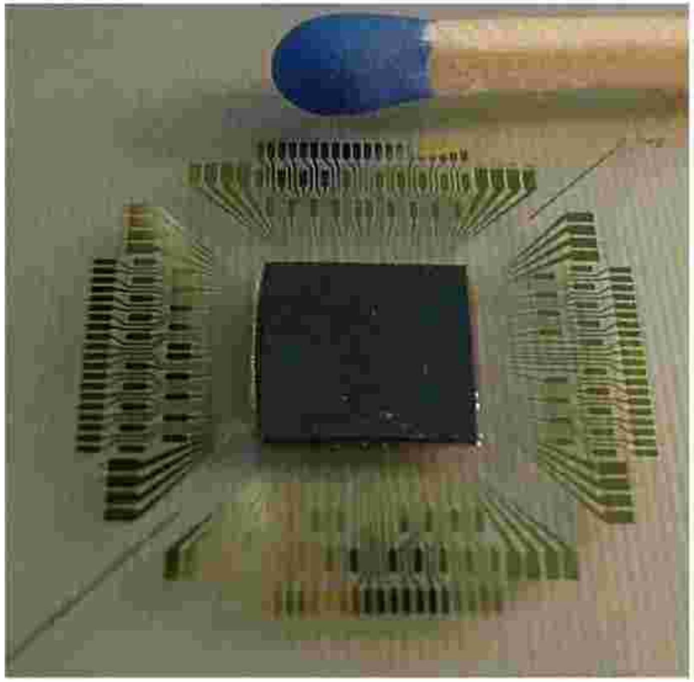
Chip-Herstellung

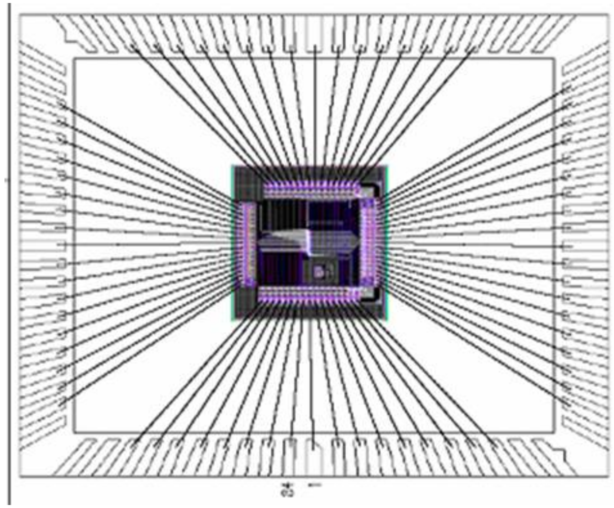
- **Bonding**
  - ⇨ **Verbindung Chip mit Packung**



Chip-Herstellung

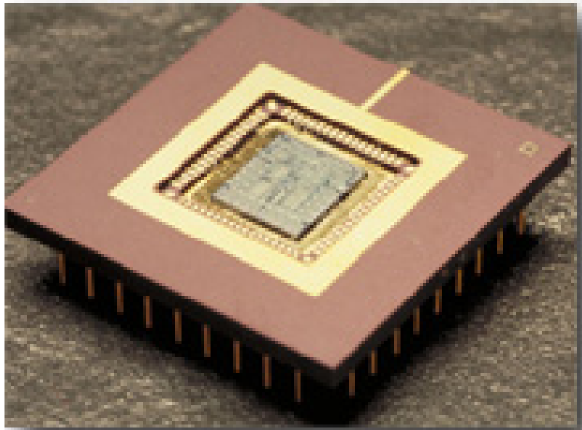
- **Bonding**
  - ⇨ **Verbindung Chip mit Packung**

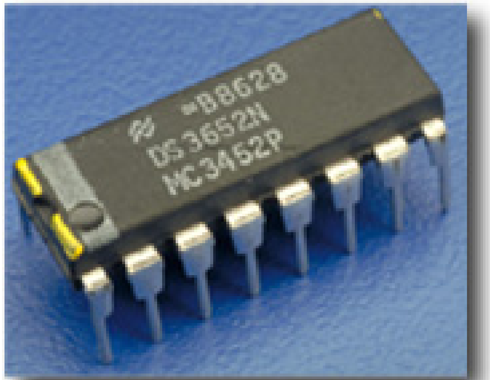


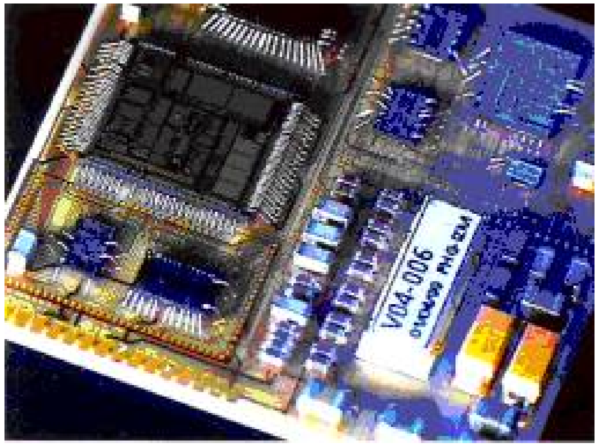


Chip-Herstellung

- **Bonding**
  - ⇨ **Verbindung Chip mit Packung**

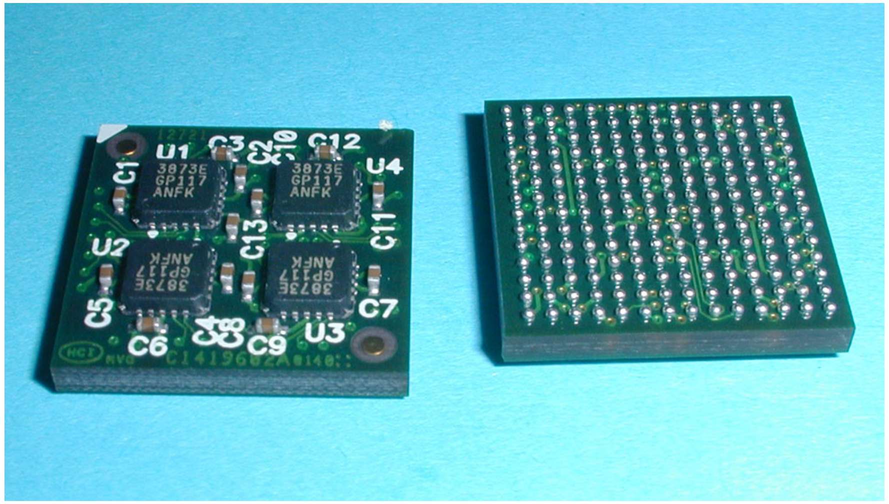


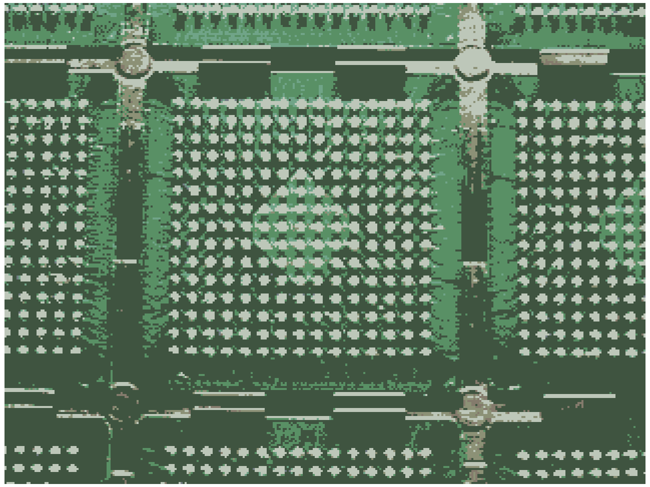


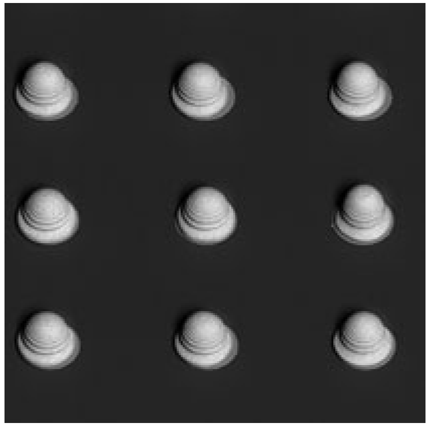


Chip-Hertsellung

❍ Ball Grid







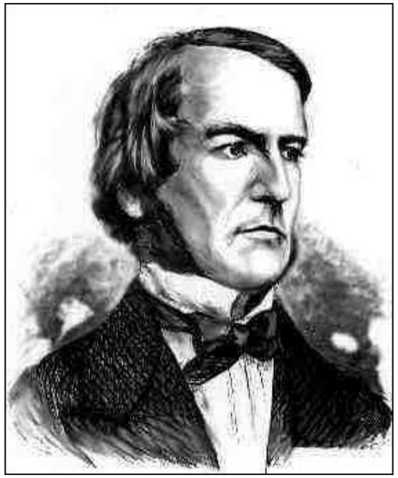
M.Bogdan

9 Schaltnetze

- **Entwurf und Realisierung digitaler Schaltnetze**
  - ⇨ **Formale Grundlagen**
  - ⇨ **Realisierung**
  - ⇨ **Entwurf**
  - ⇨ **Laufzeiteffekte**

9.1 Formale Grundlagen

- **George Boole (1815-1864)**
  - ⇨ **Algebra der Logik (Boolesche Algebra)**



Def. 9.1: Eine Boolesche Algebra ist eine Menge *V={a,b,c,...}*, auf der zwei zweistellige Operationen ◊ und # so definiert sind, dass durch ihre Anwendung auf Elemente aus V wieder Elemente aus V entstehen (Abgeschlossenheit).
Es müssen die Huntingtonschen Axiome gelten.

Huntingtonschen Axiome

- **Kommutativgesetze:**

$$a \lozenge b = b \lozenge a$$

$$a \# b = b \# a$$

- **Distributivgesetze:**

$$a \lozenge (b \# c) = (a \lozenge b) \# (a \lozenge c)$$

$$a \# (b \lozenge c) = (a \# b) \lozenge (a \# c)$$

- **Neutrale Elemente:**

Es existieren zwei Elemente *e*, *n* $\in$ *V*, so dass gilt:

$a \lozenge e = a$ **(*e* wird <u>Einselement</u> genannt)**

$a \# n = a$ **(*n* wird <u>Nullelement</u> genannt)**

- **Inverse Elemente:**

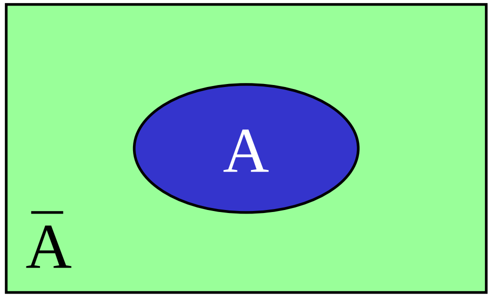
Für alle *a* $\in$ *V* gibt es ein $\overline{a}$, so dass gilt:

$$a \lozenge \overline{a} = n$$

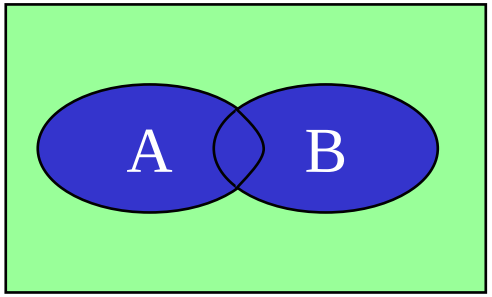
$$a \# \overline{a} = e$$

Beispiel: Mengenalgebra

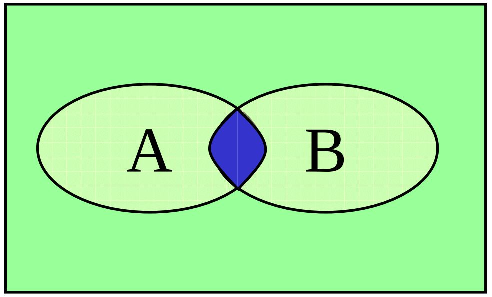
Boolesche Algebra	Mengenalgebra	
V	*P(T)*	**Potenzmenge einer Grundmenge T**
#	$\cup$	**Vereinigung**
◊	$\cap$	**Schnitt**
n	$\varnothing$	**Leere Menge**
e	*T*	**Grundmenge**
$\bar{a}$	$\bar{A}$	**Komplementmenge von A**



Komplement



$A \cup B$



$A \cap B$

Beispiel: Mengenalgebra

- **Grundmenge**

  T={,,}

- **Potenzmenge**

  P(T)= {∅,{}, {}, {}, {,}, {,}, {,}, {,,}}

- **Für alle A, B, C $\in$ T gilt:**
  - **Abgeschlossenheit**

    $A \cup B \in P(T)$ $\qquad$ $A \cap B \in P(T)$
  - **Kommutativgesetze**

    $A \cap B = B \cap A$ $\qquad$ $A \cup B = B \cup A$
  - **Distributivgesetze**

    $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $\qquad$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  - **Neutrale Elemente**

    $A \cap T = A$ $\qquad$ $A \cup \emptyset = A$
  - **Inverse Elemente**

    $A \cap \overline{A} = \emptyset$ $\qquad$ $A \cup \overline{A} = T$

Schaltalgebra

- **Boolesche Algebra bei der die folgende Zuordnungstabelle gilt:**

Boolesche Algebra	**Schaltalgebra**	
V	$\boldsymbol{B} = \{0,1\}$	**Boolesche Grundmenge**
$\#$	$\vee$	**Oder**
$\Diamond$	$\wedge$	**Und**
n	0	**neutrales Element**
e	1	**Einselement**
$\overline{a}$	$\overline{x_i}$	**Negation**

- **Andere Schreibweisen**
  - **Oder:** $x_1 + x_2$, $x_1 \mid x_2$
  - **Und:** $x_1 \bullet x_2$, $x_1 * x_2$, $x_1 . x_2$, $x_1 \,\&\, x_2$, $x_1 x_2$
  - **Negation:** $/x_1$, $'x_1$, $\neg x_1$

