
Grundlagen der Technischen Informatik I

Prof. Dr. Martin Middendorf
Parallelverarbeitung und Komplexe Systeme
middendorf@informatik.uni-leipzig.de

Ziele der Vorlesungen TI 1 und TI 2

- **Physikalische und elektrotechnische Grundlagen mit Bezug zur Rechnertechnik**
 - ⇒ Digitale Schaltungstechnik
 - ⇒ Der Transistor als Schalter

- **Digitale Schaltungen**
 - ⇒ Darstellung
 - ⇒ Entwurf
 - ⇒ Minimierung
 - ⇒ Realisierung

- **Aufbau und Funktionsweise von Rechnersystemen**
 - ⇒ Bausteine
 - ⇒ Komponenten
 - ⇒ Funktionsweise
 - ⇒ Peripherie

Inhalt der Vorlesungen TI1 und TI2

○ Elektrotechnische Grundlagen

- ⇒ Einfache physikalische Zusammenhänge, die verwendet werden um Schaltvorgänge in Rechnersystemen durchzuführen

○ Halbleitertechnologie

- ⇒ Funktionsweise von Dioden und Transistoren
- ⇒ Einsatz von Transistoren als Schalter

○ Digitale Schaltungen

- ⇒ Entwurf, Darstellung und Optimierung von Schaltnetzen und Schaltwerken
- ⇒ Einfache Bausteine aus denen Rechnersysteme aufgebaut sind

Inhalt der Vorlesungen TI1 und TI2

- **Einführung in die Rechnerarchitektur**
 - ⇒ Funktion und Aufbau komplexer Bausteine
 - ⇒ Komponenten aus denen Rechnersysteme aufgebaut sind

- **Aufbau eines PCs**
 - ⇒ Komponenten
 - ⇒ Busse
 - ⇒ Peripherie

Übersicht

1 Geschichtliche Übersicht

2 Physikalische Grundlagen

- ⇒ Elektrische Ladung
- ⇒ Gleichstrom, Ohmsches Gesetz, Kirchhoffsche Gesetze

3 Halbleitertechnologie

- ⇒ Dioden
- ⇒ Bipolare und FET- Technologie
- ⇒ Der Transistor als Schalter
- ⇒ NMOS- PMOS und CMOS-Schaltkreise
- ⇒ CMOS-Grundsaltungen

Übersicht

4 Herstellung elektronischer Schaltungen

- ⇒ Herstellung von Wafern
- ⇒ Entstehung eines n-MOS-Transistors
- ⇒ Entstehung von CMOS-Schaltungen

5 Schaltnetze

- ⇒ Boolesche Algebra
- ⇒ Normalformen
- ⇒ Darstellung Boolescher Funktionen

6 Minimierung von Schaltnetzen

- ⇒ KV-Diagramme
- ⇒ Minimierung nach Quine MC-Cluskey
- ⇒ Bündelminimierung

Literatur zu dieser Vorlesung

○ Die Vorlesung basiert auf dem Lehrbuch:

- ⇒ W. Schiffmann, R. Schmitz: "Technische Informatik 1 Grundlagen der digitalen Elektronik"
Springer-Lehrbuch, Springer (2001).

○ Weitere Empfehlungen:

- ⇒ M. Reisch: „Elektronische Bauelemente“, Springer (1996)
- ⇒ Hütte: „Die Grundlagen der Ingenieurwissenschaften“
30. Auflage, Springer (1996)
- ⇒ U. Titze, C. Schenk: „Halbleiter Schaltungstechnik“ 11.
Auflage, Springer (1999)

1 Historischer Überblick

○ Griechenland 6. Jh. v.Chr.

⇒ Mit Seidentuch geriebener Bernstein zieht Staubteilchen, Wollfäden u.a. Körper an.

Name: Elektron = Bernstein

Magneteisenstein zieht Eisen an

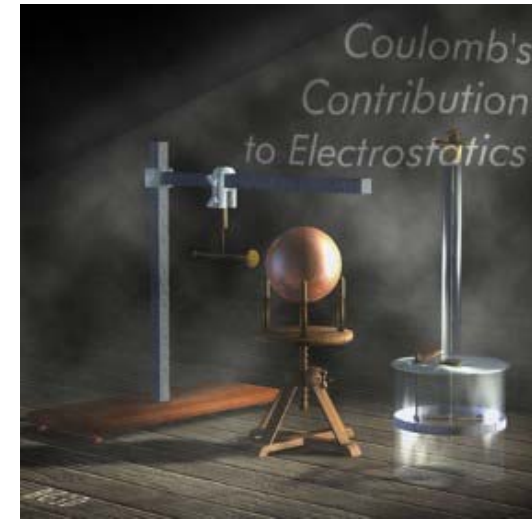
○ Gilbert, William 1540-1603

⇒ führt den Begriff *Elektrizität* ein



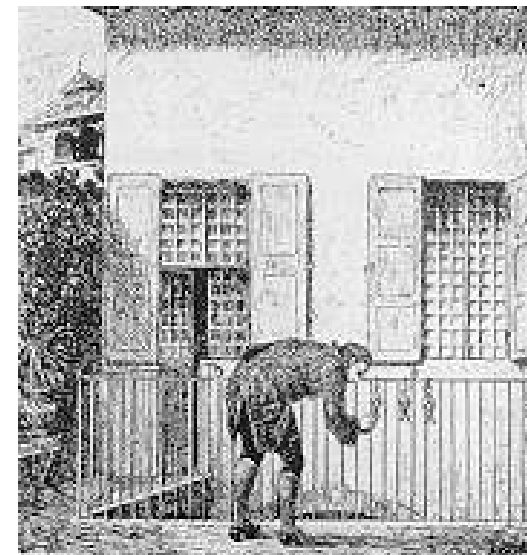
○ Coulomb, Charles 1736-1806

⇒ Coulombsches Gesetz



○ Galvani, Luigi 1737-1798

⇒ Galvanische Elemente: Stromquellen deren Energie durch chemische Vorgänge frei wird



Historischer Überblick

- **Volta, Alessandro 1745-1827**

- ⇒ führt die Arbeit Galvanis fort. Konstruiert die **Voltasche Säule**, die erste brauchbare Elektrizitätsquelle. Von ihm stammt der Begriff des stationären elektrischen Stromes

- **Oerstedt, Hans Christian 1777-1851**

- ⇒ entdeckt 1820 die Ablenkung der Magnetnadel durch elektrischen Strom (Elektromagnetismus)

- **Ampere, Andre Marie 1775-1836**

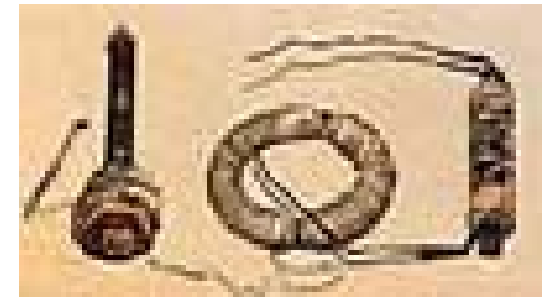
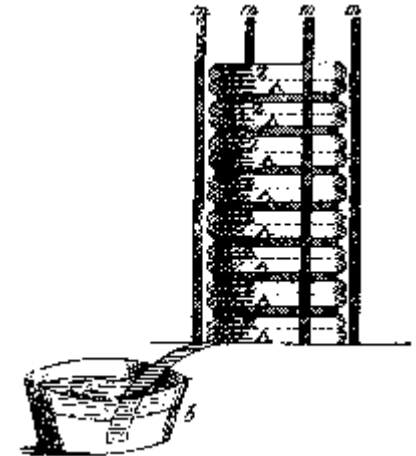
- ⇒ entdeckt die mechanische Wirkung stromdurchflossener Leiter aufeinander (Elektrodynamisches Gesetz). Nach ihm wurde die Einheit der Basisgröße Stromstärke benannt

- **Faraday, Michael 1791-1867**

- ⇒ Elektromagnetische Induktion

- **Ohm, Georg Simon 1787-1854**

- ⇒ Ohmsches Gesetz



Historischer Überblick

○ Siemens, Werner 1816-1892

⇒ Elektrische Maschinen (dynamoelektrisches Prinzip)

○ Kirchhoff, Gustav Robert 1824-1887

⇒ entdeckt die Gesetze der Stromverzweigung

○ Maxwell, James Clerk 1831-1879

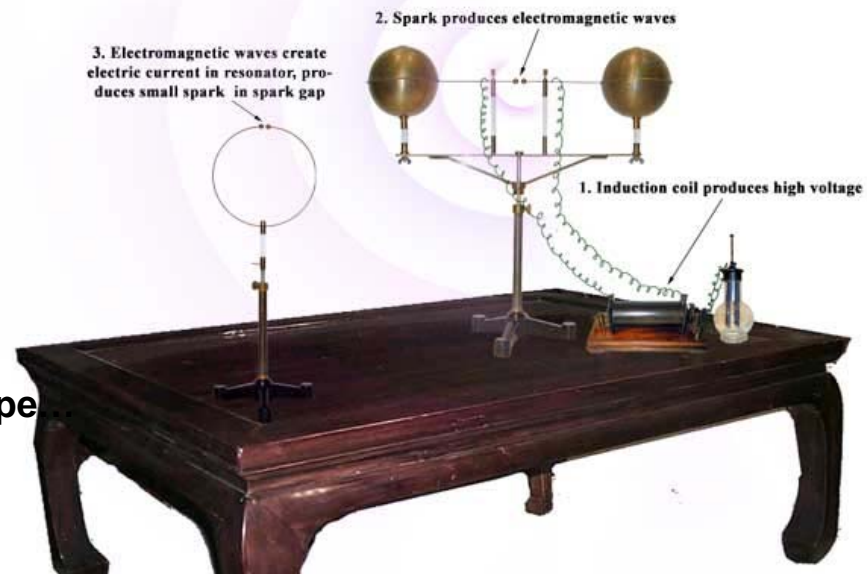
⇒ Maxwellsche Gleichungen: Beschreiben alle Erscheinungen, bei denen Elektrizität und Magnetismus miteinander verknüpft sind (Elektrodynamik)

○ Hertz, Heinrich 1857-1894

⇒ entdeckt experimentell die elektromagnetischen Wellen

○ Edison, Thomas Alva 1847-1931

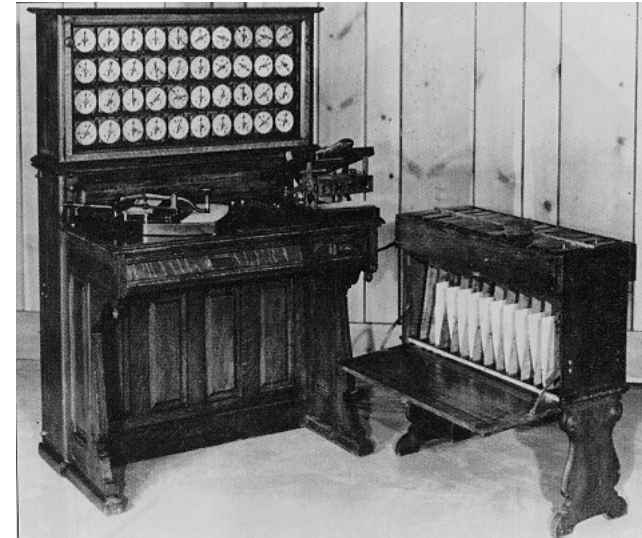
⇒ Erfinder verschiedener Elektrogeräte:
Telegraph, Kohlemikrofon, Glühlampe
Baut 1882 das erste Elektrizitätswerk



Historischer Überblick

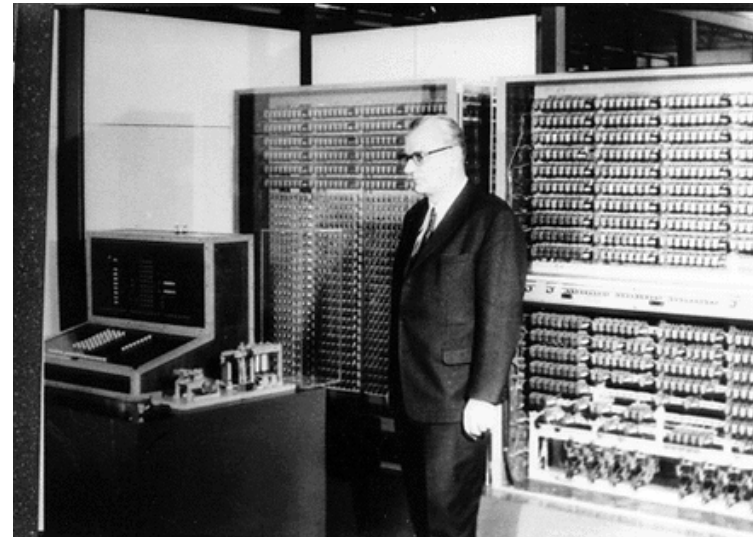
○ 1886 Lochkarte

- ⇒ Herman Hollerith (1860-1929) benutzt die Lochkartentechnik zur Datenverarbeitung. Es handelt sich dabei um ein elektromechanisches Verfahren.



○ 1941 Z 3

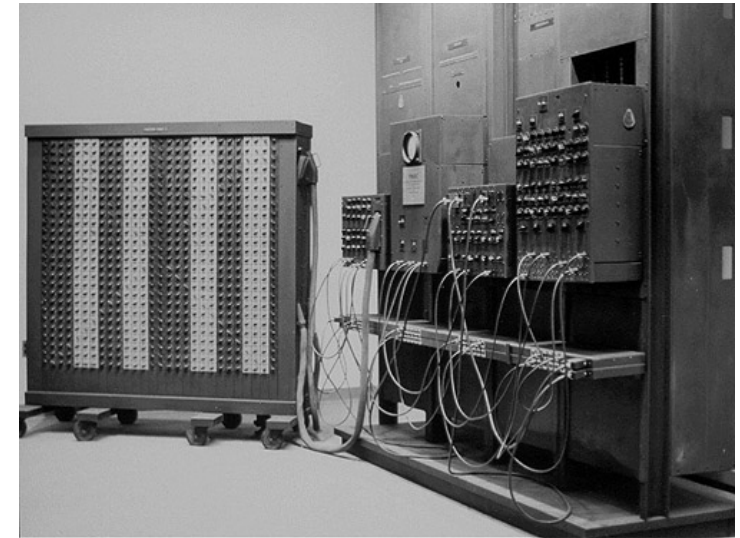
- ⇒ Konrad Zuse baut die erste funktionsfähige Datenverarbeitungsanlage mit Programmsteuerung in Relais-technik.



Historischer Überblick

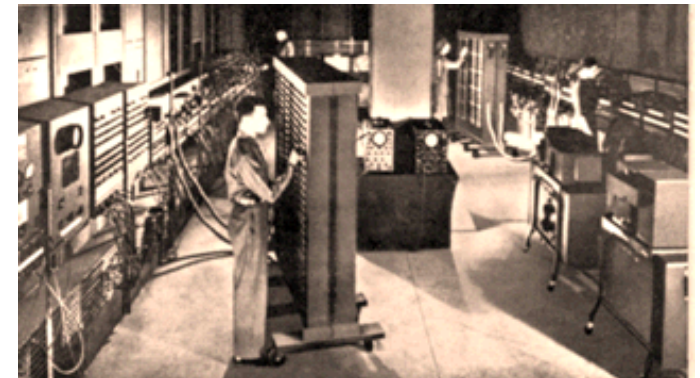
○ 1946 Eniac

- ⇒ Die erste Computergeneration basiert auf der Röhrentechnik
Die Erfinder sind J. Presper Eckert und J. William Mauchly und die logische Konzeption stammt von J. von Neuman



○ 1955 Die zweite Computergeneration

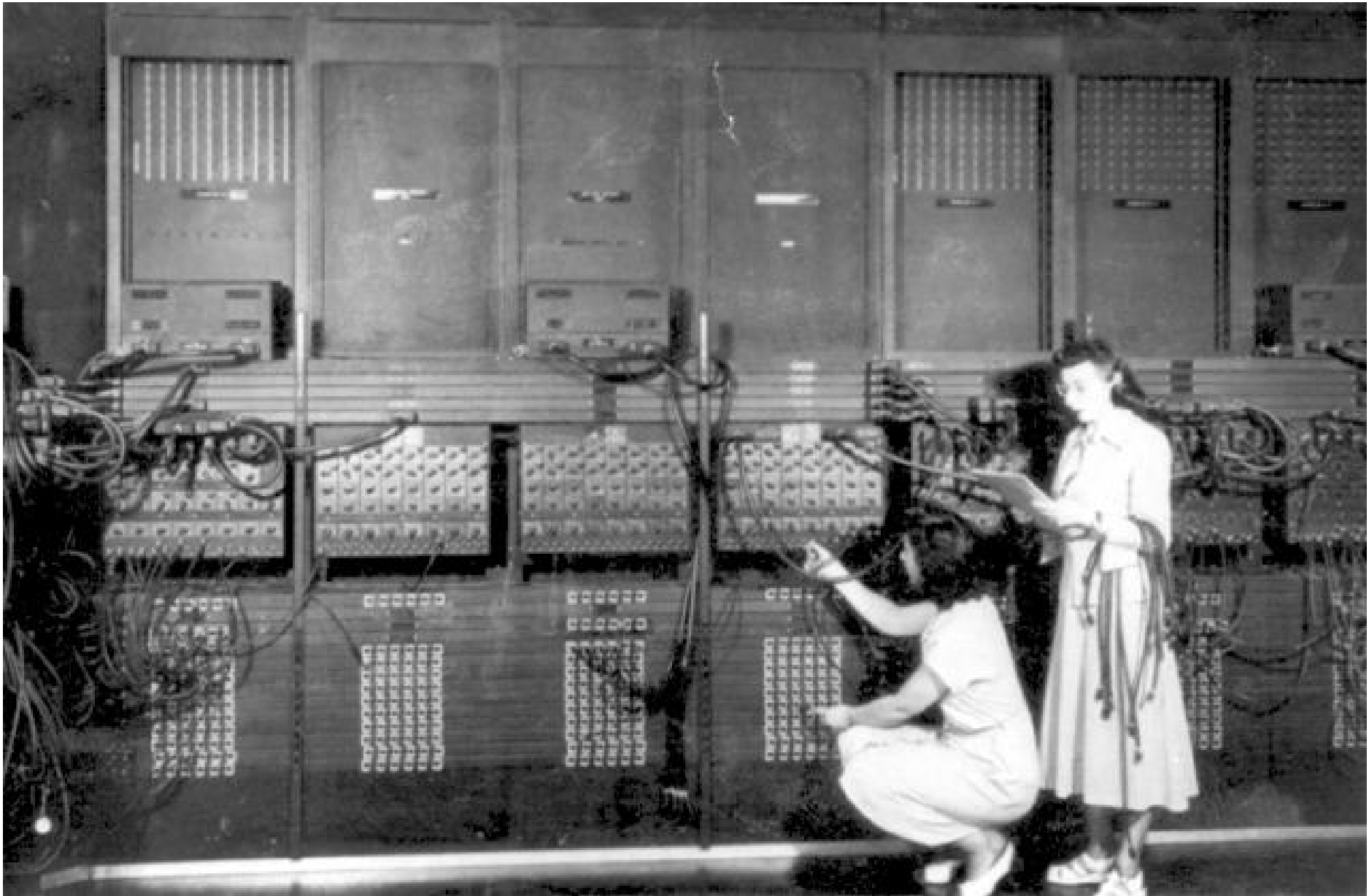
- ⇒ Shockley, Bardeen und Brattain entdecken 1948 die Transistorwirkung und legen damit den Grundstein für die Mikroelektronik



○ 1960 Integrierte Schaltkreise (IC)

- ⇒ Die Funktionen von Transistoren, Widerständen und Dioden werden in Planartechnik auf ein Halbleiter-Plättchen aufgebracht

Eniac



2 Physikalische Grundlagen

2.1 Elektrische Ladung

- Die Einheit der elektrischen Ladung ist

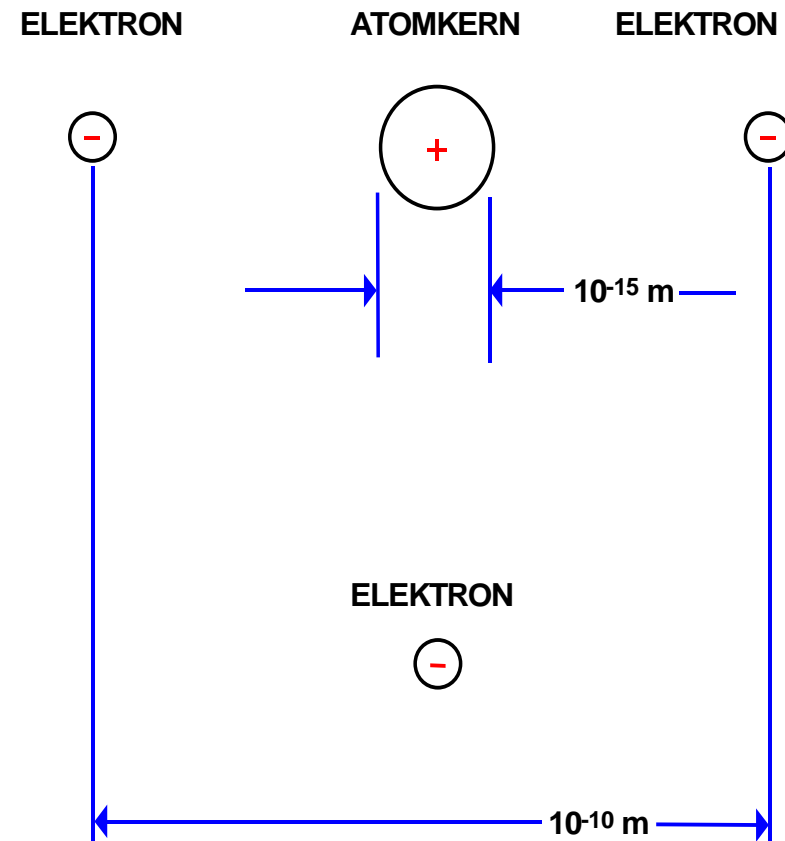
Coulomb

$$1\text{C} = 1\text{As}$$

- Die elektrische Ladung eines Elektrons beträgt

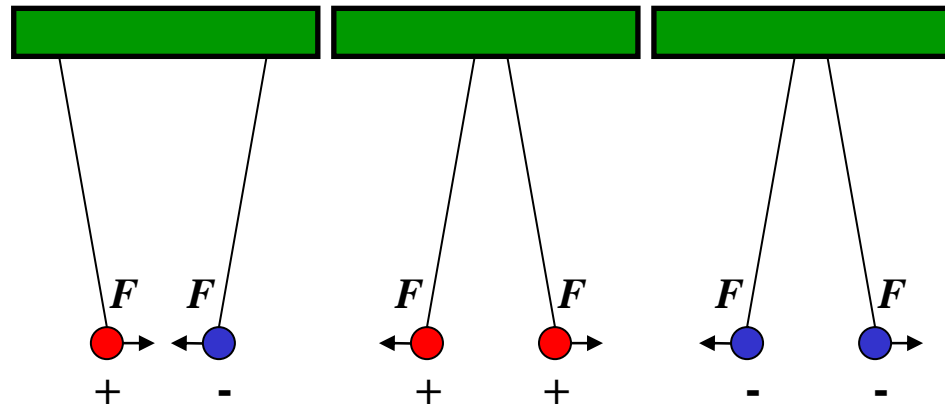
$$e_0 = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

- Man benötigt $6,242 \cdot 10^{18}$ Elektronen um die Ladung 1 C zu erhalten



Martin Middendorf

Elektrische Kraft

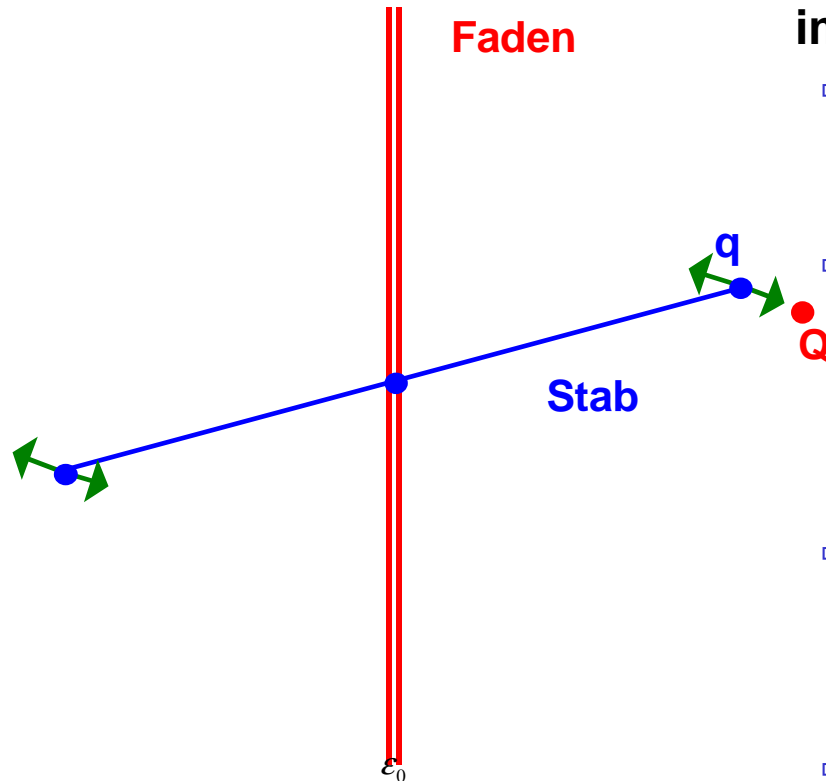


○ Elektrische Ladungen üben Kräfte aufeinander aus

⇒ ungleiche Ladungen ziehen sich an

⇒ gleiche Ladungen stoßen sich ab

Messung der Kraft



Torsionswaage (Coulomb, 1785)