Funktionstabellen

- **Aus den Huntigtonschen Axiomen lassen sich bereits die Funktionstabellen der in der Algebra definierten Verknüpfungen ableiten**

Oder

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Und

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Nicht

x_1	$\overline{x_1}$
0	1
1	0

Weitere Sätze

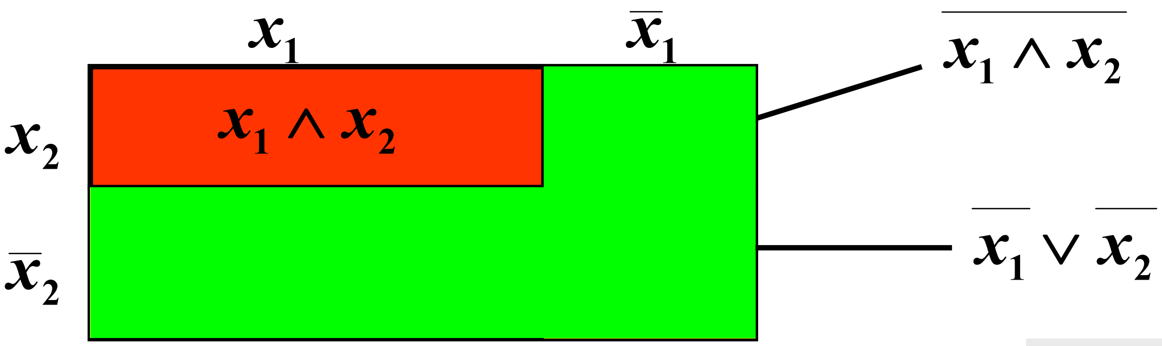
- **Aus den vier Huntigtonschen Axiomen lassen sich weitere Sätze ableiten**
  - **Assoziativgesetze**

    $(x_1 \wedge x_2) \wedge x_3 = x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3)$ $(x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3)$
  - **Idempotenzgesetze**

    $(x_1 \wedge x_1) = x_1$ $(x_1 \vee x_1) = x_1$
  - **Absorptionsgesetze**

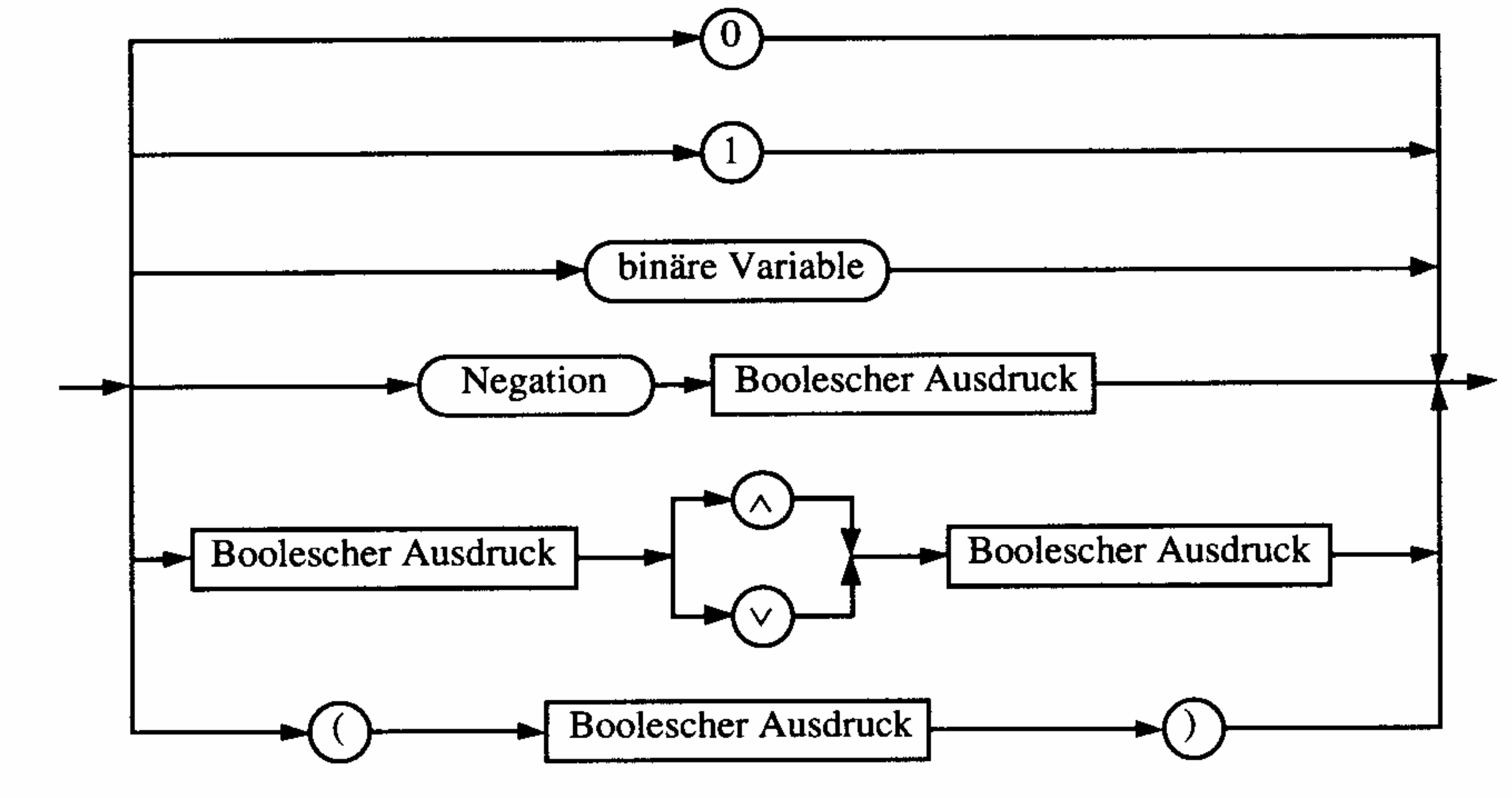
    $x_1 \wedge (x_1 \vee x_2) = x_1$ $x_1 \vee (x_1 \wedge x_2) = x_1$
  - **DeMorgan-Gesetze**

    $\overline{x_1 \wedge x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$ $\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$



Boolescher Ausdruck

- **Zeichenfolge, die aus binären Variablen, den Operatoren $\wedge$, $\vee$ und Klammern besteht und den folgenden syntaktischen Regeln folgt:**



Boolescher Ausdruck

- **Boolesche Ausdrücke sind nur eine syntaktische Konstruktion**
  - **Bedeutung erhält ein Boolescher Ausdruck erst, wenn den Konstanten 0 und 1 die Wahrheitswerte „falsch“ oder „wahr“ zugeordnet wird**
- **Interpretation**
  - **Belegung der der binären Variablen eines Booleschen Ausdrucks mit Wahrheitswerten**
  - **Liefert eine Aussage, die entweder „wahr“ oder „falsch“ sein kann**
  - **Anwendung: Simulation**
- **Tautologie**
  - **Boolescher Ausdruck, bei dem alle Belegungen der binären Variablen den Wahrheitswert „wahr“ liefern**
  - $(x_1 \vee x_2) \vee (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2)$
  - **Anwendung: Verifikation von Schaltungen**

Boolesche Funktion

Def. 9.2: Es sei ein n-Tupel von binären Variablen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **gegeben. Eine <u>n-stellige Boolesche Funktion</u> ordnet jeder Belegung der Variablen** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **mit den Wahrheitswerten „wahr“ oder „falsch“ genau einen Wahrheitswert zu.**

$$f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\} \quad \textbf{oder} \quad f : B^n \rightarrow B$$

Satz 9.1: Es gibt genau 2^n verschiedene Belegungen der Variablen einer n-stelligen Booleschen Funktion. Die Anzahl verschiedener n-stelliger Boolescher Funktionen beträgt $2^{(2^n)}$

Bew: Über Funktionstabelle □

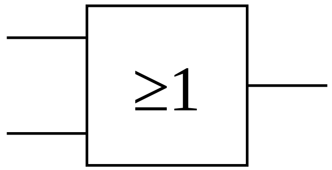
Übersicht der 2-stelligen Booleschen Funktionen

Benennung der Verknüpfung	Funktionswert $y = f(x_1, x_2)$; $x_1 = 0\,1\,0\,1$; $x_2 = 0\,0\,1\,1$	Schreibweise mit den Zeichen $\wedge \vee -$	Bemerkung
Null	$y_0 = 0\,0\,0\,0$	0	Null
UND–Verknüpfung	$y_1 = 0\,0\,0\,1$	$x_1 \wedge x_2$	x_1 UND x_2
Inhibition	$y_2 = 0\,0\,1\,0$	$\overline{x}_1 \wedge x_2$	
Transfer	$y_3 = 0\,0\,1\,1$	x_2	
Inhibition	$y_4 = 0\,1\,0\,0$	$x_1 \wedge \overline{x}_2$	
Transfer	$y_5 = 0\,1\,0\,1$	x_1	
Antivalenz	$y_6 = 0\,1\,1\,0$	$(x_1 \wedge \overline{x}_2) \vee (\overline{x}_1 \wedge x_2)$	Exclusiv–ODER
ODER–Verknüpfung	$y_7 = 0\,1\,1\,1$	$x_1 \vee x_2$	x_1 ODER x_2
NOR–Verknüpfung	$y_8 = 1\,0\,0\,0$	$\overline{x_1 \vee x_2}$	NICHT–ODER
Äquivalenz	$y_9 = 1\,0\,0\,1$	$(x_1 \wedge x_2) \vee (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2)$	
Komplement	$y_{10} = 1\,0\,1\,0$	$\overline{x}_1$	
Implikation	$y_{11} = 1\,0\,1\,1$	$\overline{x}_1 \vee x_2$	
Komplement	$y_{12} = 1\,1\,0\,0$	$\overline{x}_2$	
Implikation	$y_{13} = 1\,1\,0\,1$	$x_1 \vee \overline{x}_2$	
NAND–Verknüpfung	$y_{14} = 1\,1\,1\,0$	$\overline{x_1 \wedge x_2}$	NICHT–UND
Eins	$y_{15} = 1\,1\,1\,1$	1	Eins

Darstellung einiger zweistelliger Funktionen

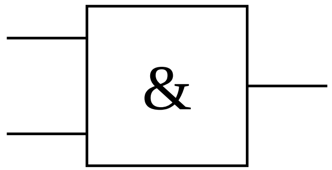
ODER

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



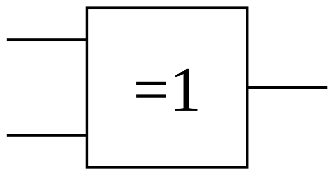
UND

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Exklusiv-Oder

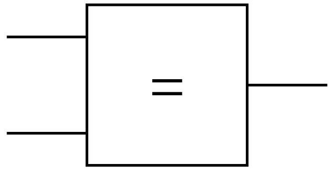
x_1	x_2	$x_1 \oplus x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



Darstellung einiger zweistelliger Funktionen

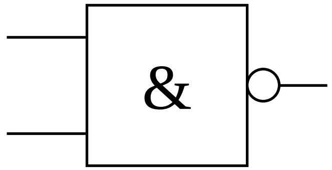
Äquivalenz

x_1	x_2	$x_1 \equiv x_2$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



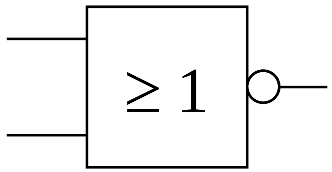
NAND

x_1	x_2	$x_1 \overline{\wedge} x_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



NOR

x_1	x_2	$x_1 \overline{\vee} x_2$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



Operatorensysteme

Def. 9.3: Eine Menge von Operatoren (Operatorensystem) heißt vollständig für eine Menge F von Funktionen, wenn sich jede Funktion in F durch die Operatoren darstellen lässt.

- **Beispiel für ein vollständiges Operatorensysteme:**

$$\{\wedge, \vee, \overline{}\}$$

Beweis:

Rückführung von $\{\wedge, \vee, \overline{}\}$ auf $\{\wedge, \overline{}\}$:

$$\vee: \quad a \vee b = \overline{\overline{(a \vee b)}} = \overline{(\overline{a} \wedge \overline{b})}$$

Entsprechend zeigt man, dass $\{\vee, \overline{}\}$ ein vollständiges Operatorensystem ist.