Dielektrizitätskonstante ϵ_0

○ Für zwei Punktladungen Q und q im Vakuum und im Abstand d gilt:

⇒ Die Kraft ist proportional dem Produkt der beiden Ladungen

$$F \sim Q \cdot q$$

⇒ Die Kraft ist umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands

$$F \sim \frac{1}{d^2}$$

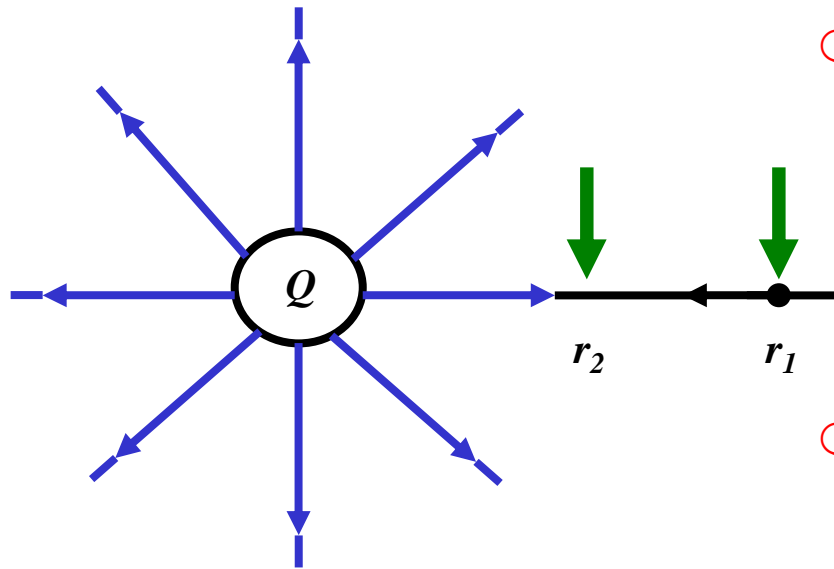
⇒ Zusammengefasst ergibt sich:

$$F \sim \frac{Q \cdot q}{d^2}$$

⇒ Vektoriell und mit Definition der Konstante:

$$\vec{F} = q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{d^2} \cdot \vec{r}_0$$

Die elektrische Spannung



- Wird eine Ladung in einem elektrischen Feld bewegt, so muss Arbeit verrichtet werden

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

- Damit beträgt die Arbeit um eine Ladung q von r_1 nach r_2 zu bewegen

$$W_{r_1 \rightarrow r_2} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Die elektrische Spannung

- Die **Spannung** zwischen r_1 und r_2 wird definiert als die Arbeit, die verrichtet werden muss, um die Elementarladung q von r_1 nach r_2 zu bewegen, normiert um die Ladung q

$$U_{r_1 \rightarrow r_2} = \frac{W_{r_1 \rightarrow r_2}}{q} \quad \text{Spannung} = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Ladung}}$$

- Die Einheit der Spannung ist **Volt V**

$$1 \text{ V} = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{C}}$$

2.2 Der elektrische Strom

- Elektrischer Strom ist der Fluss von Elektronen
- Die **Stromstärke** I entspricht der bewegten Ladungsmenge pro Zeiteinheit

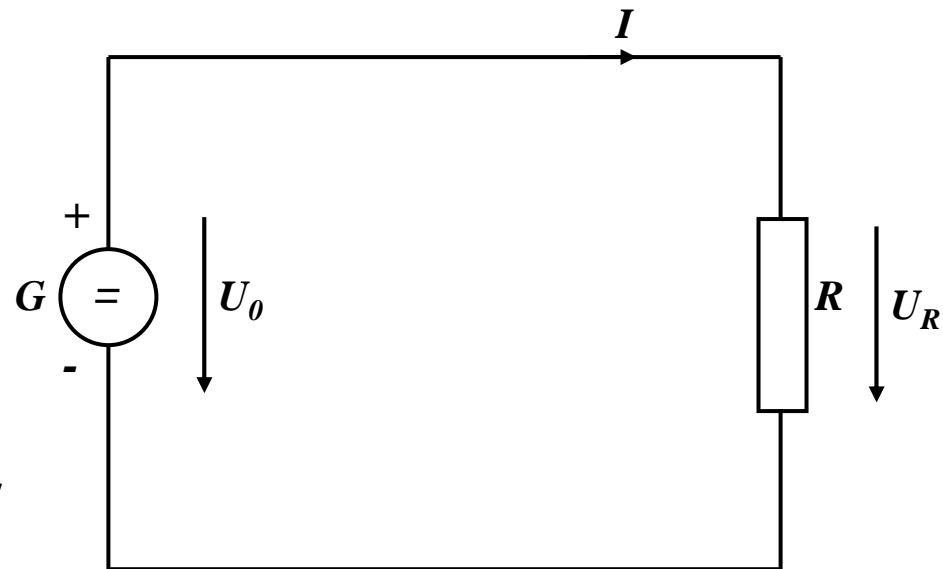
$$I = \frac{Q}{t}$$

- Fließen durch einen Leiter pro Sekunde n Coulomb [C], so messen wir einen Strom von n **Ampere** [A]

$$1 \text{ A} = 1 \frac{\text{C}}{\text{s}} = \frac{1}{1,602} \cdot 10^{19} \frac{\text{Elektronen}}{\text{s}}$$

Elektrischer Stromkreis

- Ein elektrischer Stromkreis ist eine Anordnung aus
 - ⇒ **Stromerzeuger G** (Generator)
 - ⇒ **Verbraucher R**
 - ⇒ **Verbindungsleitungen**
- In G wird Energie aufgewendet
 - ⇒ ($W < 0$)
- In R wird Energie verbraucht
 - ⇒ ($W > 0$)
- Der elektrische Strom fließt (per Definition) von Plus (+) nach Minus (-)
- Die Elektronen fließen von Minus (-) nach Plus (+)
- Spannung im Stromerzeuger G bewirkt im Verbraucher R einen Stromfluss von von Plus nach Minus (Pfeilrichtung)



Leitwert und Widerstand

- Zahlenmäßiger Zusammenhang zwischen Spannung und Strom an einem Verbraucher

⇒ Der gemessene Strom I ist proportional zur Spannung U

$$I \sim U$$

$$I = G \cdot U$$

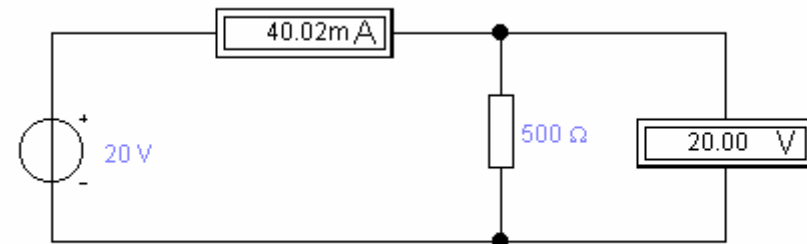
- der Proportionalitätsfaktor G wird **Leitwert** genannt

- die Einheit von G ist **Siemens**

$$1\text{S} = 1 \frac{\text{A}}{\text{V}}$$

- in der Praxis verwendet man den Kehrwert von G , den **Widerstand** R

$$R = \frac{1}{G}$$



2.3 Ohmsches Gesetz

- Es gibt einen festen Zusammenhang zwischen dem Strom I und der Spannung U

⇒ Ohmsches Gesetz

$$I = \frac{1}{R} \cdot U$$

$$U = R \cdot I$$

$$R = \frac{U}{I}$$

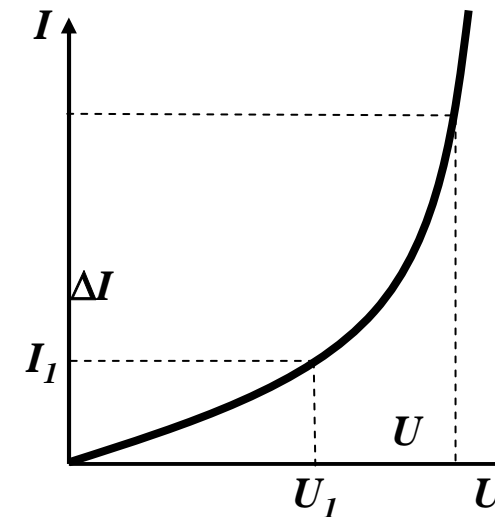
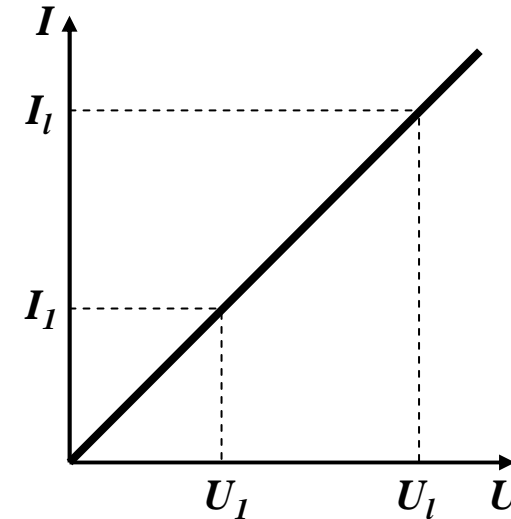
- Die Einheit für den Widerstand ist **Ohm** Ω

$$1\Omega = 1 \frac{\text{V}}{\text{A}}$$

Kennlinien

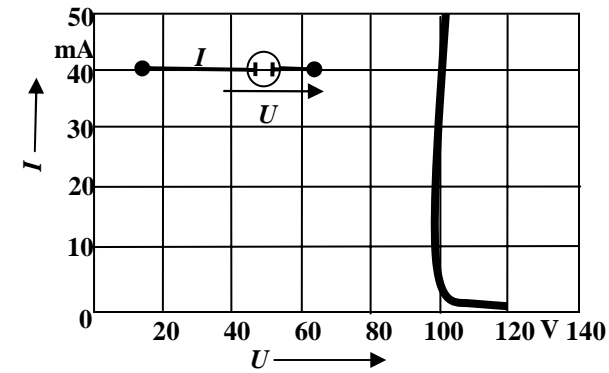
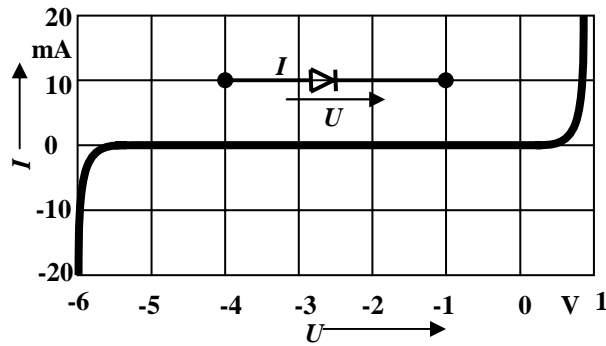
- Der Zusammenhang zwischen Strom I und Spannung U kann in einer **Kennlinie** dargestellt werden
 - ⇒ X-Achse: Spannung U
 - ⇒ Y-Achse: Strom I
- Ist der Proportionalitätsfaktor G konstant, so spricht man von einem linearen Widerstand
- Beispiel: metallische Leiter sind lineare Widerstände; er ist
 - ⇒ proportional zur Länge l
 - ⇒ umgekehrt proportional zur Fläche A
 - ⇒ abhängig vom Material

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad [\rho] = \Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$$



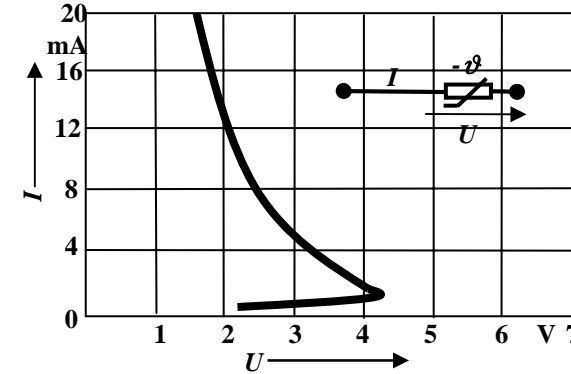
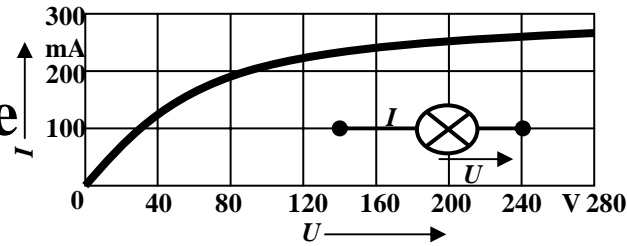
Kennlinien verschiedener Bauelemente

Diode



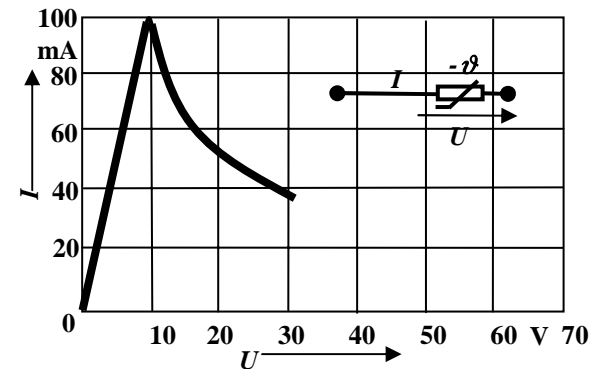
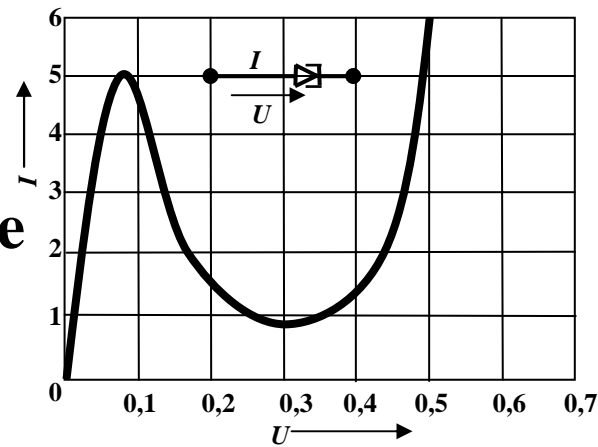
**Glimm-
lampe**

Glühbirne



**Heiß-
leiter**

Tunneldiode



**Kalt-
leiter**

Leistung des elektrischen Stroms

- Die **elektrische Leistung** P entspricht der (elektrischen) Arbeit pro Zeiteinheit

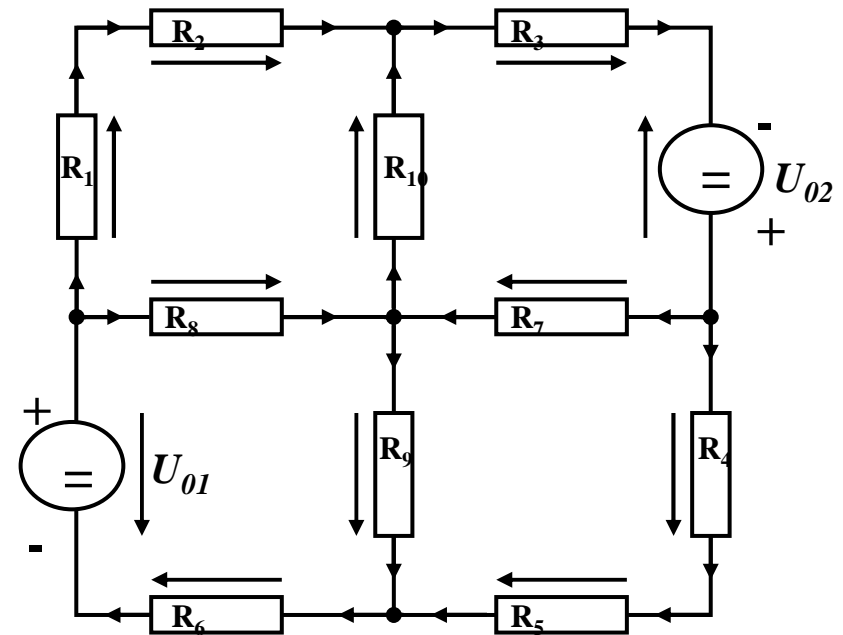
$$P = \frac{W}{t} = U \cdot I = I^2 R = \frac{U^2}{R}$$

- Die Einheit der elektrischen Leistung ist **Watt (W)**

$$1\text{W} = 1\text{VA}$$

2.4 Die Kirchhoffschen Sätze

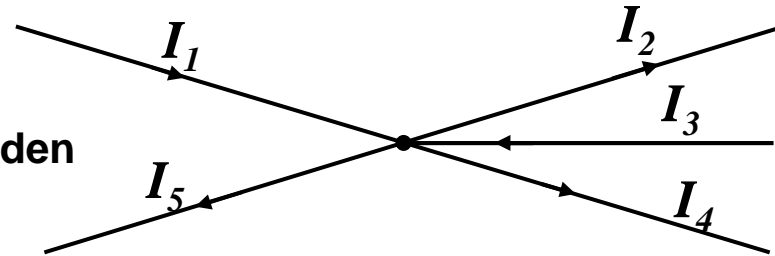
- Typischerweise sind an einen Stromerzeuger G mehrere Verbraucher R angeschlossen
- Eine Anordnung aus Spannungsquellen und Verbrauchern heißt **Netz**
- Es besteht aus
 - ⇒ **Knoten**: Verzweigungspunkt
 - ⇒ **Masche**: geschlossener Pfad, bei dem kein Knoten mehrfach durchlaufen wird
- Richtung der Pfeile (Vorzeichen)
 - ⇒ Spannung ist von Plus nach Minus gerichtet
 - ⇒ Strom fließt von Plus nach Minus



Knotenregel (1. Kirchhoffscher Satz)

- In einem Knoten ist die Summe aller Ströme Null

⇒ An keiner Stelle des Netzes werden Ladungen angehäuft



- Definition der Stromrichtung für die mathematische Formulierung

⇒ zufließende Ströme werden mit einem **positiven** Vorzeichen behaftet

⇒ abfließende Ströme werden mit einem **negativen** Vorzeichen behaftet

$$0 = I_1 - I_2 + I_3 - I_4 - I_5$$

oder

$$I_2 + I_4 + I_5 = I_1 + I_3$$

allgemein:

$$\sum_{i=0}^n I_i = 0$$

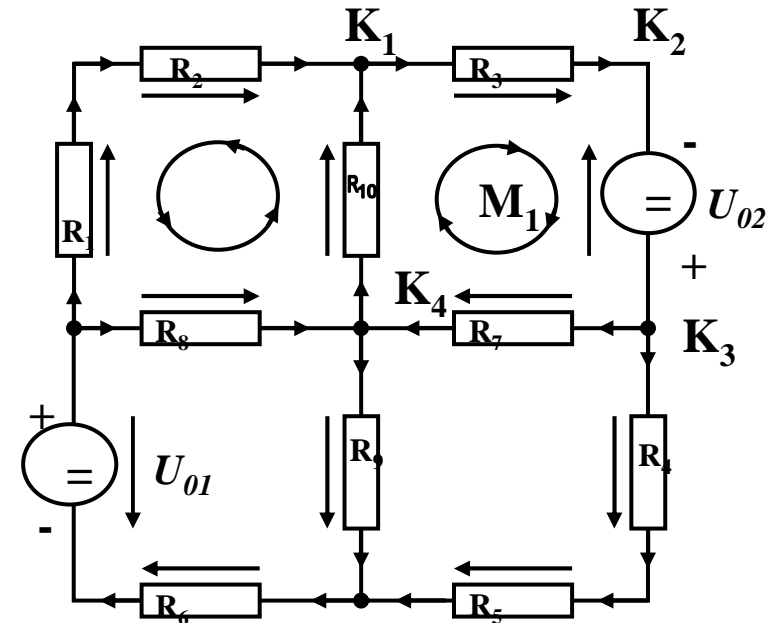
Maschenregel (2. Kirchhoffscher Satz)

- Bei einem geschlossenen Umlauf einer Masche ist die Summe aller Spannungen Null

- ⇒ die Spannungsquellen erzeugen die Spannungen U_{01} und U_{02}
- ⇒ durch die Widerstände fließt ein Strom
- ⇒ nach dem Ohmschen Gesetz gilt für die Spannung

$$U = R \cdot I$$

- ⇒ die Knotenpunkte K_1 , K_2 , K_3 und K_4 können deshalb unterschiedliches Potenzial besitzen



Maschenregel (2. Kirchhoffscher Satz)

- Werden die Knotenspannungen addiert, so folgt:

$$U_{K_{12}} + U_{K_{23}} + U_{K_{34}} + U_{K_{14}} = 0$$

- Vorzeichen der Spannung

- ⇒ die Spannungsrichtung der Quellen ist vorgegeben (von + nach -)
- ⇒ Umlaufrichtung der Masche wird festgelegt
- ⇒ Spannungspfeile gegen die Umlaufrichtung werden **negativ** gezählt
- ⇒ Spannungspfeile mit der Umlaufrichtung werden **positiv** gezählt

$$U_{K_{12}} - U_{02} + U_{K_{34}} + U_{K_{14}} = 0$$

$$U_{K_{12}} + U_{K_{34}} + U_{K_{14}} = U_{02}$$

Anwendung 1: Knotenregel

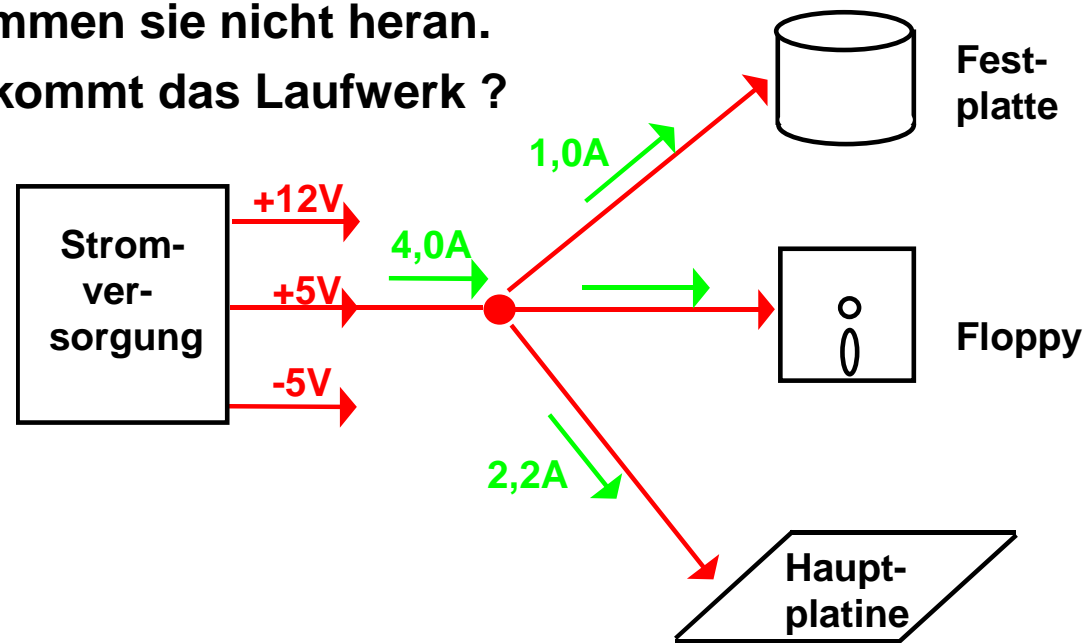
Sie haben einen neuen PC gekauft.

Mittels eines Strommessgeräts (Ampere-Meter) stellen Sie fest, dass die 5 Volt Stromversorgung Ihres PC im eingeschalteten Zustand 4,0 A liefert. Versorgt werden damit die Hauptplatine, das Festplattenlaufwerk und das Floppy Laufwerk.

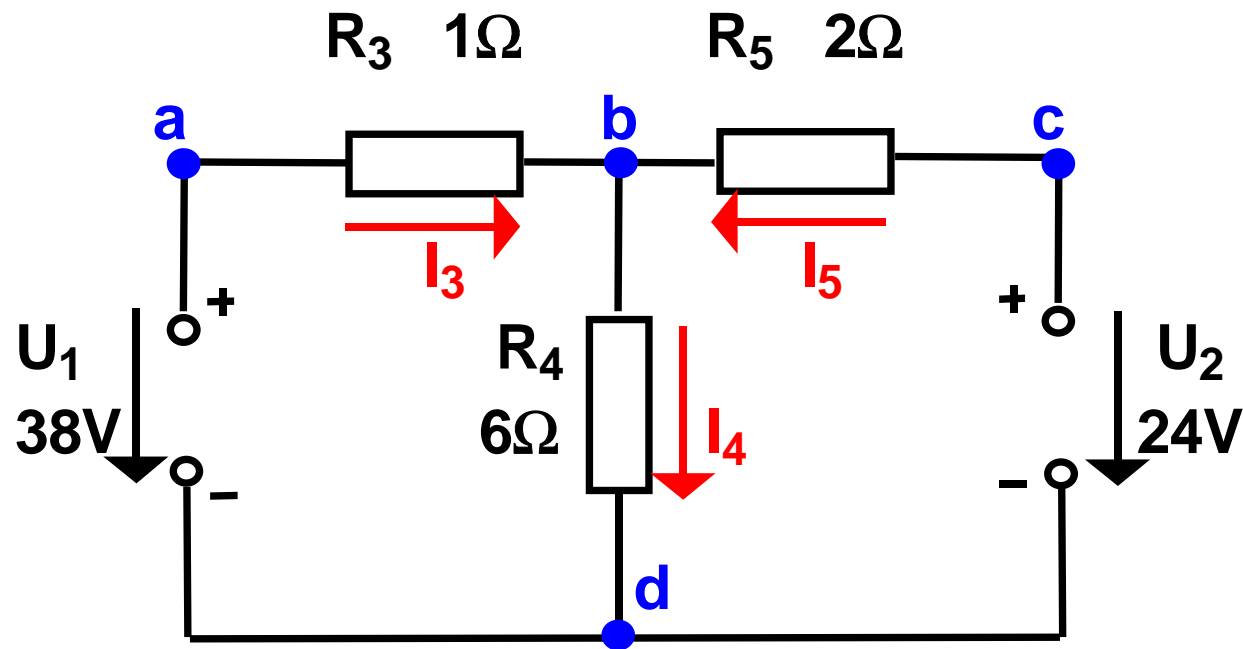
Sie messen, dass der Strom in die Hauptplatine 2,2 A beträgt und der Strom in die Festplatte 1,0 A.