Operatorensysteme

- **Beispiele für vollständige Operatorensysteme:**

Operatorensystem	Negation	Konjunktion	Disjunktion
$(\wedge, \vee, \bar{\ })$	$\bar{x}_1$	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$
$(\wedge, \bar{\ })$	$\bar{x}_1$	$x_1 \wedge x_2$	$\overline{\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2}$
$(\vee, \bar{\ })$	$\bar{x}_1$	$\overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2}$	$x_1 \vee x_2$
$(\overline{\wedge})$	$x_1 \overline{\wedge} x_1$	$(x_1 \overline{\wedge} x_2) \overline{\wedge} (x_1 \overline{\wedge} x_2)$	$(x_1 \overline{\wedge} x_1) \overline{\wedge} (x_2 \overline{\wedge} x_2)$
$(\overline{\vee})$	$x_1 \overline{\vee} x_1$	$(x_1 \overline{\vee} x_1) \overline{\vee} (x_2 \overline{\vee} x_2)$	$(x_1 \overline{\vee} x_2) \overline{\vee} (x_1 \overline{\vee} x_2)$
$(\wedge, \oplus)$	$x_1 \oplus 1$	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \wedge x_2 \oplus x_1 \oplus x_2$
$(\vee, \equiv)$	$x_1 \equiv 0$	$(x_1 \vee x_2) \equiv x_1 \equiv x_2$	$x_1 \vee x_2$

Auswertung

- **Zum Wahrheitswert einer Aussage gelangt man durch rekursives Auswerten der Booleschen Funktionen in einem Ausdruck**
  - ⇨ **Negation vor Konjunktion**
  - ⇨ **Konjunktion vor Disjunktion**
  - ⇨ **Klammerung beachten**
- **Beispiel: Ist die folgende Funktion eine Tautologie?**

$$f(x_1, x_2) = (x_1 \wedge x_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2) \equiv (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2)$$

9.2 Normalformen

- **Eine Funktion kann durch verschiedene Boolesche Ausdrücke beschrieben werden**
  - ⇨ **Auch bei der Beschränkung auf ein vollständiges Operatorensystem ergeben sich noch mehrere Darstellungsmöglichkeiten**
- **Normalformen bilden eine Standarddarstellung in einem vollständigen Operatorensystem**
  - ⇨ **Disjunktive Normalform**
  - ⇨ **Konjunktive Normalform**
- **Es gibt weitere Normalformen, die in dieser Vorlesung nicht behandelt werden**
  - ⇨ **Reed-Muller-Form**
  - ⇨ **Äquivalenzpolynom**

Literal und Produktterm

Def. 9.4: Ein Literal L_i ist entweder eine Variable x_i oder ihre Negation $\overline{x}_i$. $L_i \in \{x_i, \overline{x}_i\}$

Def. 9.5: Ein Produktterm $K(x_1,\ldots,x_m)$ ist die Konjunktion von Literalen oder den Konstanten 0 oder 1:

$$\bigwedge_{i=1}^{m} L_i = L_1 \wedge \ldots \wedge L_m$$

- **Jeder Produktterm $K(x_1,\ldots,x_m)$ kann so dargestellt werden, dass eine Variable x in höchstens einem Literal vorkommt.**
  - ⇨ **Falls $Lj=x$ und $L_k=x$ ist, gilt** $L_j \wedge L_k = x$
  - ⇨ **Falls $Lj=\overline{x}$ und $L_k=\overline{x}$ ist, gilt** $L_j \wedge L_k = \overline{x}$
  - ⇨ **Falls $Lj=x$ und $L_k=\overline{x}$ ist, gilt** $L_j \wedge L_k = 0$

Implikant und Minterm

Def. 9.6: Ein Produktterm $K(x_1,...,x_m)$ **heißt <u>Implikant</u> einer Booleschen Funktion** $f(x_1,...,x_n)$**, wenn aus** $K(x_1,...,x_m)=1$ **für eine Belegung** $x_1,...,x_m \in B^n$ **folgt, dass** $f(x_1,...,x_n)=1$.

Def. 9.7: Ein Implikant $K(x_1,...,x_n)$ **heißt <u>Minterm</u> (***m***), wenn ein Literal jeder Variablen** x_i **der Funktion** $f(x_1,...,x_n)$ **genau einmal in** K **vorkommt.**

- **Implikanten haben ein oder mehrere 1-Stellen in der Funktion**
  - ⇨ **mehrere Implikanten können sich überdecken**
- **Ein Minterm ist genau bei einer Belegung der Variablen gleich 1**
  - ⇨ **Ein Minterm trägt zu genau einer 1-Stelle der Funktion bei**
  - ⇨ **Die Minterme einer Funktion können sich nicht überdecken**

Mintermtabelle

Satz 9.2: Zu einer Booleschen Funktion $f(x_1,\ldots,x_n)$ mit n Literalen gibt es maximal 2^n verschiedene Minterme m_i.

Bew: Durch Aufzählung aller Kombinationen und Induktion über n.

- **Man definiert eine Reihenfolge aller Minterme über den Index i**

i_{10}	i_2	**Minterm** m_i
0	000	$\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_0$
1	001	$\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_0$
2	010	$\bar{x}_2 \wedge x_1 \wedge \bar{x}_0$
3	011	$\bar{x}_2 \wedge x_1 \wedge x_0$
4	100	$x_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_0$
5	101	$x_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_0$
6	110	$x_2 \wedge x_1 \wedge \bar{x}_0$
7	111	$x_2 \wedge x_1 \wedge x_0$

Disjunktive Normalform

Def. 9.8: Es sei eine Boolesche Funktion $f(x_1,\ldots,x_n):B^n \to B$ **gegeben. Ein Boolescher Ausdruck heißt disjunktive Normalform (DNF) der Funktion** f**, wenn er aus einer disjunktiven Verknüpfung von Mintermen** K_i **besteht.**

$$f(x_1,\ldots,x_n) = K_0 \vee K_1 \vee \ldots \vee K_k \text{ mit } 0 \le k \le 2^n - 1$$

$$= \bigvee_{0}^{2^n-1} \alpha_i \wedge K_i \text{ mit } \alpha_i \in \{0,1\}$$

- α_i **heißt** **Mintermkoeffizient**
  - ⇨ $\alpha_i = 1$, **wenn der Minterm** m_i **zu** f **gehört,**
  - ⇨ $\alpha_i = 0$, **sonst**
- **Beispiele**

$f(x_2, x_1, x_0) = x_2 x_1 x_0 \vee x_2 \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_2 x_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0$ **ist eine DNF**

$f(x_2, x_1, x_0) = x_2 x_1 x_0 \vee x_2 \bar{x}_1 \vee x_1 (x_2 x_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_0)$ **ist keine DNF**

Disjunktion und Maxterm

Def. 9.9: Es sei $D(x_1,\ldots,x_m)$ **eine Disjunktion von Literalen, wobei die Konstanten** 0 **und** 1 **auftreten dürfen.** $D(x_1,\ldots,x_m)$ **heißt <u>Implikat</u> einer Booleschen Funktion** $f(x_1,\ldots,x_n)$**, wenn aus** $D(x_1,\ldots,x_m)=0$ **für eine Belegung** $x_1,\ldots,x_n \in B^n$ **folgt, dass** $f(x_1,\ldots,x_n)=0$.

Def. 9.10: Ein Implikat $D(x_1,\ldots,x_n)$ **heißt <u>Maxterm</u>** (M)**, wenn ein Literal jeder Variablen** x_i **der Funktion** $f(x_1,\ldots,x_n)$ **genau einmal in** D **vorkommt.**

- **Implikate haben ein oder mehrere Nullstellen in der Funktion**
  - ⇨ **mehrere Implikaten können sich überdecken**
- **Ein Maxterm ist genau bei einer Belegung der Variablen gleich 0**
  - ⇨ **Ein Maxterm trägt zu genau einer Nullstelle der Funktion bei**
  - ⇨ **Die Maxterme einer Funktion können sich in den 1-Stellen überdecken**

Min- und Maxtermtabelle

Satz 9.3: Zu einer Booleschen Funktion $f(x_1,\ldots,x_n)$ mit n Literalen gibt es maximal 2^n verschiedene Maxterme M_i.

Bew: Durch Aufzählung aller Kombinationen und Induktion über n

- **Man definiert eine Reihenfolge aller Maxterme über den Index i analog zu den Mintermen**

i_{10}	i_2	**Minterm** m_i	**Maxterm** M_i
0	000	$\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_0$	$x_2 \vee x_1 \vee x_0$
1	001	$\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_0$	$x_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0$
2	010	$\bar{x}_2 \wedge x_1 \wedge \bar{x}_0$	$x_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0$
3	011	$\bar{x}_2 \wedge x_1 \wedge x_0$	$x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0$
4	100	$x_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_0$	$\bar{x}_2 \vee x_1 \vee x_0$
5	101	$x_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_0$	$\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0$
6	110	$x_2 \wedge x_1 \wedge \bar{x}_0$	$\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0$
7	111	$x_2 \wedge x_1 \wedge x_0$	$\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0$

Konjunktive Normalform

Def. 9.11: Es sei eine Boolesche Funktion $f(x_1,\dots,x_n):B^n \rightarrow B$ gegeben. Ein Boolescher Ausdruck heißt Konjunktive Normalform (KNF) der Funktion f, wenn er aus einer konjunktiven Verknüpfung von Maxtermen D_i besteht.

$$f(x_1,\dots,x_n) = D_0 \wedge D_1 \wedge \dots \wedge D_k \text{ mit } 0 \le k \le 2^n - 1$$

$$= \bigwedge_{0}^{2^n-1} (\beta_i \vee D_i) \text{ mit } \beta_i \in \{0,1\}$$

- β_i **heißt <u>Maxtermkoeffizient</u>**
  - $\beta_i = 0$, **wenn der Maxterm** m_i **zu** f **gehört,**
  - $\beta_i = 1$, **sonst**
- **Beispiel**

$f(x_2, x_1, x_0) = (x_2 \vee x_1 \vee x_0) \wedge (x_2 \vee \overline{x}_1 \vee x_0) \wedge (\overline{x}_2 \vee x_1 \vee \overline{x}_0)$ **ist eine KNF**

KNF-DNF Umwandlung

Satz 9.4: Für jede Boolesche Funktion $f(x_1,\ldots,x_n)$ gilt $\alpha_i = \beta_i$.

Bew: 2 Fälle

- **Fall 1:** $\alpha_i=1$
  - $\Rightarrow$ m_i **gehört zur DNF der Funktion** f
  - $\Rightarrow$ M_i **gehört nicht zur KNF der Funktion** f
  - $\Rightarrow$ $\beta_i=1$
- **Fall 2:** $\alpha_i=0$
  - $\Rightarrow$ m_i **gehört nicht zur DNF der Funktion** f
  - $\Rightarrow$ M_i **gehört zur KNF der Funktion** f
  - $\Rightarrow$ $\beta_i=0$

Zusammenfassung der wichtigsten Begriffe

- **Literal:** Boolesche Variable
- **Produktterm:** UND-Verknüpfung von Literalen
- **Implikant:** Produktterm, der eine oder mehrere „1“-Stellen einer booleschen Funktion beschreibt (impliziert)
- **Implikat:** Disjunktion (ODER-Verknüpfung) von Literalen
- **Minterm:** Implikant, der genau eine „1“-Stelle einer booleschen Funktion beschreibt
- **Maxterm:** Implikat, der genau eine „0“-Stelle einer booleschen Funktion beschreibt
- **Normalform:** Darstellung einer Booleschen Funktion durch Minterme (DNF) oder Maxterme (KNF)

9.3 Der Shannonsche Entwicklungssatz

- **DNF und KNF können durch einfache logische Umformungen in gewöhnliche disjunktive und konjunktive Formen gebracht werden**
  - ⇨ **DF und KF**
- **Zur Berechnung der Normalformen ist der shannonsche Entwicklungssatz hilfreich**

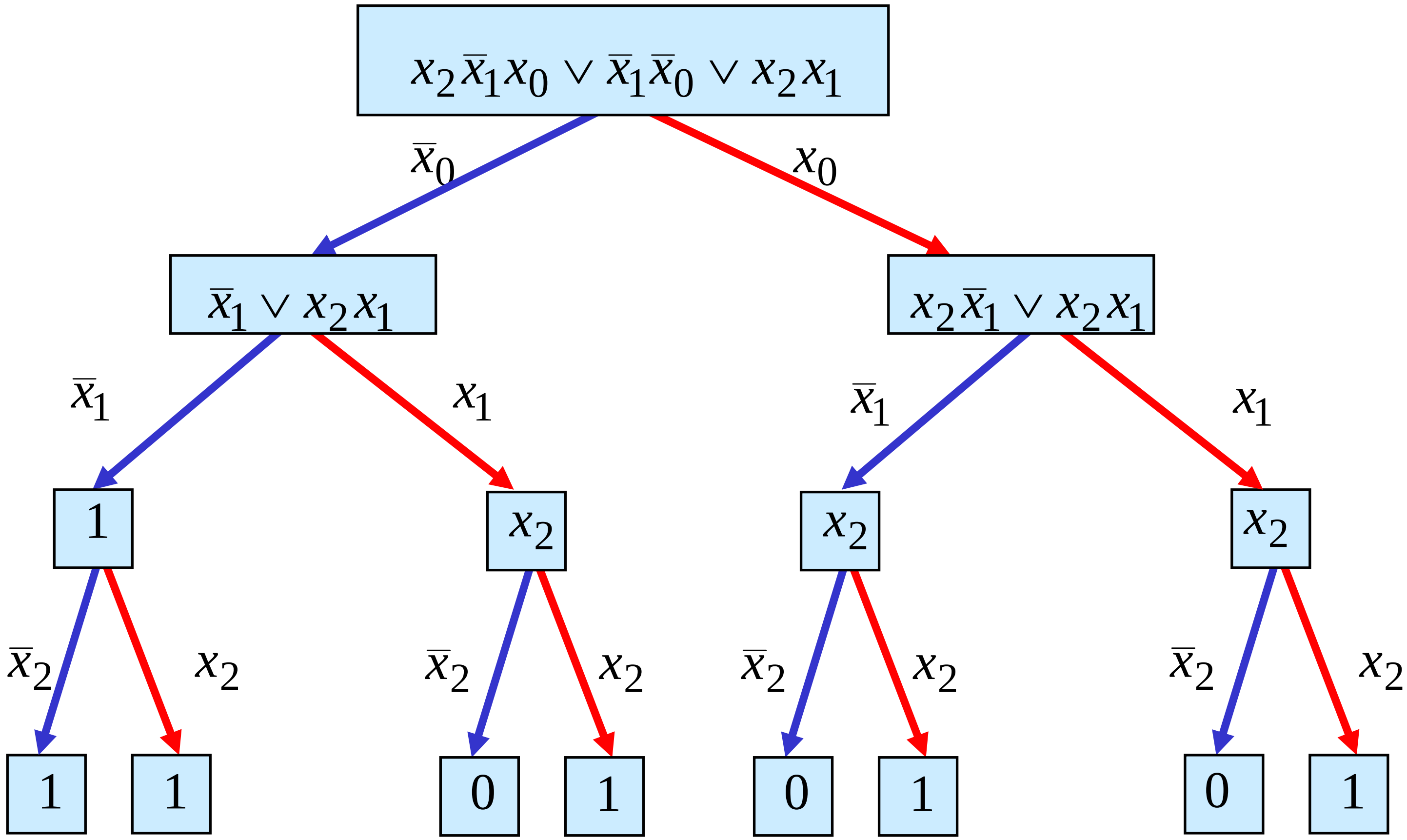
Satz 9.5: Für jede Boolesche Funktion $f(x_1,\ldots,x_n)$ **gilt**

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \left(x_i \wedge f(x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_n)\right) \vee \left(\overline{x}_i \wedge f(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n)\right)$$