An das Floppylaufwerk kommen sie nicht heran.

Wieviel Strom zu 5 Volt bekommt das Laufwerk ?



Anwendung 2: Knoten- und Maschenregel



○ Gesucht sind I_3 , I_4 und I_5

○ Knotenregel:

$$\sum I_b = +I_3 - I_4 + I_5 = 0$$

$$I_3 - I_4 + I_5 = 0 \text{ A}$$

○ Maschenregel:

$$\sum U_{abd} = U_1 - I_3 R_3 - I_4 R_4 = 0$$

$$1\Omega \cdot I_3 + 6\Omega \cdot I_4 = 38 \text{ V}$$

$$\sum U_{cbd} = U_2 - I_5 R_5 - I_4 R_4 = 0$$

$$2\Omega \cdot I_5 + 6\Omega \cdot I_4 = 24 \text{ V}$$

Substitutionsmethode

$$I_3 + I_5 = I_4$$

$$I_4 = 8\text{A} - 3\text{A} = 5\text{A}$$

$$1\Omega \cdot I_3 + 6\Omega \cdot (I_3 + I_5) = 38\text{V}$$

$$2\Omega \cdot I_5 + 6\Omega \cdot (I_3 + I_5) = 24\text{V}$$

$$(1+6)\Omega \cdot I_3 + 6\Omega \cdot I_5 = 38\text{V}$$

$$6\Omega \cdot I_3 + (6+2)\Omega \cdot I_5 = 24\text{V}$$

$$I_3 = \frac{38 - (6 \cdot -3)}{7} \text{A} = \frac{38 + 18}{7} \text{A} = \frac{56}{7} \text{A} = 8\text{A}$$

$$I_3 = \frac{38\text{V} - 6\Omega \cdot I_5}{7\Omega}$$

$$6\Omega \cdot \frac{38\text{V} - 6\Omega \cdot I_5}{7\Omega} + 8\Omega \cdot I_5 = 24\text{V}$$

$$6 \cdot 38\text{V} - 36\Omega \cdot I_5 + 56\Omega \cdot I_5 = 24 \cdot 7\text{V}$$

$$20\Omega \cdot I_5 = 168\text{V} - 228\text{V}$$

$$I_5 = -\frac{60\text{V}}{20\Omega} = -\frac{60}{20} \text{A} = -3\text{A}$$

**Negatives Vorzeichen,
da falsche Annahme der
Stromrichtung**

Lösung über Determinanten

System von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}X_1 & + & a_{12}X_2 & + & a_{13}X_3 & + & \cdots & a_{1n}X_n & = & b_1 \\ a_{21}X_1 & + & a_{22}X_2 & + & a_{23}X_3 & + & \cdots & a_{2n}X_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ a_{n1}X_1 & + & a_{n2}X_2 & + & a_{n3}X_3 & + & \cdots & a_{nn}X_n & = & b_n \end{array}$$

Determinante der Koeffizienten des Gleichungssystems

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Cramersche Regel

$$X_1 = \frac{1}{D} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{D_1}{D}$$

Entsprechend
für X_i

Berechnung von Determinanten

○ Determinante 2. Ordnung

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

○ Determinante 3. Ordnung

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Berechnung von Determinanten

○ Determinante 4. Ordnung

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{41} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

Für das Beispiel

○ Gleichungssystem

$$I_3 - I_4 + I_5 = 0\text{A}$$

$$1\Omega \cdot I_3 + 6\Omega \cdot I_4 = 38\text{V}$$

$$6\Omega \cdot I_4 + 2\Omega \cdot I_5 = 24\text{V}$$

○ Determinante D

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1\Omega & 6\Omega & 0\Omega \\ 0\Omega & 6\Omega & 2\Omega \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot 6\Omega \cdot 2\Omega + (-1) \cdot 0\Omega \cdot 0\Omega + 1\Omega \cdot 6\Omega \cdot 1 \\ &\quad - 1 \cdot 6\Omega \cdot 0\Omega - (-1) \cdot 1\Omega \cdot 2\Omega - 0\Omega \cdot 6\Omega \cdot 1 \\ &= 12\Omega^2 + 6\Omega^2 + 2\Omega^2 = 20\Omega^2 \end{aligned}$$

Für das Beispiel

○ Für I_5

$$\begin{aligned} D_5 &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0\text{A} \\ 1\Omega & 6\Omega & 38\text{V} \\ 0\Omega & 6\Omega & 24\text{V} \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot 6\Omega \cdot 24\text{V} + (-1) \cdot 38\text{V} \cdot 0\Omega + 1\Omega \cdot 6\Omega \cdot 0\text{A} \\ &\quad - 0\text{A} \cdot 6\Omega \cdot 0\Omega - (-1) \cdot 1\Omega \cdot 24\text{V} - 38\text{V} \cdot 6\Omega \cdot 1 \\ &= 6 \cdot 24\Omega\text{V} + 24\Omega\text{V} - 38 \cdot 6\Omega\text{V} \\ &= 144\Omega\text{V} + 24\Omega\text{V} - 228\Omega\text{V} = -60\Omega\text{V} \end{aligned}$$

$$I_5 = \frac{D_5}{D} = \frac{-60\Omega\text{V}}{20\Omega^2} = -3 \frac{\text{V}}{\Omega} = -3\text{A}$$

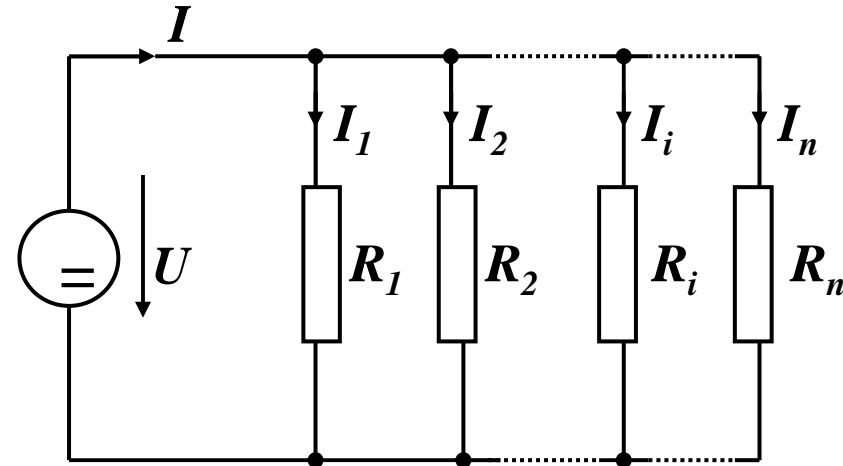
Sonderfall 1: Parallelschaltung von Widerständen

- Für die Teilströme I_1, I_2, \dots, I_n gilt:

$$I_1 = \frac{U}{R_1}, I_2 = \frac{U}{R_2}, \dots, I_n = \frac{U}{R_n}$$

- Nach der Knotenregel ist der Gesamtstrom:

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + \dots + I_n \\ &= \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \dots + \frac{U}{R_n} \\ &= U \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right) \end{aligned}$$



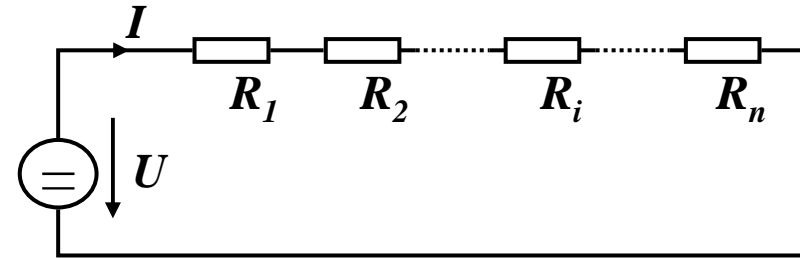
- Der Ersatzwiderstand der gesamten Schaltung berechnet sich durch:

$$\frac{1}{R_{gesamt}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

Sonderfall 2: Reihenschaltung von Widerständen

- Für die Spannungen U_1, U_2, \dots, U_n an den Widerständen gilt:

$$U_1 = I \cdot R_1, U_2 = I \cdot R_2, \dots, U_n = I \cdot R_n$$



- Nach Maschenregel ist die Gesamtspannung:

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 + \dots + U_n \\ &= I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + \dots + I \cdot R_n \\ &= I \cdot (R_1 + R_2 + \dots + R_n) \end{aligned}$$

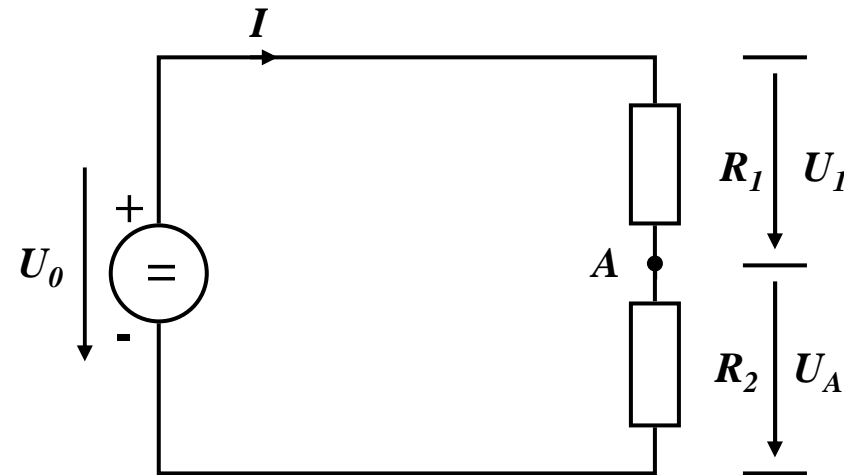
- Der Ersatzwiderstand der gesamten Schaltung berechnet sich durch:

$$R_{\text{gesamt}} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

Sonderfall 3: Spannungsteiler

- Reihenschaltung von zwei Widerständen
- Für das Verhältnis der Spannungen U_1 und U_A gilt:

$$I = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_A}{R_2} \Rightarrow \frac{U_1}{U_A} = \frac{R_1}{R_2}$$



- Ist U_0 , R_1 und R_2 gegeben, so folgt für U_A :

$$\frac{U_1}{U_A} = \frac{R_1}{R_2}, U_1 = U_0 - U_A \Rightarrow \frac{U_0 - U_A}{U_A} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$\Rightarrow \frac{U_0}{U_A} - \frac{U_A}{U_A} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$\Rightarrow \frac{U_0}{U_A} = \frac{R_1}{R_2} + 1$$

$$\Rightarrow U_A = \frac{U_0}{\frac{R_1}{R_2} + 1}$$

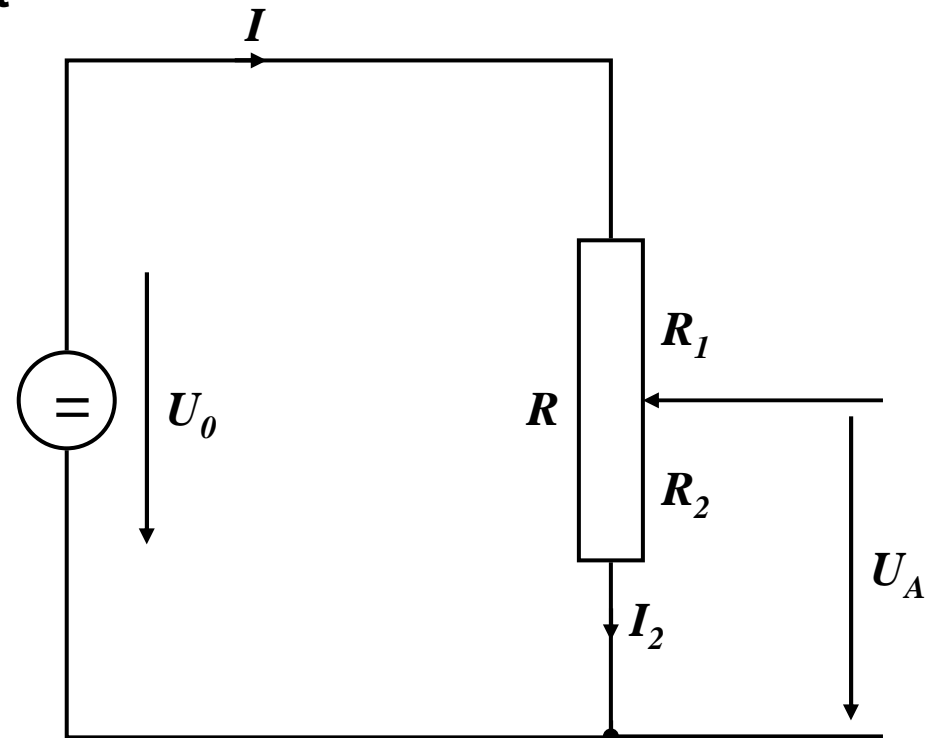
Sonderfall 4: Potentiometerschaltung

- Bei einem Potentiometer gilt zusätzlich:

$$R_1 = R - R_2$$

- Damit folgt:

$$\begin{aligned} U_A &= \frac{U_0}{\frac{R_1}{R_2} + 1} \\ &= \frac{U_0}{\frac{R - R_2}{R_2} + 1} \\ &= \frac{U_0}{\frac{R - R_2 + R_2}{R_2}} = \frac{U_0}{\frac{R}{R_2}} = U_0 \cdot \frac{R_2}{R} \end{aligned}$$



Graphische Bestimmung des Arbeitspunkts

- Praktische Anwendung bei nichtlinearen Kennlinien

⇒ Dioden, Transistoren

- Vorgehen:

1. Kennlinie für R_2 einzeichnen
2. Kennlinie für R_1 in das selbe Diagramm einzeichnen

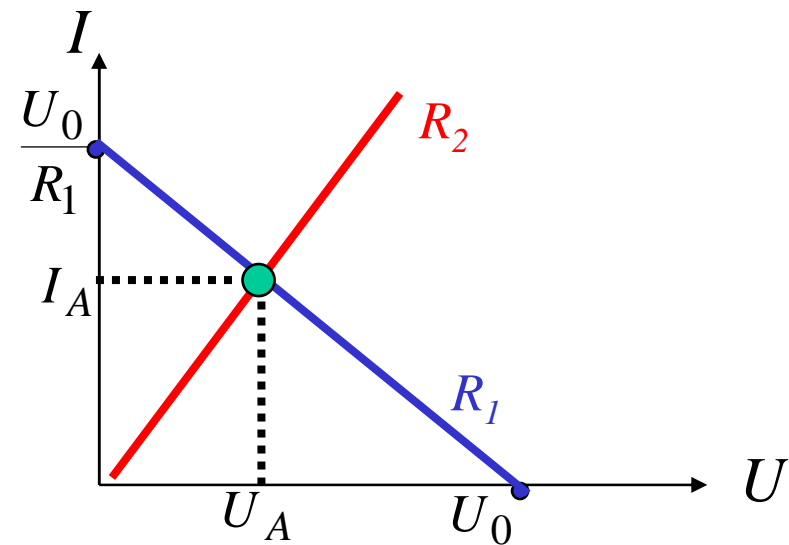
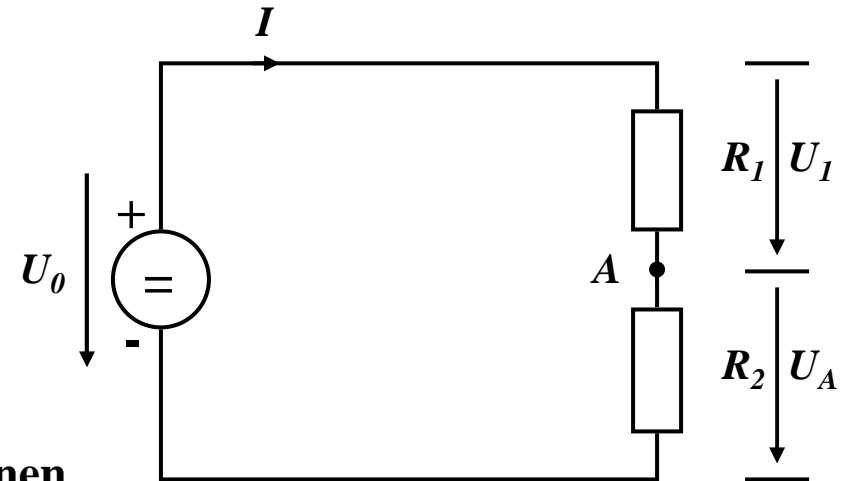
$$I = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_0 - U_A}{R_1}$$

2 Punkte:

$$U_A = 0 \Rightarrow I = \frac{U_0}{R_1}$$

$$U_A = U_0 \Rightarrow I = 0$$

3. Schnittpunkt A ergibt den **Arbeitspunkt** mit Spannung U_A und Strom I_A



Quellen- und Klemmenspannung

○ Ideale Spannungsquelle:

⇒ Liefert **Quellenspannung** U_q

⇒ nach dem Ohmschen Gesetz

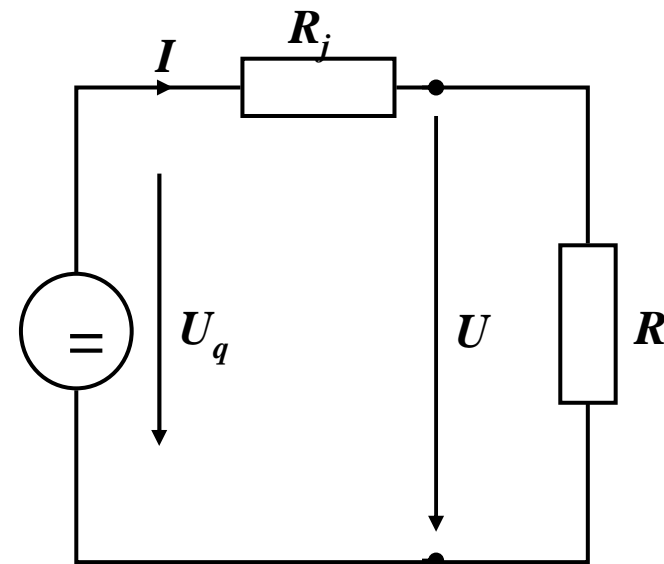
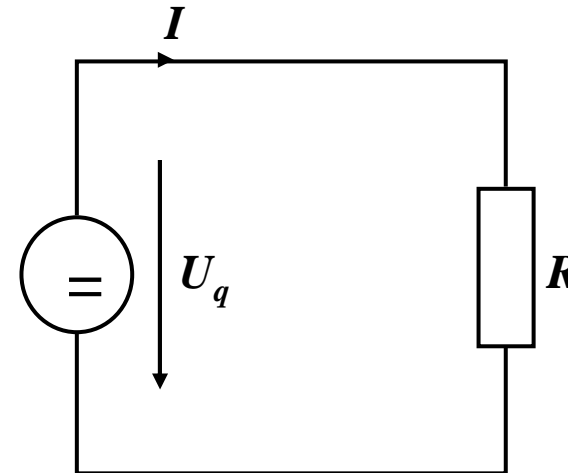
$$\lim_{R \rightarrow 0} I = \infty$$

○ Eine reale Spannungsquelle kann durch Hinzufügen eines Innenwiderstands modelliert werden

⇒ die abgreifbare Spannung heißt **Klemmenspannung**

$$U = U_q - I \cdot R_i$$

$$I = \frac{U_q}{R + R_i}$$



3 Halbleiter

○ Halbleiter sind Elemente, deren Leitfähigkeit zwischen der von Isolatoren und Leitern liegt

⇒ besitzen einen kristallinen Aufbau ohne Metallbindung

⇒ die Leitfähigkeit kann durch Fremdatome beeinflusst werden

○ Die Leitfähigkeit von Halbleitern schwankt mit der Temperatur

⇒ beim absoluten Nullpunkt ist sie Null

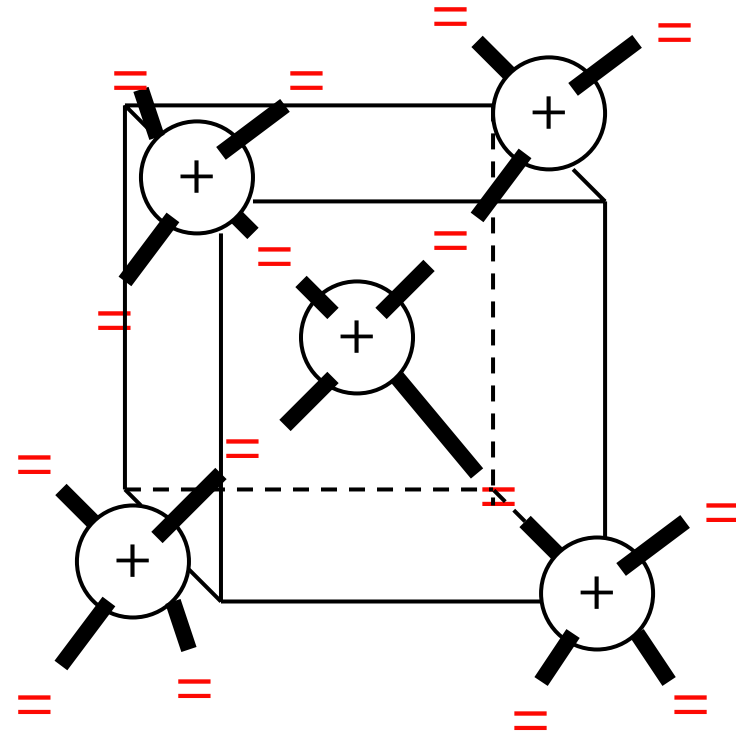
⇒ bei höheren Temperaturen liegt sie zwischen Metallen und Nichtleitern

Beispiele

<i>Material</i>	<i>Widerstand (Ω/m)</i>	<i>Einordnung</i>
Hartgummi	10^{16}	Nichtleiter
Glas	10^{10}	Nichtleiter
Galliumarsenid (rein)	10^3	Halbleiter
Silizium (rein)	100	Halbleiter
Silizium (dotiert)	1 bis 100	Halbleiter
Germanium (rein)	1	Halbleiter
Germanium (dotiert)	1 bis 10^{-5}	Halbleiter
Eisen	10^{-7}	Leiter
Silber	10^{-8}	Leiter

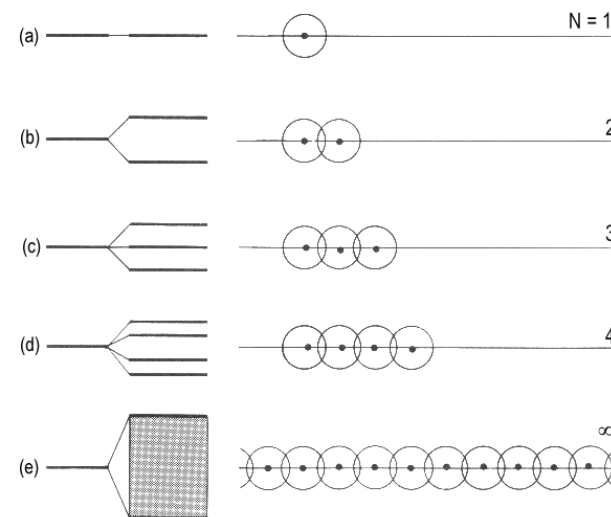
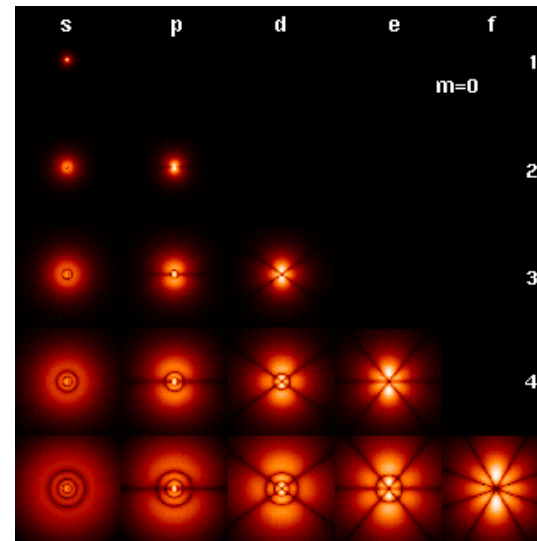
Kristallstruktur in Germanium und Silizium

- **Kristallstruktur**
 - ⇒ regelmäßig angeordnetes Atomgefüge
- **Amorphe Struktur**
 - ⇒ kein regelmäßiges Atomgefüge
- **Mischkristalle**
 - ⇒ Fremdatome sind in die Kristallstruktur eingebaut
- **Polykristalle**
 - ⇒ Mehrere Kristalle bilden ein Gefüge
- **Einkristall**
 - ⇒ der Körper besteht aus einem einzigen Kristall
- **In Siliziumkristallen sind die Atome in einer Tetraederstruktur aufgebaut**



Bändermodell

- In Einzelatomen bewegen sich die Elektronen in Schalen (die jeweils verschiedenen Energieniveaus entsprechen) (**Schalenmodell**)
- Je mehr Atome in Wechselwirkung treten desto mehr Energieniveaus sind möglich
- In Kristallen gibt es sehr viele verschiedene Energieniveaus die zu Bändern zusammengefasst werden (**Bändermodell**)