- **Beispiel:**

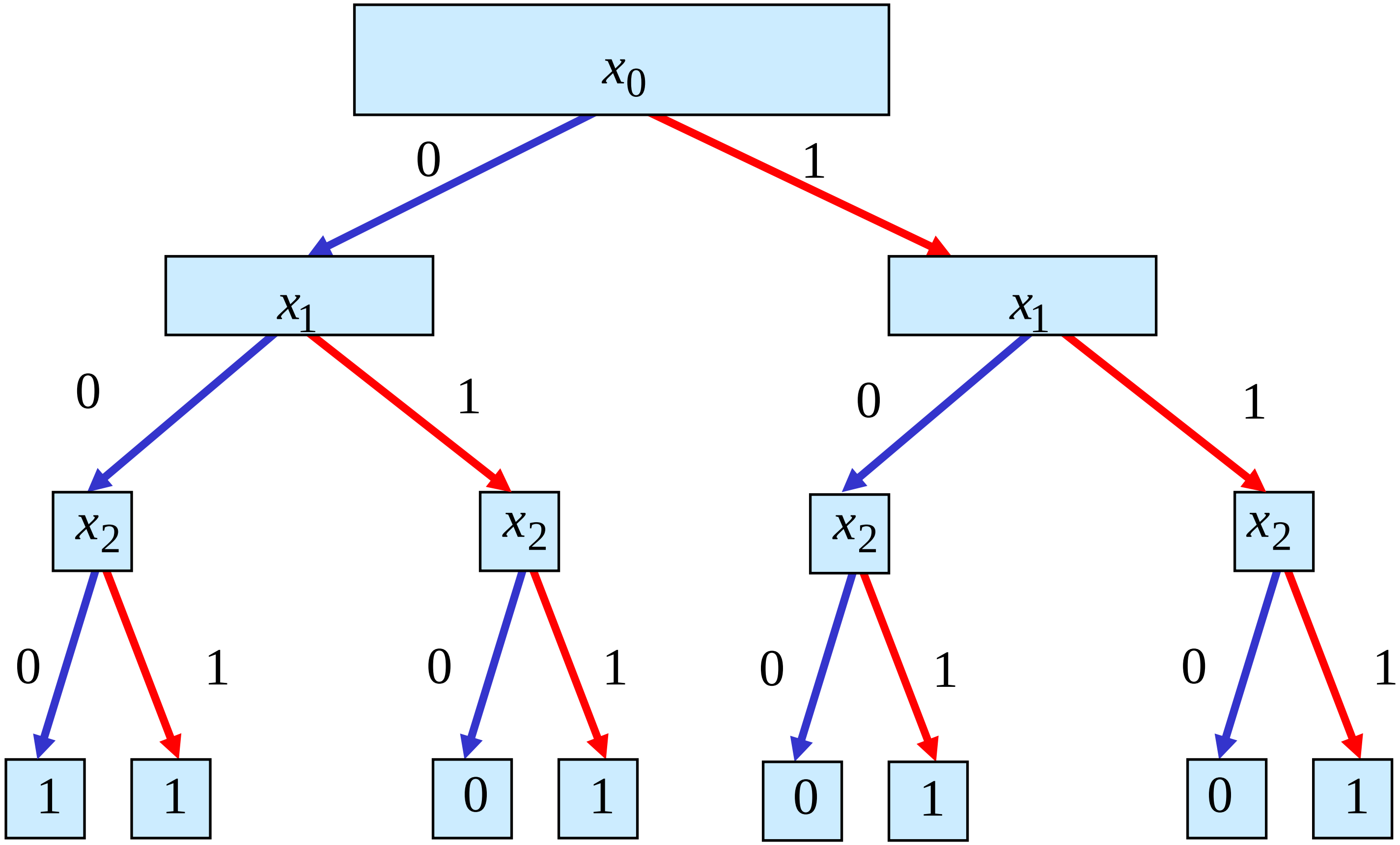
$$\begin{aligned} f(x_2,x_1,x_0) &= x_2\overline{x}_1x_0 \vee \overline{x}_1\overline{x}_0 \vee x_2x_1 \\ &= x_0(x_2\overline{x}_1 \vee x_2x_1) \vee \overline{x}_0(\overline{x}_1 \vee x_2x_1) \\ &= x_2\overline{x}_1x_0 \vee x_2x_1x_0 \vee \overline{x}_1\overline{x}_0 \vee x_2x_1\overline{x}_0 \\ &= x_2(\overline{x}_1x_0 \vee x_1x_0 \vee \overline{x}_1\overline{x}_0 \vee x_1\overline{x}_0) \vee \overline{x}_2(\overline{x}_1\overline{x}_0) \\ &= x_2x_1x_0 \vee x_2\overline{x}_1x_0 \vee x_2x_1\overline{x}_0 \vee x_2\overline{x}_1\overline{x}_0 \vee \overline{x}_2\overline{x}_1\overline{x}_0 \end{aligned}$$

Baumdarstellung



Binary Decision Diagram (BDD)

- Andere Interpretation der Shannon-Entwicklung

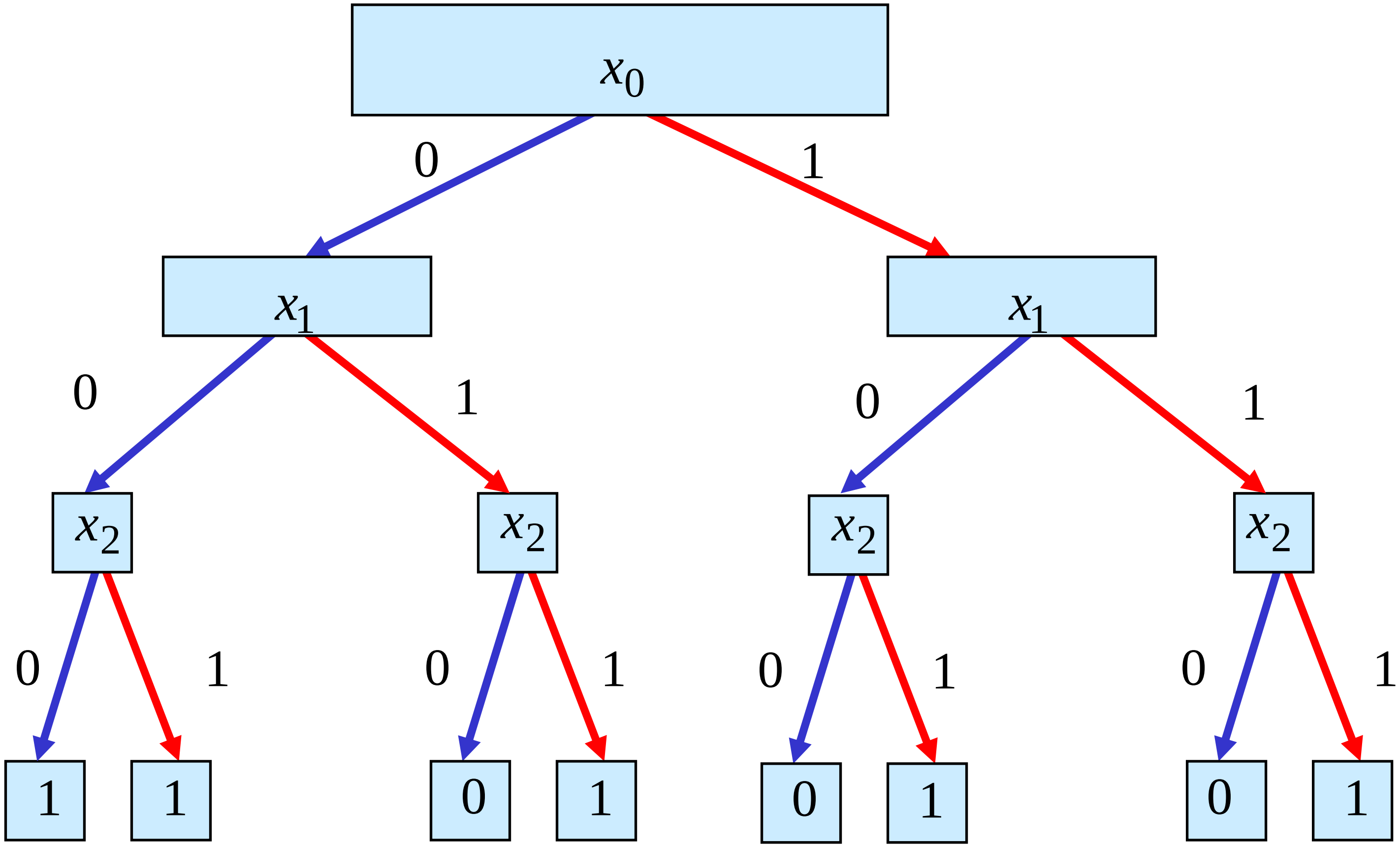


Reduzierte Baumdarstellungen

- **Da die Variablen in allen Pfaden in der gleichen Reihenfolge auftauchen, spricht man auch von einem ordered BDD (OBDD)**
- **Ein BDD benötigt** 2^n **Knoten bei** n **Variablen**
  - ⇨ **Für viele Anwendung ist die Speicherung aller Knoten nicht notwendig**
  - ⇨ **Knoten, deren Nachfolger gleich sind, können eliminiert werden (Regel 1)**
  - ⇨ **Teile des Baumes, die genau so noch einmal vorkommen, können gemeinsam genutzt werden (Regel 2)**
- **Es entsteht ein bezüglich einer Ordnung der Variablen eindeutiger reduzierter Baum**

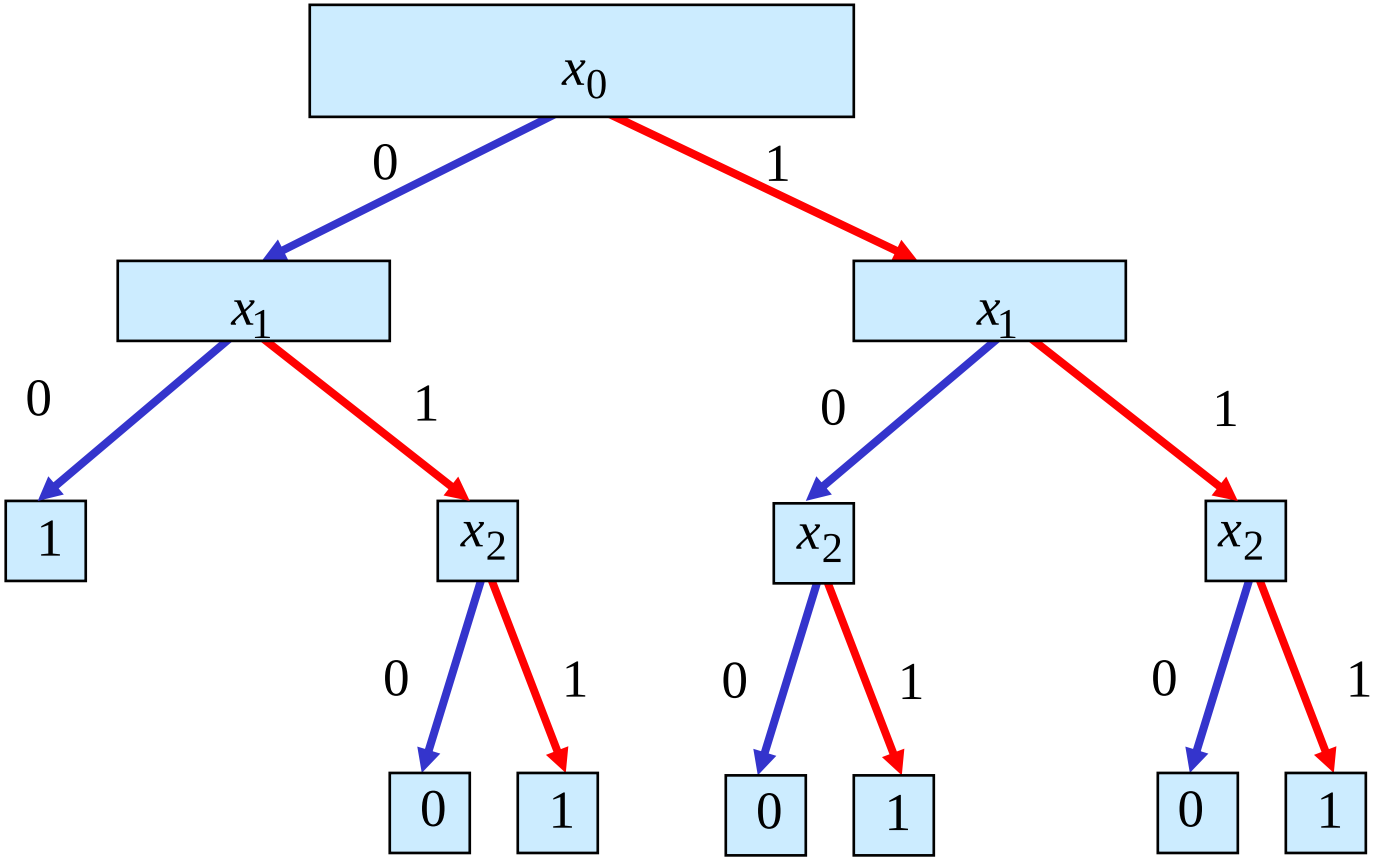
Reduced Ordered BDD (ROBDD)

Ausgangsgraph



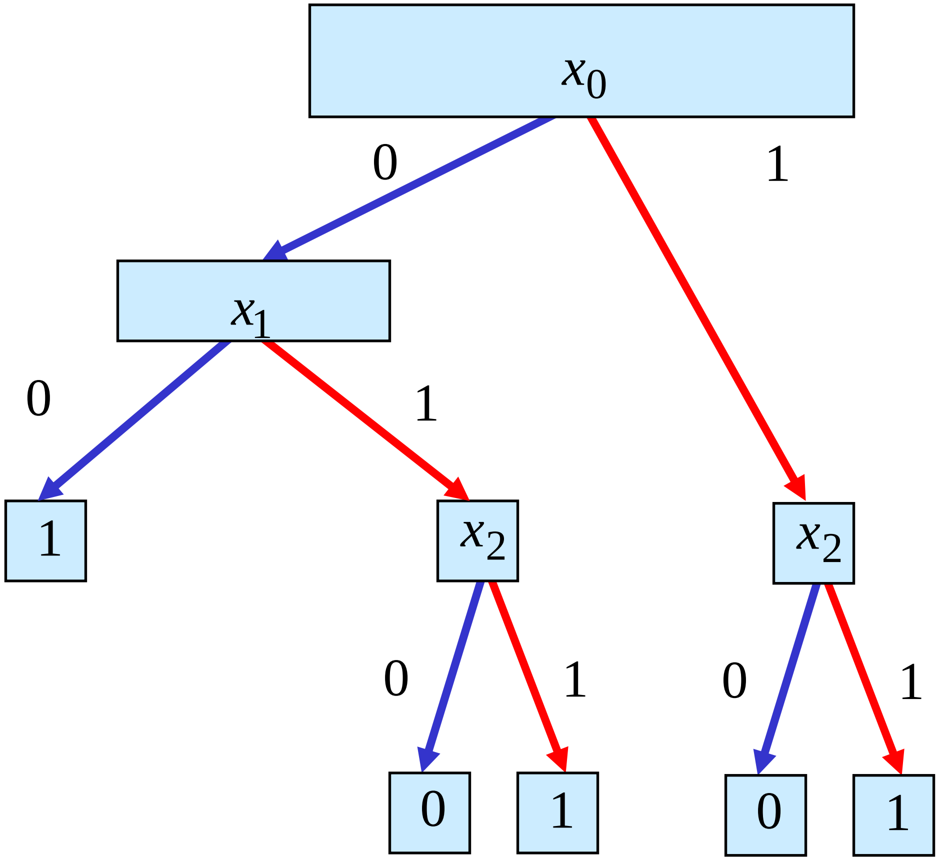
Reduced Ordered BDD (ROBDD)

Regel 1



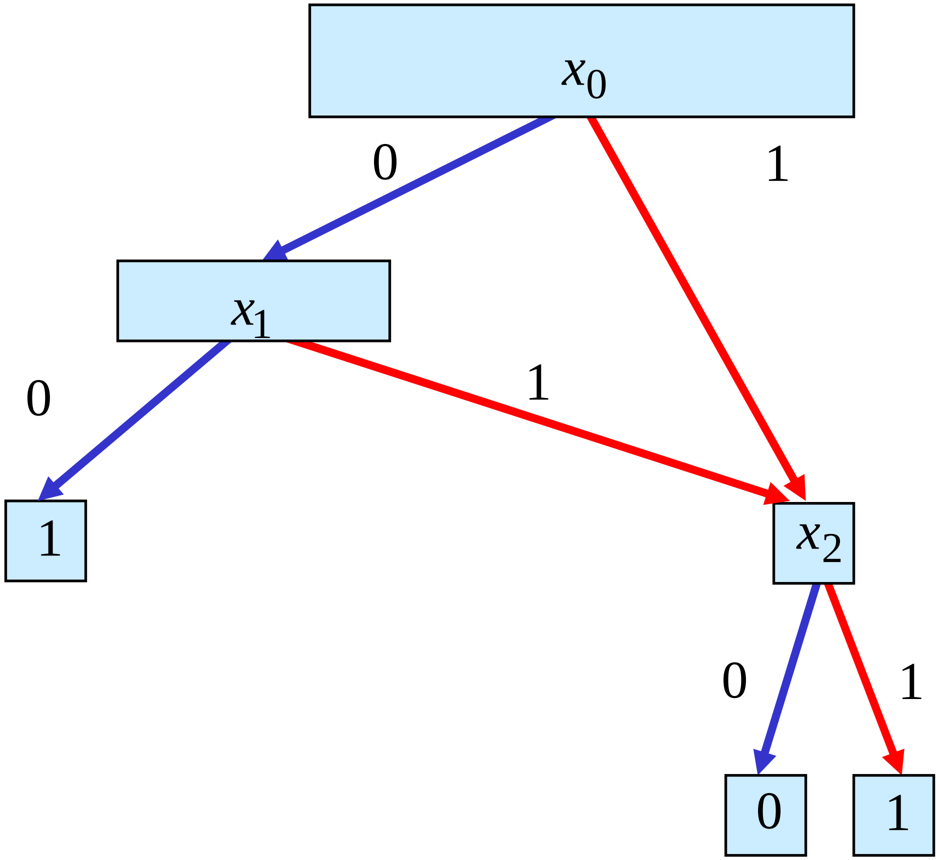
Reduced Ordered BDD (ROBDD)

Regel 1



Reduced Ordered BDD (ROBDD)

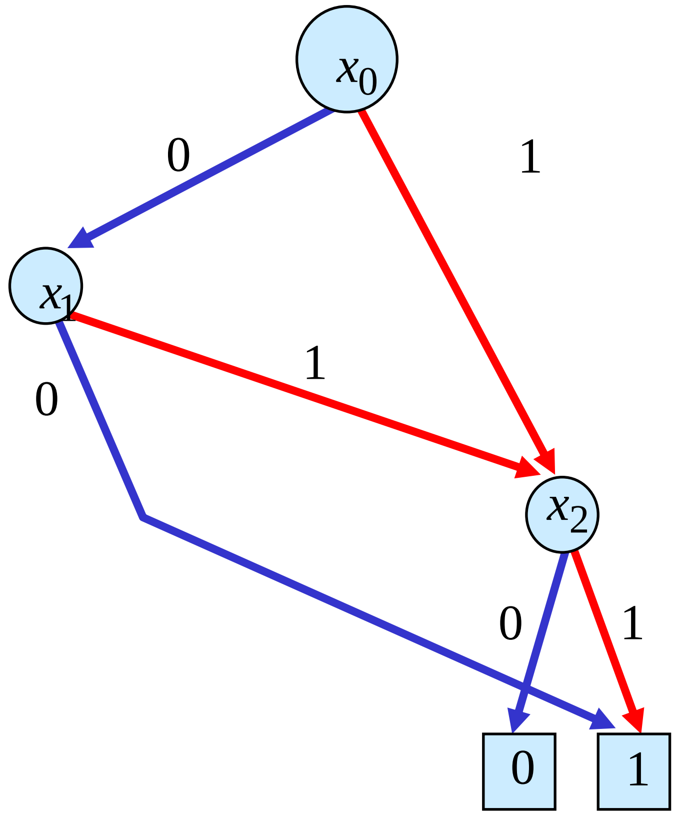
Regel 2



Anwendung 1: Simulation

- **Der Funktionswert wird ausgehend von der Wurzel ermittelt**
  - ⇨

$$f(x_2, x_1, x_0) = 0 \quad \text{für } x_2 = 0, x_1 = 1, x_0 = 0$$



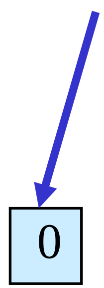
Anwendung 2: Verifikation

- **Die Gleichung**

$$s \equiv t \Leftrightarrow N(M(s,t)) = 0$$

kann umgeschrieben werden zu

$$s \equiv t \Leftrightarrow BDD(s \oplus t) = 0$$



DNF/KNF-Konversion

- **Statt der Min- und Maxterme kann man auch deren Indizes angeben**
  - f=MINt(0,3,4,7)
  - f=MAXt(1,2,5,6)
- **Für die Umwandlung der DNF einer Funktion f in die entsprechende KNF folgt direkt aus Satz 9.4:**
  - **Die Indizes der Minterme, die nicht in der Funktionsdarstellung der DNF der Funktion verwendet werden, sind Indizes der Maxterme der KNF der Funktion**

DNF/KNF-Konversion

i_{10}	$x_2 x_1 x_0$	**Minterme**	**Maxterme**
0	000	$\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_0$	
1	001		$x_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0$
2	010		$x_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0$
3	011	$\bar{x}_2 \wedge x_1 \wedge x_0$	
4	100	$x_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_0$	
5	101		$\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0$
6	110		$\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0$
7	111	$x_2 \wedge x_1 \wedge x_0$	

DNF : $f(x_2, x_1, x_0) = \bar{x}_2\bar{x}_1\bar{x}_0 \vee \bar{x}_2 x_1 x_0 \vee x_2\bar{x}_1\bar{x}_0 \vee x_2 x_1 x_0$

KNF : $f(x_2, x_1, x_0) = (x_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0)$

NAND-NOR-Konversion

- **Sowohl NAND- als auch NOR-System sind vollständige Operatorensysteme**
  - ⇨ **alle Booleschen Funktionen lassen sich mit mit diesen Operatoren darstellen**
  - ⇨ **da sowohl NAND- als auch NOR-Gatter besonders einfach realisiert werden, haben diese Darstellungen eine besondere Bedeutung im Schaltkreisentwurf**
- **NAND-Konversion aus der DNF:**

$$
\begin{aligned}
f(x_2, x_1, x_0) &= x_2 x_1 \bar{x}_0 \vee x_2 \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_2 x_1 x_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \\
&= \overline{\overline{x_2 x_1 \bar{x}_0 \vee x_2 \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_2 x_1 x_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0}} \\
&= \overline{\overline{x_2 x_1 \bar{x}_0} \wedge \overline{x_2 \bar{x}_1 x_0} \wedge \overline{\bar{x}_2 x_1 x_0} \wedge \overline{\bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0}} \\
&= \mathbf{NAND_4}(\mathbf{NAND_3}(x_2 x_1 \bar{x}_0), \mathbf{NAND_3}(x_2 \bar{x}_1 x_0), \\
&\quad \mathbf{NAND_3}(\bar{x}_2 x_1 x_0), \mathbf{NAND_3}(\bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0))
\end{aligned}
$$

NAND-NOR-Konversion

- **NOR-Konversion aus der KNF:**

$$f(x_2,x_1,x_0) = x_2x_1\bar{x}_0 \vee x_2\bar{x}_1x_0 \vee \bar{x}_2x_1x_0 \vee \bar{x}_2\bar{x}_1\bar{x}_0 \qquad \textbf{(DNF)}$$

$$= (x_2 \vee x_1 \vee x_0)(x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0)(\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0) \qquad \textbf{(KNF)}$$

$$= \overline{\overline{(x_2 \vee x_1 \vee x_0)(x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0)(\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0)}}$$

$$= \overline{\overline{(x_2 \vee x_1 \vee x_0)} \vee \overline{(x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0)} \vee \overline{(\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0)} \vee \overline{(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0)}}$$

$$= \mathbf{NOR_4}(\mathbf{NOR_3}(x_2,x_1,x_0), \mathbf{NOR_3}(x_2,\bar{x}_1,\bar{x}_0),$$

$$\mathbf{NOR_3}(\bar{x}_2,x_1,\bar{x}_0), \mathbf{NOR_3}(\bar{x}_2,\bar{x}_1,x_0))$$

9.4 Minimalformen

- **Boolesche Ausdrücke für eine Boolesche Funktion *f* in einer kürzestmöglichen Darstellung**
  - ⇨ **technische Realisierung mit möglichst geringen Kosten**
- **Disjunktive und konjunktive Minimalformen**
  - ⇨ **Disjunktion von Implikanten (DMF)**
  - ⇨ **Konjunktion von Implikaten (KMF)**
- **Die DMF und KMF sind nicht eindeutig**

$f(x_1, x_0) = \bar{x}_1 x_0 \vee x_1 \bar{x}_0$	**DMF**
$g(x_1, x_0) = \bar{x}_1 x_0 \vee x_1 x_0$	**keine DMF**
$= x_0$	**DMF**
$h(x_2, x_1, x_0) = (x_1 \vee \bar{x}_0) \wedge (x_2 \vee x_0)$	**KMF**
$k(x_2, x_1, x_0) = \bar{x}_0 \wedge (x_2 \vee \bar{x}_0) \wedge (x_2 \vee x_1)$	**keine KMF**
$= \bar{x}_0 \wedge (x_2 \vee x_1)$	**KMF**

Minimalformen

- **Das Finden einer Minimalform ist nicht trivial**
  - ⇨ **besonders bei Funktionen mit vielen Variablen**
  - ⇨ **oft nur suboptimale Lösungen**
  - ⇨ **Einsatz von Heuristiken**
- **Allgemeines zweischrittiges Vorgehen:**
  - ⇨ **Finden einer Menge von Implikanten bzw. Implikate mit einer möglichst geringen Anzahl von Literalen**
  - ⇨ **Auswahl aus dieser Menge, so dass deren Disjunktion bzw. Konjunktion die gesuchte Funktion erhält**

Ökonomische Kriterien für den Entwurf von Schaltnetzen

- **Geringe Kosten für den Entwurf (Entwurfsaufwand)**
  - ⇨ **Lohnkosten**
  - ⇨ **Rechnerbenutzung, Softwarelizenzen**
- **Geringe Kosten für die Realisierung (Realisierungsaufwand)**
  - ⇨ **Bauelemente, Gehäuseformen**
  - ⇨ **Kühlung**
- **Geringe Kosten für die Inbetriebnahme**
  - ⇨ **Kosten für den Test**
  - ⇨ **Fertigstellung programmierbarer Bauelemente**
- **Geringe Kosten für den Betrieb**
  - ⇨ **Wartung**
  - ⇨ **Energie**

Entwurfsziele

- **Manche Kriterien stehen im Widerspruch**
  - ⇨ **zuverlässigere Schaltungen erfordern einen höheren Realisierungsaufwand**
  - ⇨ **Verringerung des Realisierungsaufwand erfordert eine Erhöhung der Entwurfskosten**
- **Ziel des Entwurfs ist das Finden des günstigsten Kompromisses**
  - ⇨ **Korrektheit der Realisierung**
  - ⇨ **Einhaltung der technologischen Grenzen**
  - ⇨ **ökonomische Kriterien**

☞ **Wir betrachten in dieser Vorlesung nur die Minimierung des Realisierungsaufwands**