Bändermodell

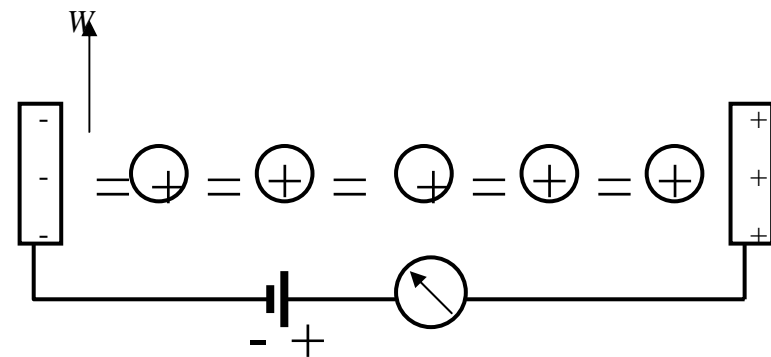
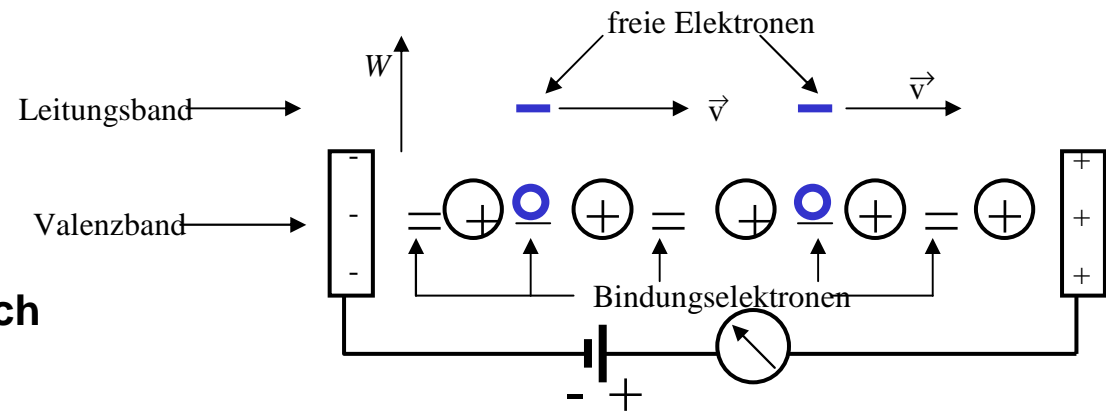
○ **Valenzband:** Elektronen im obersten Energieband

○ **Leitungsband:** nächstes Energieband über dem Valenzband

⇒ Werden Elektronen durch Energiezufuhr in das Leitungsband gehoben, können sie sich in diesem frei bewegen

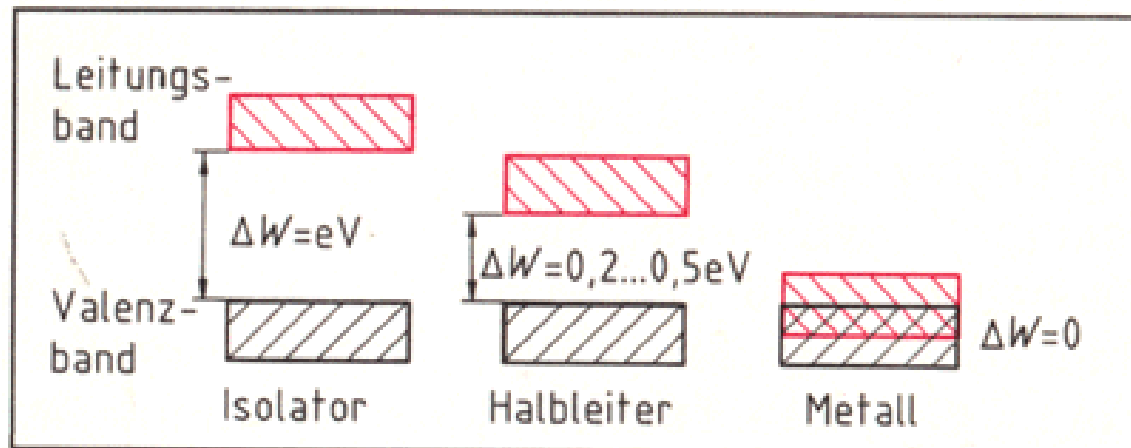
○ In voll besetzten oder in leeren Bändern ist ein Elektronenfluss nicht möglich

⇒ Ist das Valenzband voll besetzt, findet kein Ladungstransport statt



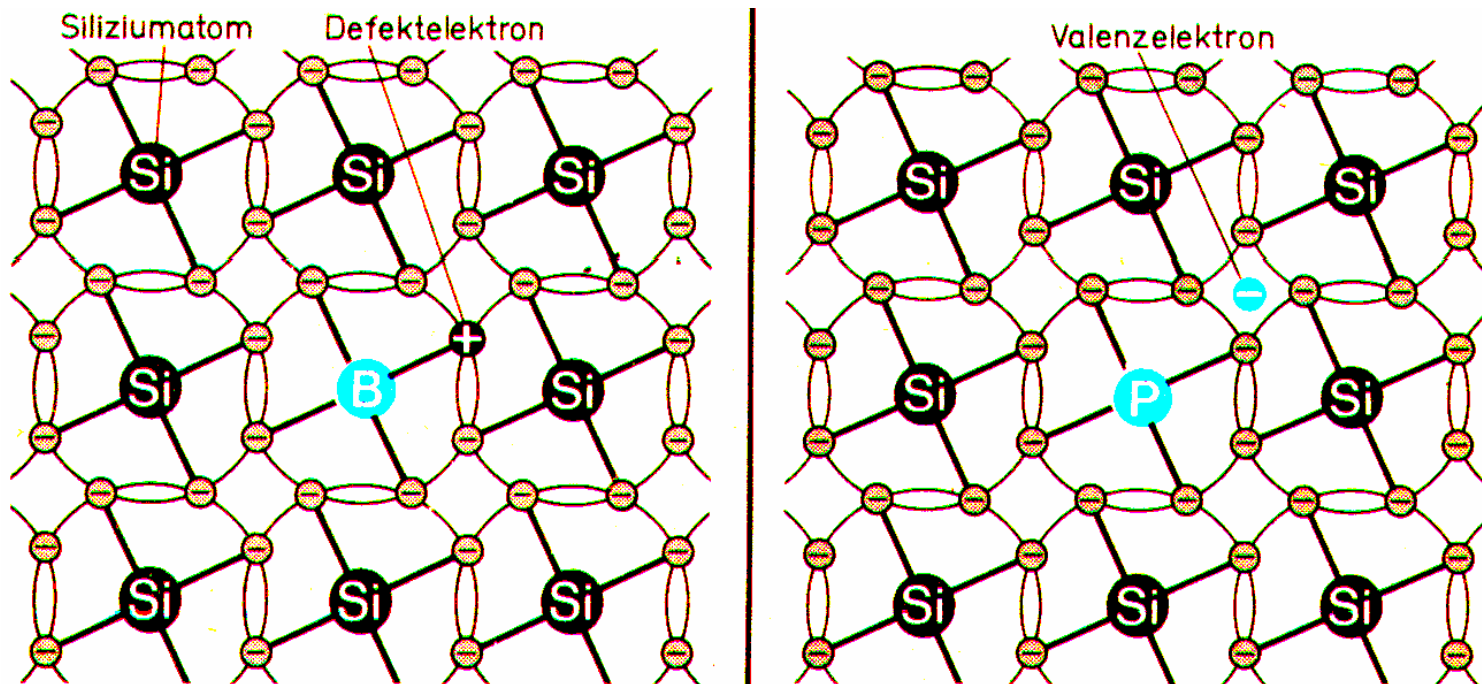
Bändermodell

- Die Differenz zwischen den Energieniveaus von Valenzband und Leitungsband ist für die elektrische Leitfähigkeit wesentlich



Dotierte Halbleiter

- Gezielter Einbau von Fremdatomen in Silizium- oder Germaniumkristalle durch *Dotierung*
 - ⇒ zusätzliche Valenzelektronen durch Arsen (As), Antimon (Sb) oder Phosphor (P)
 - ⇒ fehlende Valenzelektronen durch Aluminium (AL), Bor (B) oder Indium (In)

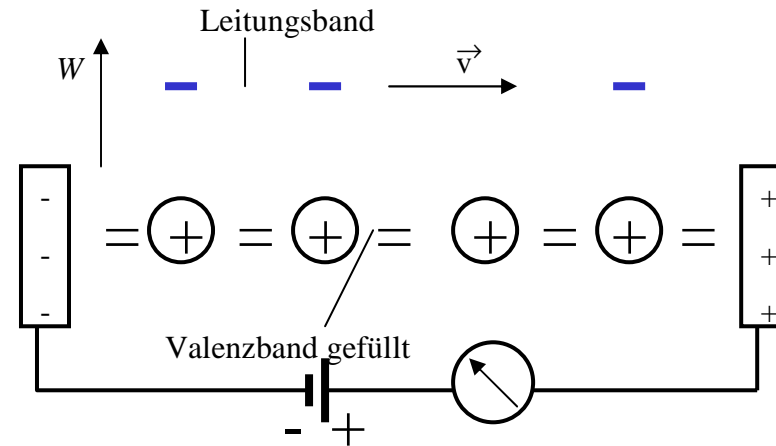


Leitfähigkeit durch Störstellen

- Geringe Energie reicht aus, um das Elektron in das Leitungsband zu heben

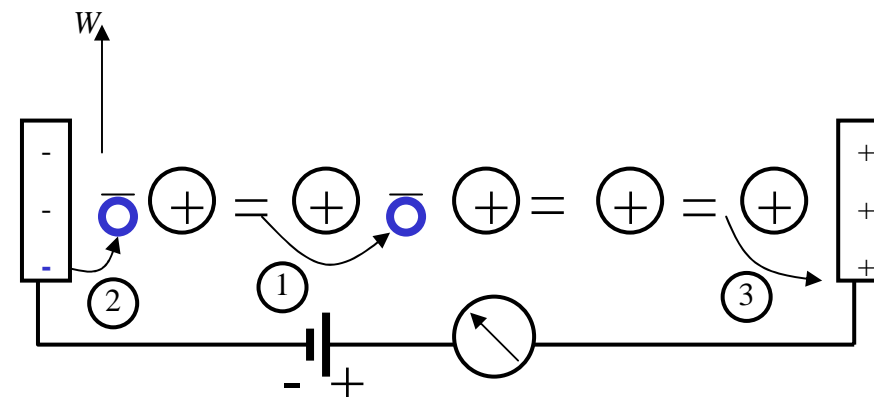
- Donatoratom

- ⇒ Das Atom gibt das zusätzliche Elektron leicht ab
- ⇒ n-Dotierung



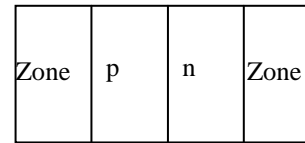
- Akzeptoratom

- ⇒ Das Atom nimmt ein Elektron leicht auf
- ⇒ p-Dotierung

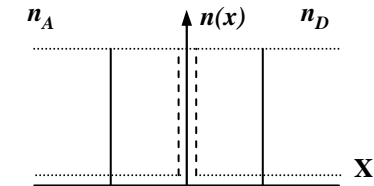


3.1 Der *pn*-Übergang

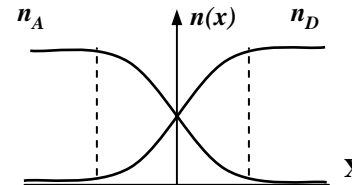
- **Grenzschicht** zwischen p- und n-dotierten Schicht
- **Ausgleich der Ladungsträger durch Diffusion über die Grenzschicht**
 - ⇒ Es entsteht ein elektrisches Feld
- **wenn Diffusionswirkung und Feldwirkung gleich sind**
 - ⇒ Gleichgewicht
 - ⇒ Ladungsträgerfreie Zone
 - ⇒ **Diffusionsspannung U_D**
- **Bei Zimmertemperatur**
 - ⇒ Germanium $U_D = 0,37 \text{ V}$
 - ⇒ Silizium $U_D = 0,75 \text{ V}$



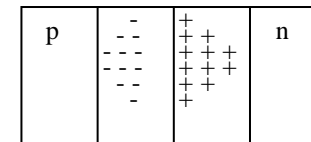
a) Grenzschicht mit n - dotierter und p - dotierter Zone



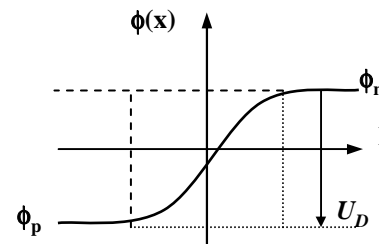
b) Konzentration der Donatoren n_D und Akzeptoren n_A ohne Ausgleich