10 Minimierungsverfahren

- **Finden von Minimalformen Boolescher Funktionen**
  - **ohne Betrachtung der Zieltechnologie**
  - **mit Betrachtung der Zieltechnologie**
- **Drei Minimierungsansätze**
  - **algebraische Verfahren**
  - **graphische Verfahren**
  - **tabellarische Verfahren**
- **Man unterscheidet**
  - **exakte Minimierungsverfahren (z.B. Quine McCluskey), deren Ergebnis das absolute Minimum einer Schaltungsdarstellung ist**
  - **heuristische Minimierungsverfahren auf der Basis von iterativen Minimierungsschritten**

Darstellung Boolescher Funktionen durch Funktionstabellen

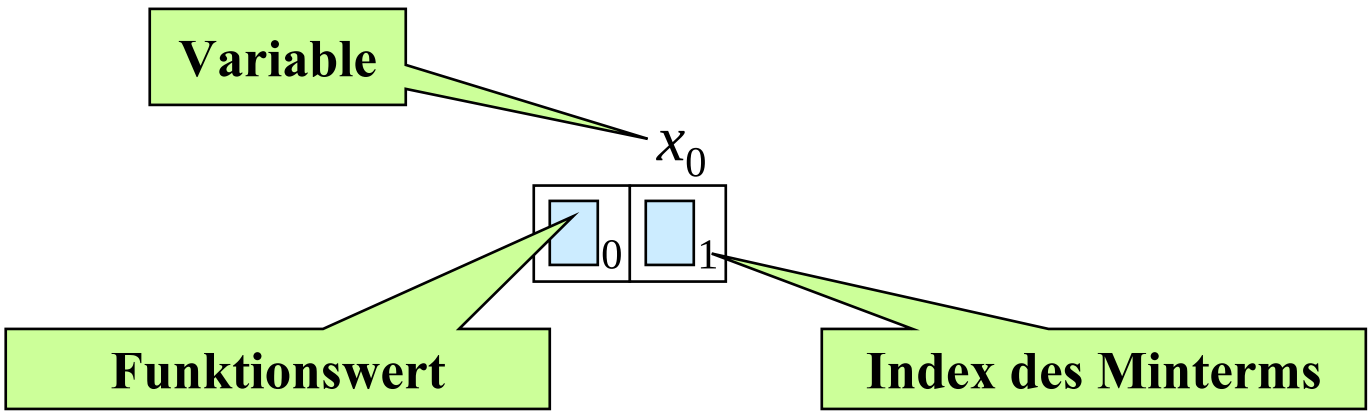
- **Darstellung des Verhaltens einer Booleschen Funktion mit Hilfe einer vollständigen Funktionstabelle**
  - **Jeder Belegung der Booleschen Variablen wird ein Funktionswert zugeordnet**
  - $f(x_2, x_1, x_0) \rightarrow y$, *mit* $x_i, y \in \{0,1\}$

Index	x_2	x_1	x_0	y
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

$$f(x_2, x_1, x_0) = x_1\bar{x}_0 \vee x_2x_1 \vee x_2\bar{x}_1\bar{x}_0$$

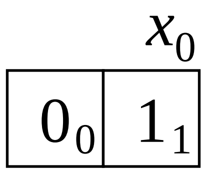
10.1 KV-Diagramme

- Nach Karnaugh und Veitch
- Möglichkeit, Boolesche Funktionen übersichtlich darzustellen
  - ⇨ bis 6 Variablen praktisch einsetzbar
- Ausgangspunkt ist ein Rechteck mit 2 Feldern

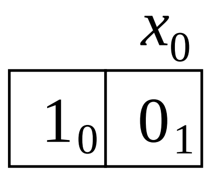


KV-Diagramme

- **Beispiele**

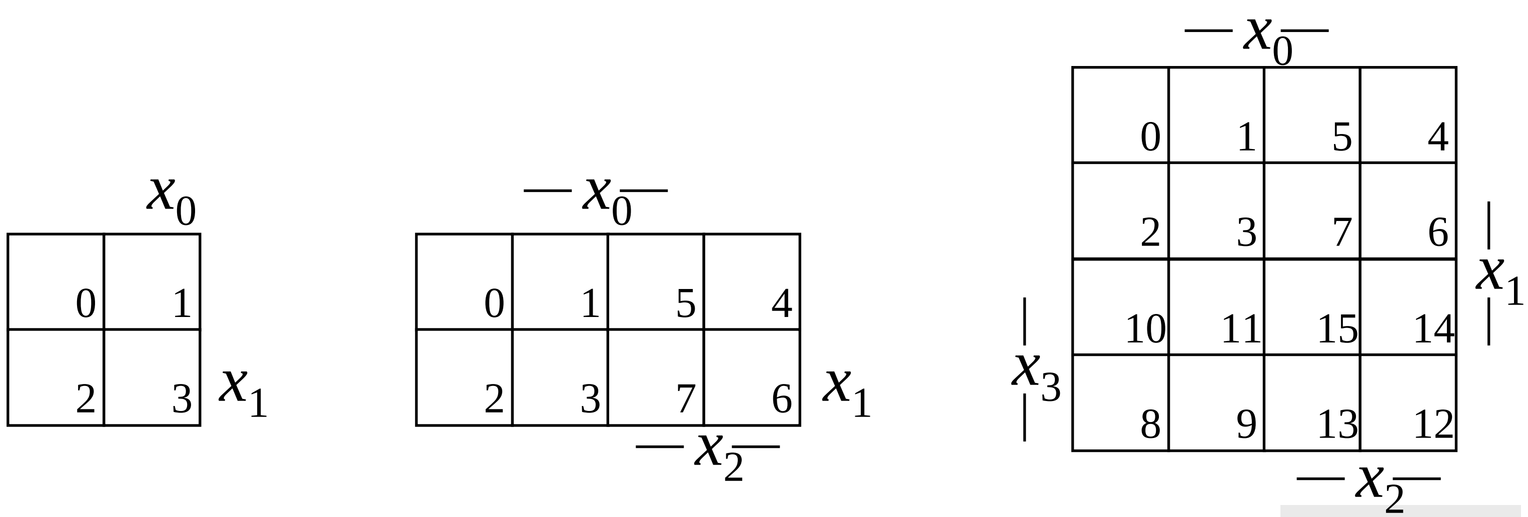


$f(x_0) = x_0$



$f(x_0) = \bar{x}_0$

- **Erweiterung durch Spiegelung**
  - ⇨ **für jede zusätzliche Variable verdoppelt sich die Zahl der Felder**



Eigenschaften von KV-Diagrammen

- Jedes Feld ist ein Funktionswert
  - ⇨ Ein Minterm der Funktion
  - ⇨ Eindeutige Variablenzuordnung
- Oft werden x_1 und x_2 vertauscht
  - ⇨ Lediglich eine andere Numerierung der Felder
  - ⇨ Kein Einfluss auf das Minimierungsverfahren
- Aufstellen der KV-Diagramme über die Funktionstabelle:

Index	x_2	x_1	x_0	y
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

$$f(x_2, x_1, x_0) = x_1\bar{x}_0 \vee x_2 x_1 \vee x_2\bar{x}_1\bar{x}_0$$

		x_0	x_0		
	0_0	0_1	0_5	1_4	
	1_2	0_3	1_7	1_6	x_1
			x_2	x_2	

M.Bogdan

KV-Diagramme über die KNF

- **Argumentation über die Nullstellen der Funktion**
  - ⇨ **Jede Nullstelle entspricht einem Maxterm**
- **Beispiel**

$$f(x_2, x_1, x_0) = x_1\bar{x}_0 \vee x_2 x_1 \vee x_2\bar{x}_1\bar{x}_0$$

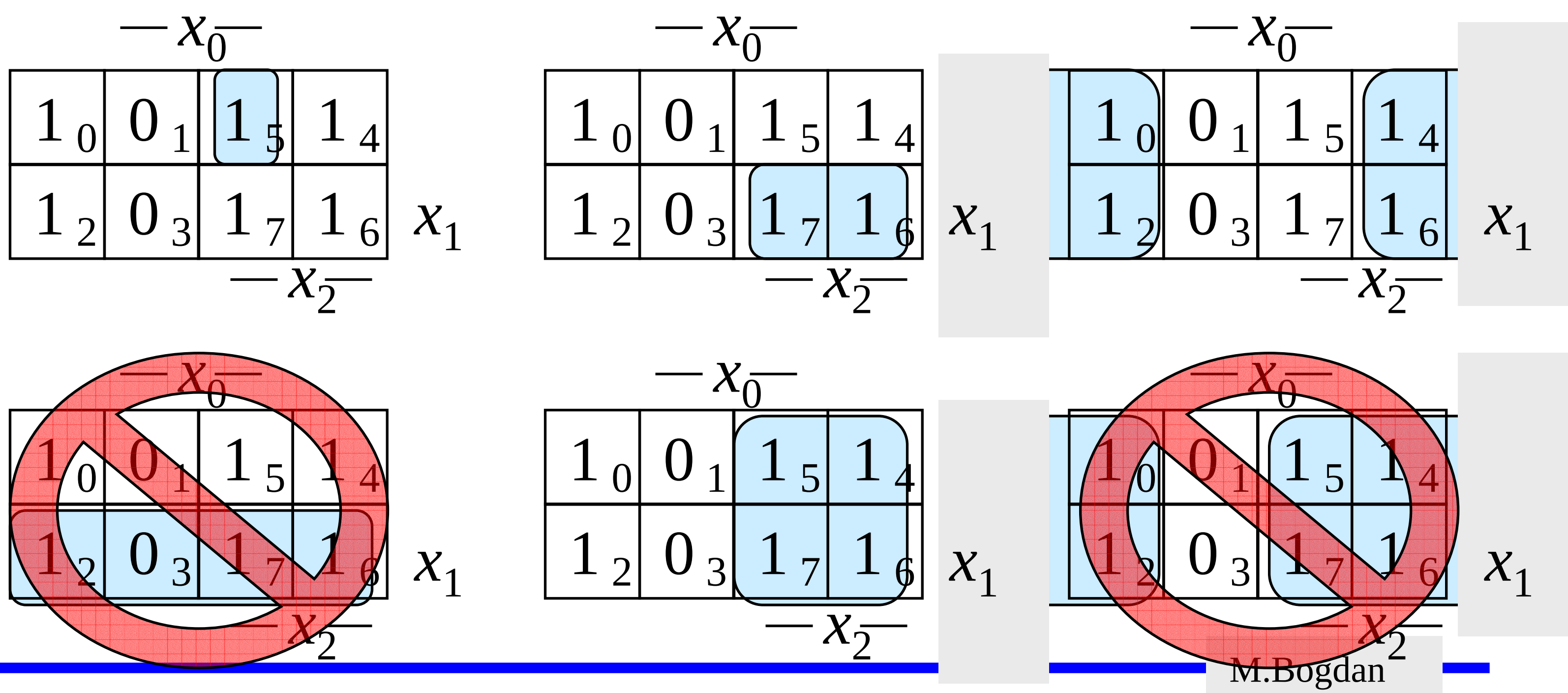
	x_0			
0_{0}	0_{1}	0_{5}	1_{4}	
1_{2}	0_{3}	1_{7}	1_{6}	x_1
		x_2		

$$f(x_2, x_1, x_0) = (x_2 \vee x_1 \vee x_0) \wedge (x_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0) \wedge$$
$$(x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0)$$

Minimalformen aus KV-Diagrammen

- **Zusammenfassen von Mintermen zu Implikanten**
- **Beispiel:**

	x_0	x_0		
1_0	0_1	1_5	1_4	
1_2	0_3	1_7	1_6	x_1
		x_2	x_2	



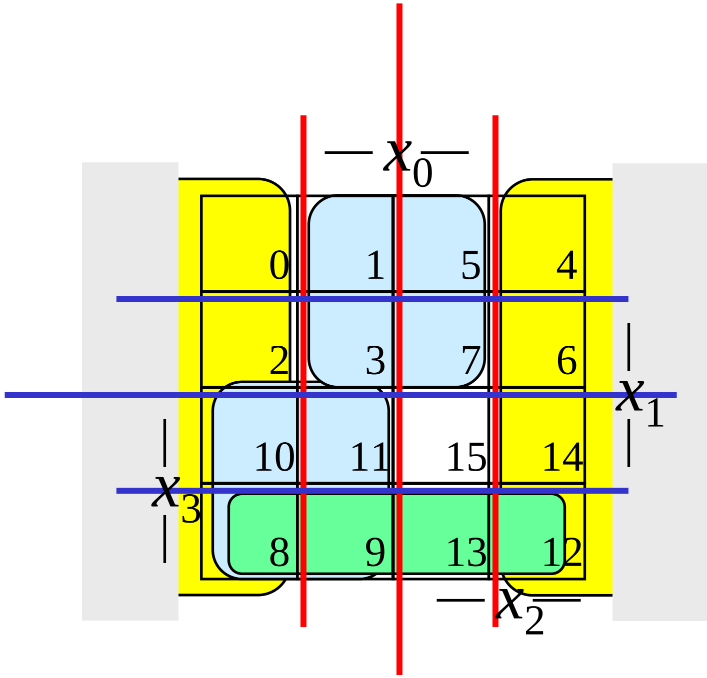
Implikant k-ter Ordnung

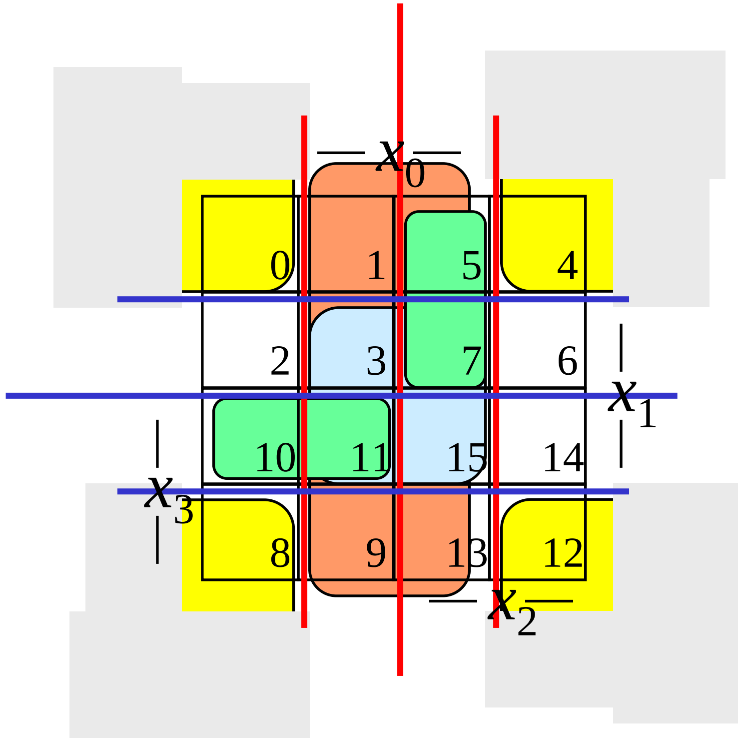
Def. 10.1: Es sei eine Boolesche Funktion $f(x_0,\ldots,x_{n-1}):B^n \rightarrow B$ gegeben. Ein <u>Implikant k-ter Ordnung</u> umfaßt 2^k Felder eines KV-Diagramms.

- **Man erhält**
  - **Implikanten 0-ter Ordnung** — **Minterme**
  - **Implikanten 1-ter Ordnung** — **Zusammenfassung zweier Minterme**
  - **Implikanten 2-ter Ordnung** — **Zusammenfassung zweier Implikanten 1-ter Ordnung**
  - **usw.**

Finden möglicher Zusammenfassungen

- **Finden von 1-Blöcken, die symmetrisch zu denjenigen Achsen, an denen eine Variable von 0 auf 1 wechselt**
- **Jede Funktion läßt sich als disjunktive Verknüpfung solcher Implikanten darstellen**
- **Beispiele**



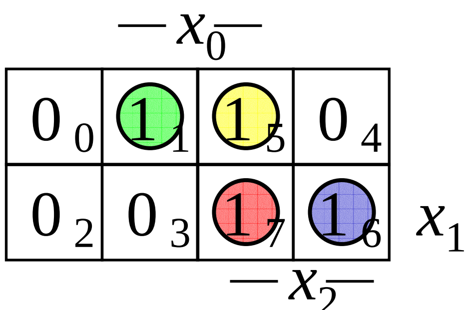


Primimplikant

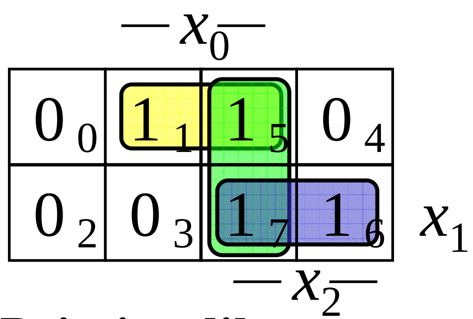
Def. 10.2: Es sei eine Boolesche Funktion $f(x_0,\ldots,x_{n-1}):B^n \rightarrow B$ gegeben. Ein Implikant *p* heißt <u>Primimplikant</u>, wenn es keinen Implikanten *q* gibt, der *p* impliziert.

- **Ein Primimplikant *p* ist von größtmöglicher Ordnung**
  - ⇨ **Primimplikanten sind einfach aus einem KV-Diagramm herauszulesen**
  - ⇨ **man sucht die größtmöglichen Implikanten**

$$f(x_2,x_1,x_0) = x_2 x_1 \bar{x}_0 \vee x_2 x_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 x_0$$



Minterme



Primimplikanten

Überdeckung

Satz 10.1: Zu jeder Booleschen Funktion *f* gibt es eine minimale Überdeckung aus Primimplikanten

Bew. (Skizze):

Angenommen wir haben eine minimale Überdeckung der Funktion, die einen Implikanten *k* besitzt, der kein Primimplikant ist.

$\Rightarrow$ **Dieser Implikant *k* kann durch einen Primimplikant *p* ersetzt werden, der *k* enthält**

$\Rightarrow$ **Das Ergebnis ist eine Überdeckung der Funktion *f* aus Primimplikanten mit der gleichen Anzahl von Termen**

$\Rightarrow$ **Die Überdeckung ist minimal**

- **Einschränkung des Suchraums**
  - ⇨ **man braucht nur die Primimplikanten für die Minimierung betrachten**

Kernprimimplikant

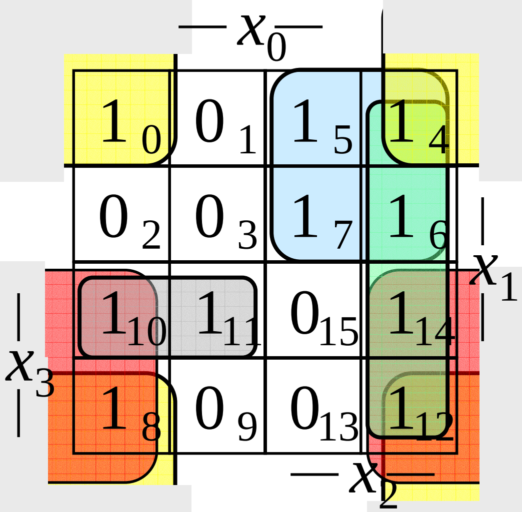
Def. 10.3: Es sei eine Boolesche Funktion $f(x_0,\ldots,x_{n-1}):B^n \rightarrow B$ gegeben. Ein Implikant p heißt <u>Kernprimimplikant</u>, wenn er einen Minterm überdeckt, der von keinem anderen Primimplikant überdeckt wird.

- **Man nennt solche Primimplikanten auch <u>essentielle</u> Primimplikanten**
  - ⇨ **Ein Kernprimimplikant muss auf jeden Fall in der disjunktiven Minimalform vorkommen**
- **Ziel der Minimierung:**
  - ⇨ **Überdecken der Funktion durch Kernprimimplikanten und möglichst wenigen zusätzlichen Primimplikanten**
- **Zwei Schritte**
  1. **Finde alle Primimplikanten**
  2. **Suche eine Überdeckung der Funktion mit möglichst wenigen Primimplikanten**

Beispiel

$$f(x_3,x_2,x_1,x_0) = \bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1\bar{x}_0 \vee \bar{x}_3x_2\bar{x}_1\bar{x}_0 \vee \bar{x}_3x_2\bar{x}_1x_0 \vee$$
$$\bar{x}_3x_2x_1\bar{x}_0 \vee \bar{x}_3x_2x_1x_0 \vee x_3\bar{x}_2\bar{x}_1\bar{x}_0 \vee$$
$$x_3\bar{x}_2x_1\bar{x}_0 \vee x_3\bar{x}_2x_1x_0 \vee x_3x_2\bar{x}_1\bar{x}_0 \vee x_3x_2x_1\bar{x}_0$$
$$= MINt(0,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11,\ 12,\ 14)$$

DNF



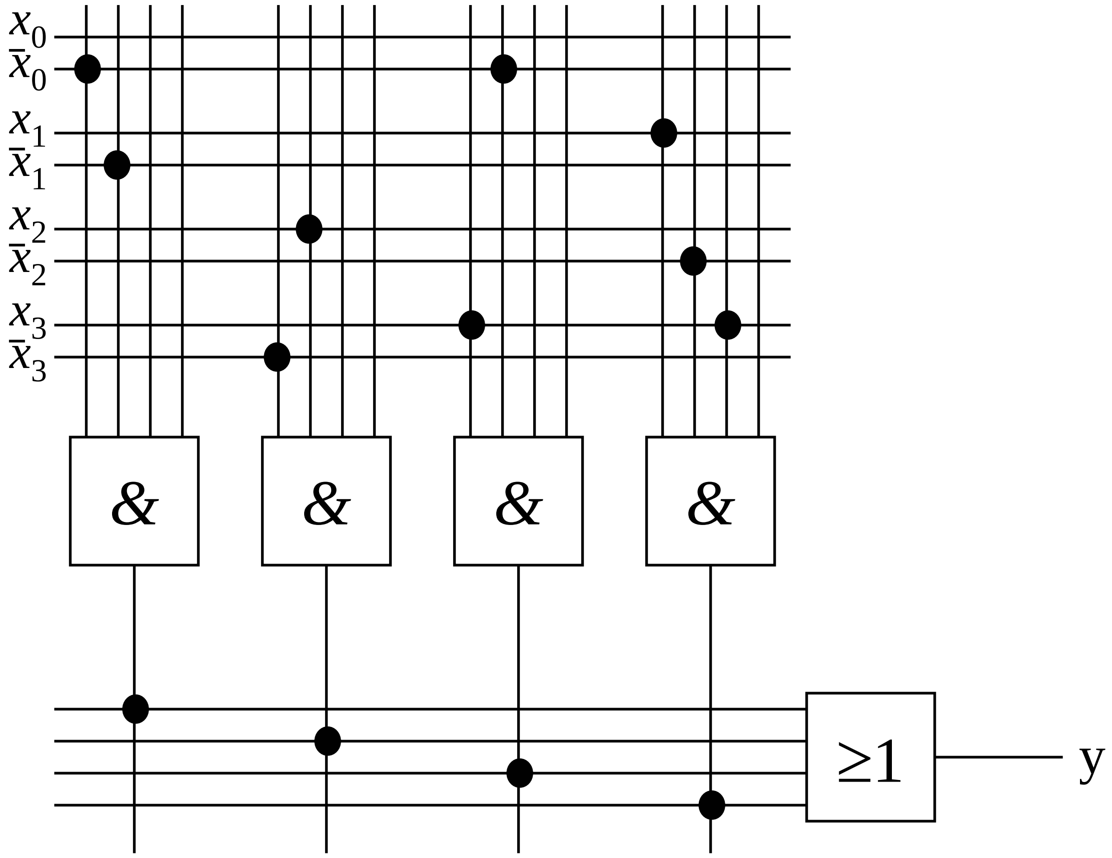
e	$\bar{x}_1\bar{x}_0$	(0,4,8,12)
e	$\bar{x}_3x_2$	(4,5,6,7)
	$x_2\bar{x}_0$	(4,6,12,14)
	$x_3\bar{x}_0$	(8,10,12,14)
e	$x_3\bar{x}_2x_1$	(10,11)

$$f(x_3,x_2,x_1,x_0) = \bar{x}_1\bar{x}_0 \vee \bar{x}_3x_2 \vee x_3\bar{x}_0 \vee x_3\bar{x}_2x_1$$
$$= \bar{x}_1\bar{x}_0 \vee \bar{x}_3x_2 \vee x_2\bar{x}_0 \vee x_3\bar{x}_2x_1$$

DMF

M.Bogdan

Realisierung als „Programmable Logic Array (PLA)



$$f(x_3, x_2, x_1, x_0) = \bar{x}_1\bar{x}_0 \vee \bar{x}_3 x_2 \vee x_3\bar{x}_0 \vee x_3\bar{x}_2 x_1$$

10.2 Bündelminimierung

- Funktionen mit mehreren Ausgängen werden gemeinsam minimiert
- gemeinsame Implikanten sollten mehrfach genutzt werden
- Beispiel: Transformation eines Codes

- Transformationstabelle

System1			System2	
c	b	a	x	y
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	1	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	0	1

x:

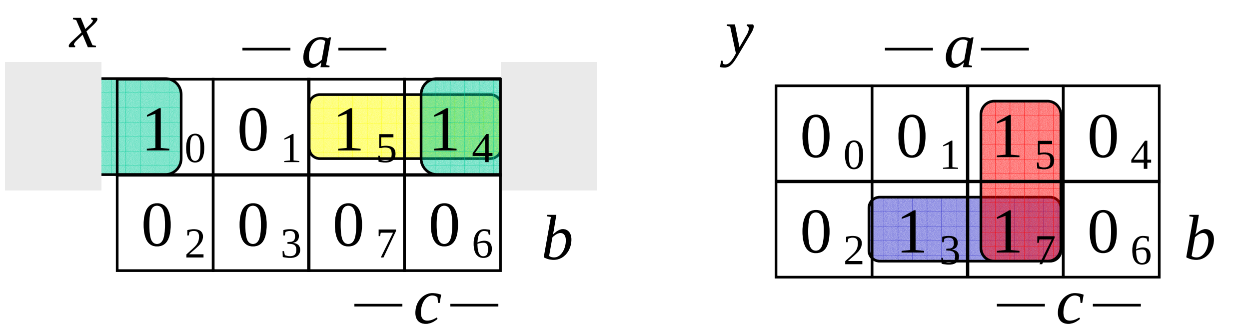
	x_0	x_0		
1_0	0_1	1_5	1_4	
0_2	0_3	0_7	0_6	x_1
		x_2	x_2	

y:

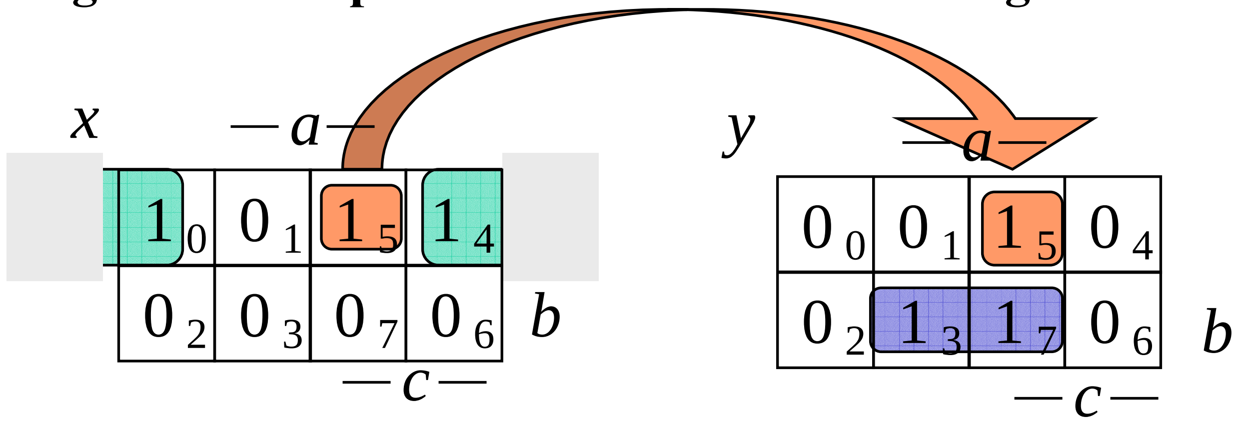
	x_0	x_0		
0_0	0_1	1_5	0_4	
0_2	1_3	1_7	0_6	x_1
		x_2	x_2	

Bündelminimierung

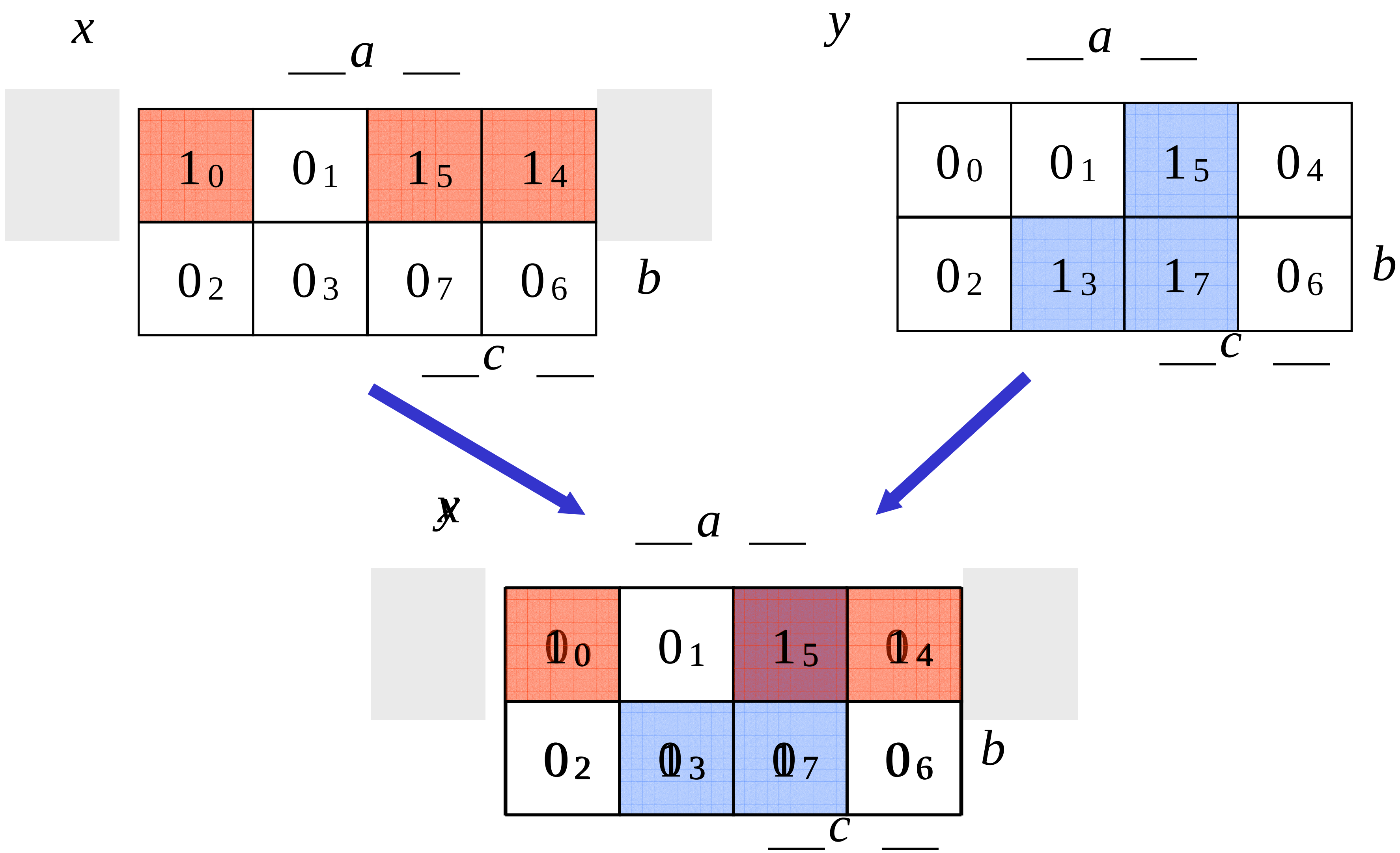
- Getrennte Minimierung
  - ⇨ **insgesamt 4 Implikanten für die Realisierung**



- Bündelminimierung
  - ⇨ **insgesamt 3 Implikanten für die Realisierung**

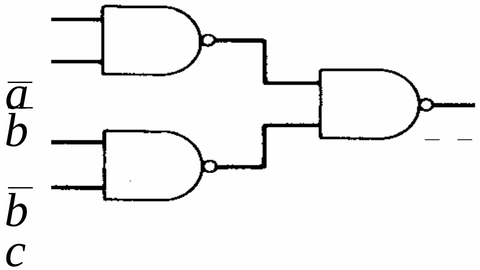


Bündelminimierung



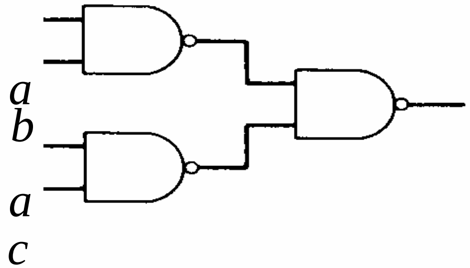
M.Bogdan

Bündelminimierung



x

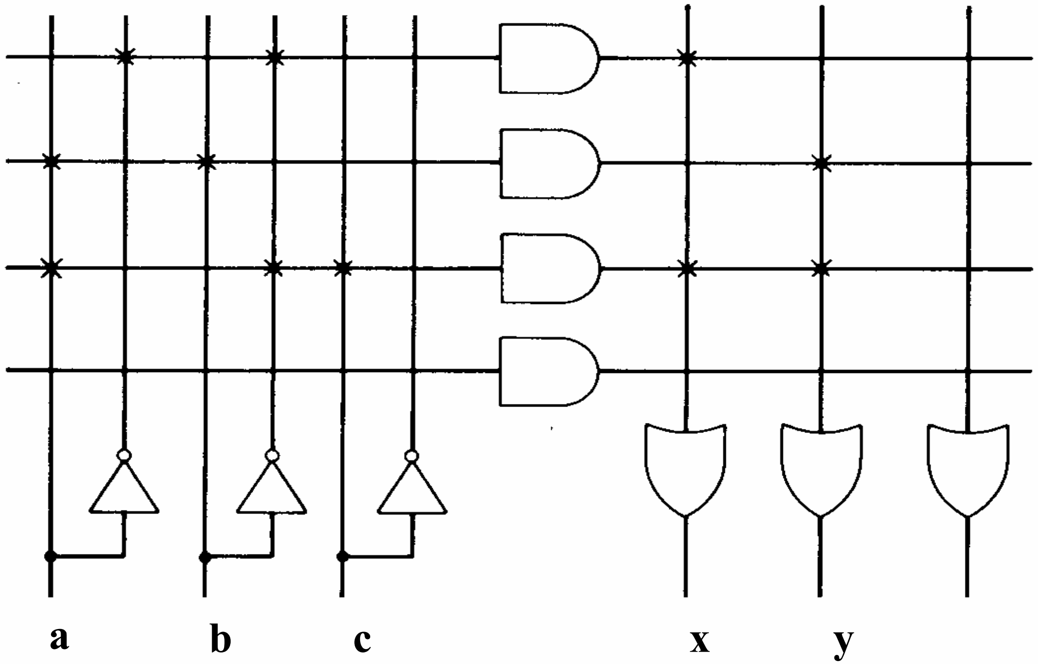
$\overline{a}\,\overline{b} \vee \overline{b}\,c$



getrennte Minimierung

y

$ab \vee ac$



Bündelminimierung

$x = \overline{a}\,\overline{b} \vee a\overline{b}\,c$

$y = ab \vee a\overline{b}\,c$

10.3 Unvollständig definierte Funktionen

- **Bisher war für alle Belegungen der Eingänge ein Funktionswert festgelegt**
  - ⇨ **in praktischen Fällen kommt es sehr häufig vor, dass die Funktionswerte für bestimmte Eingangsbelegungen frei wählbar sind**
  - ⇨ **diese Funktionswerte sind frei verfügbar**
- **Solche Funktionen heißen <u>unvollständig</u> oder <u>partiell definierte</u> Funktionen**
  - ⇨ **die nicht verwendeten Eingangsbelegungen heißen auch Don't-care-Belegungen**
  - ⇨ **in KV-Diagrammen werden diese Felder mit einem „-" gekennzeichnet**
- **wichtiges Potential für die Minimierung!**
  - ⇨ **um eine DMF zu erhalten, müssen diese mit „0" oder „1" belegt werden**

Minimierung unvollständiger Boolescher Funktionen

- **Beispiel**

	x_0	
$-_0$	0_1	
0_2	1_3	x_1

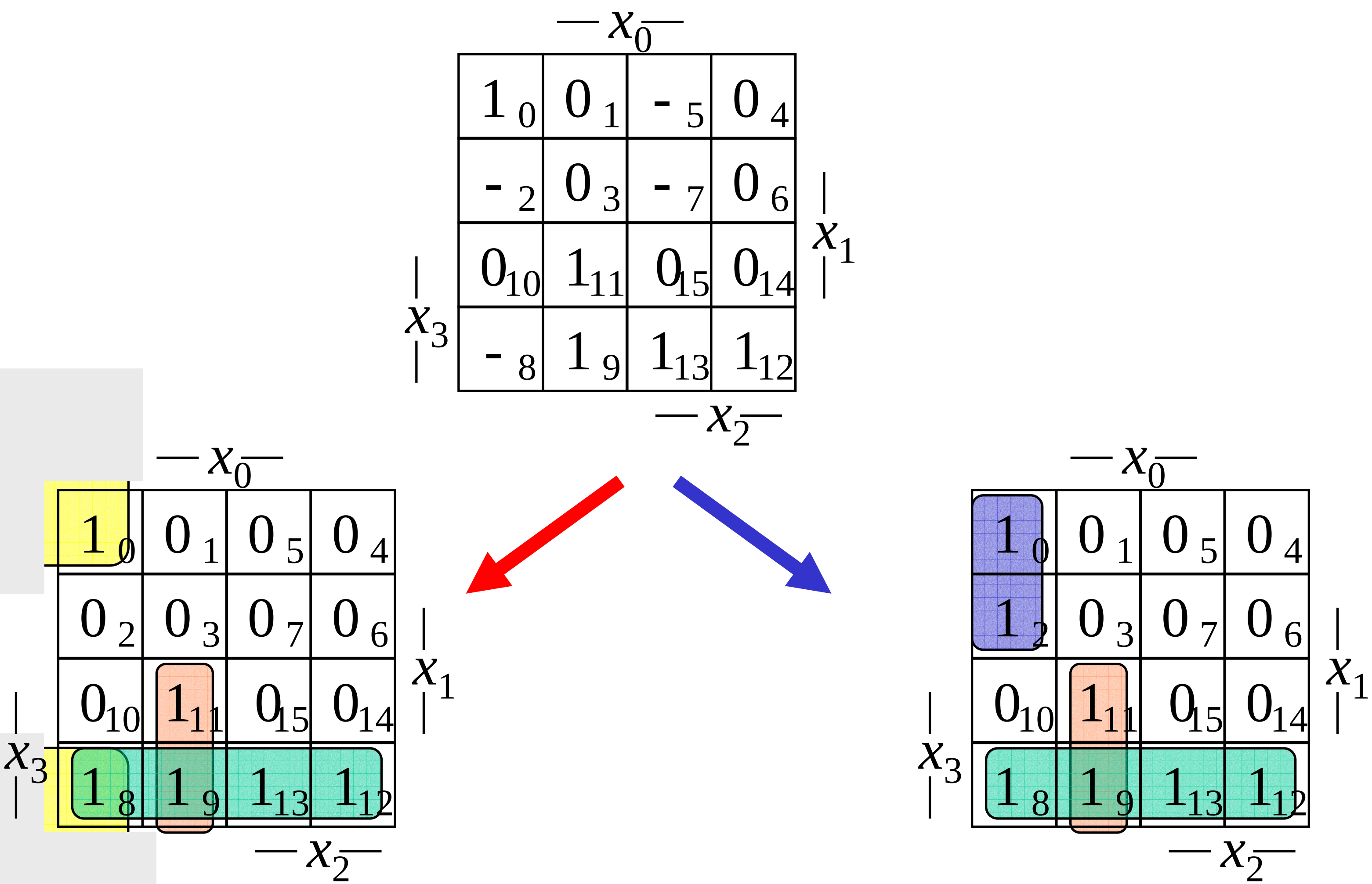
	x_0	
1_0	0_1	
0_2	1_3	x_1

$$f(x_1, x_0) = x_1 x_0 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_0$$

	x_0	
0_0	0_1	
0_2	1_3	x_1

$$f(x_1, x_0) = x_1 x_0$$

Minimierung unvollständiger Boolescher Funktionen



$f = x_3\bar{x}_1 \vee x_3\bar{x}_2 x_0 \vee \bar{x}_2\bar{x}_1\bar{x}_0$

$f = x_3\bar{x}_1 \vee x_3\bar{x}_2 x_0 \vee \bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_0$

10.4 Das Verfahren nach Quine-McCluskey

- **KV-Diagramme mit mehr als 6 Variablen werden sehr groß und unübersichtlich**
  - ⇨ **dieses Problem wurde zuerst von Quine und McCluskey erkannt und gelöst**
  - ⇨ **das Verfahren nach Quine-McCluskey ist ein tabellarisches Verfahren**
  - ⇨ **es führt auf eine DMF (disjunktive minimale Form)**
- **Ausgangspunkt ist die Funktionstabelle der Funktion**
  - ⇨ **nur die Minterme werden berücksichtigt**
- **Der Suchraum wird eingeschränkt, weil der Satz 1.1 gilt:**
  - ⇨ **zu jeder Booleschen Funktion *f* gibt es eine minimale Überdeckung aus Primimplikanten**
- **Verfahren nach Quine McCluskey in 2 Schritten:**

  1. Schritt: berechne alle Primimplikanten

  2. Schritt: suche eine minimale Überdeckung aller Minterme