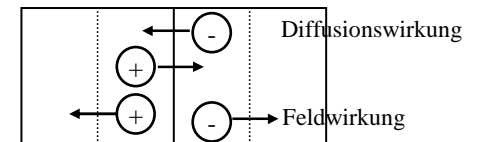
c) Konzentrationsdichte nach der Diffusion



d) Raumladung

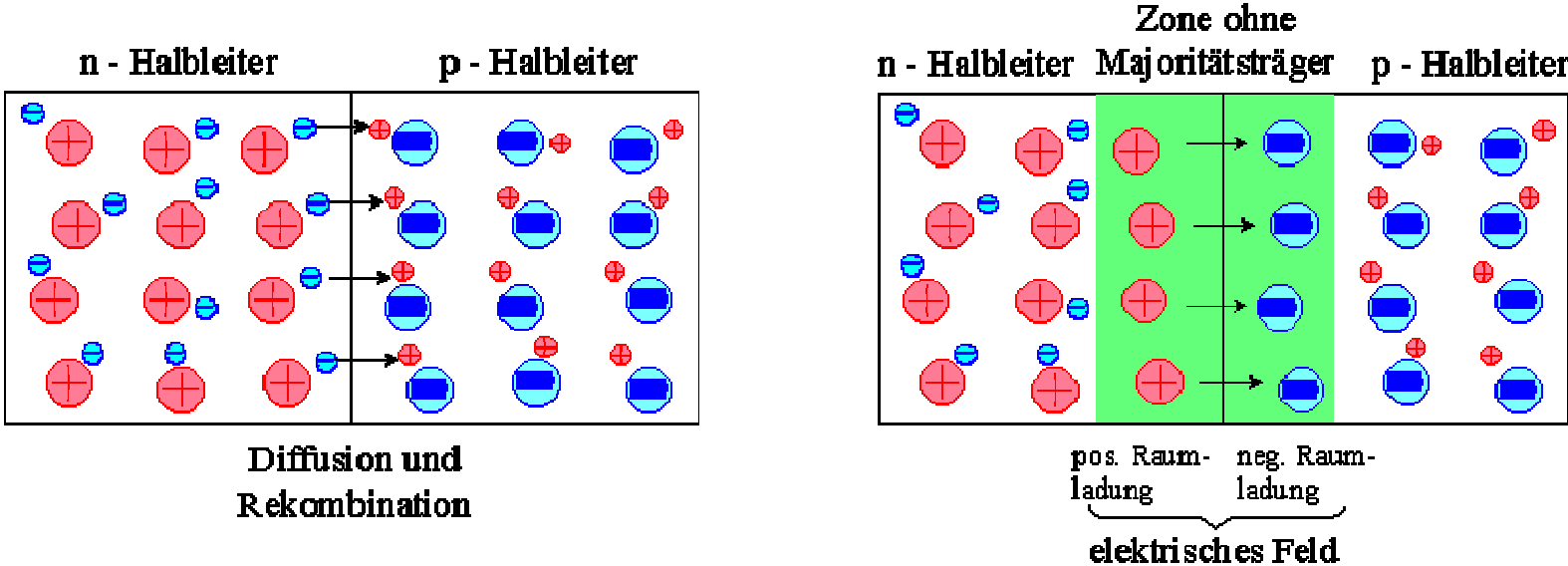


e) Potenzialverlauf quer zur Grenzschicht



f) Kraftwirkung

Der *pn*-Übergang



Halbleiterdioden

○ Halbleiterdiode

- ⇒ nutzt die Leitfähigkeitseigenschaften eines pn-Übergangs

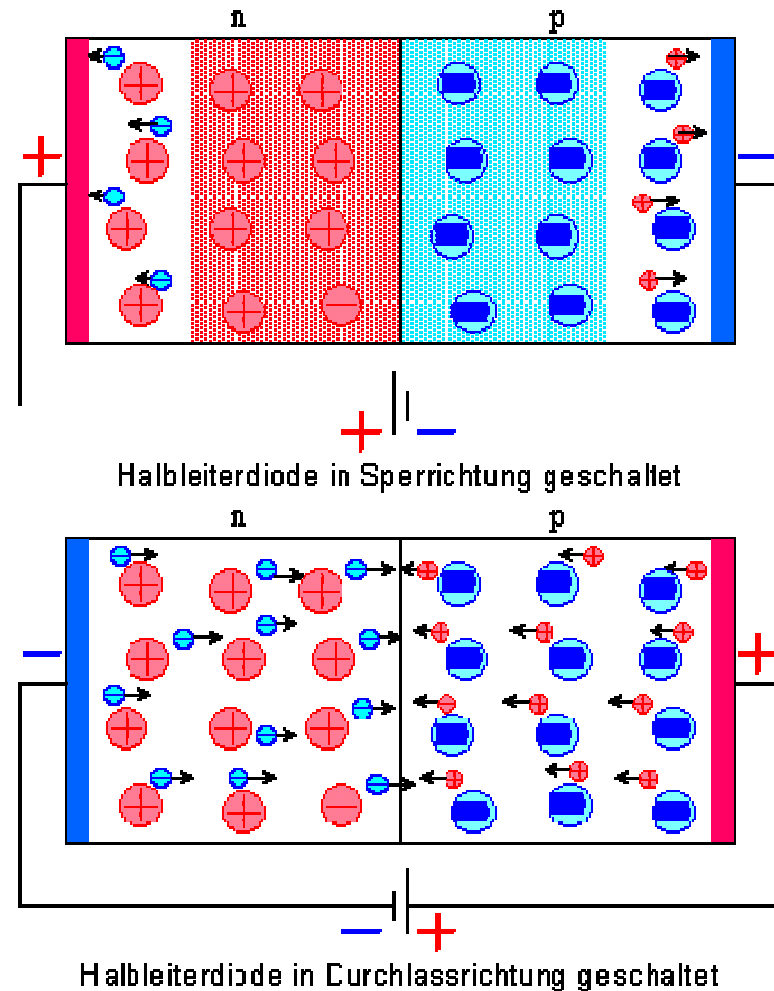
pn-Übergang mit äußerer Spannung:

○ Sperrichtung

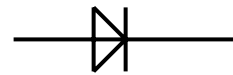
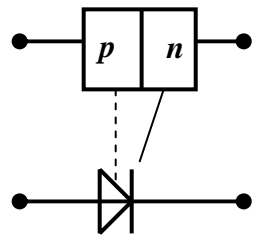
- ⇒ Ladungsträgerfreie Zone wird größer
- ⇒ Es fließt kein Strom
- ⇒ Durchbruch, wenn die Feldstärke (Spannung) zu groß wird (*Lawinen-Effekt*)

○ Durchlassrichtung

- ⇒ Ladungsträgerfreie Zone wird kleiner
- ⇒ Wenn $U > U_D$ wird, fließt ein Strom

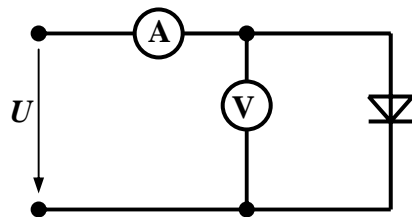


Kennlinie des pn -Übergangs

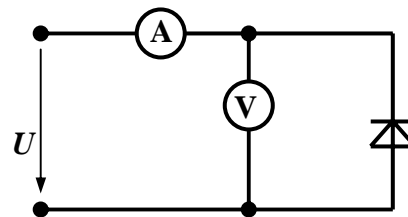


Schaltzeichen

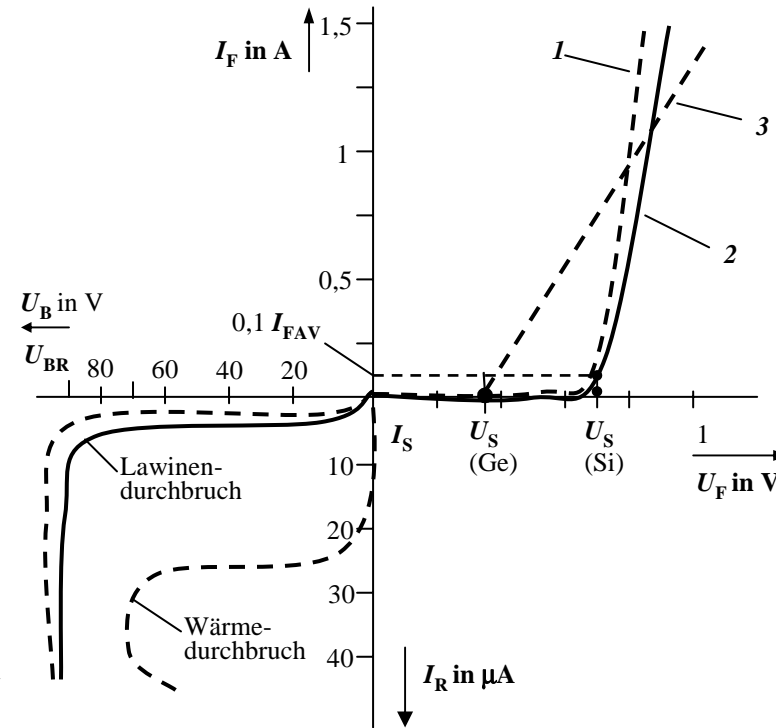
Schaltzeichen



Schaltung in Durchlassrichtung



Schaltung in Sperrichtung



- 1: Silizium ideal
- 2: Silizium real
- 3: Germanium real

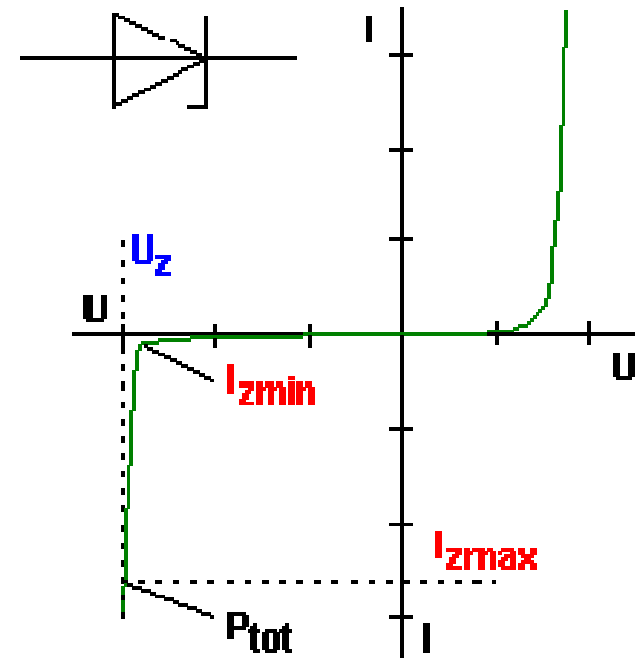
Halbleiterdioden mit besonderen Eigenschaften

○ Schottky-Dioden

- ⇒ Beruht auf dem von Schottky untersuchten Metall-Halbleiter Übergang
- ⇒ Diffusion wie bei pn-Übergang
- ⇒ besonders schnelle Dioden

○ Z-Dioden

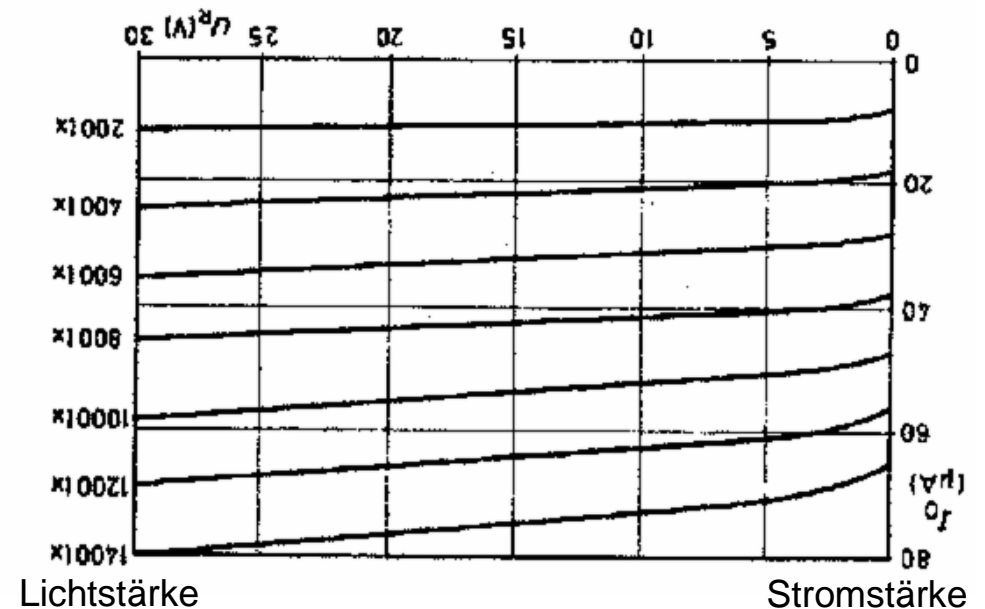
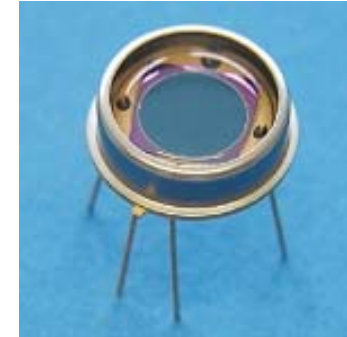
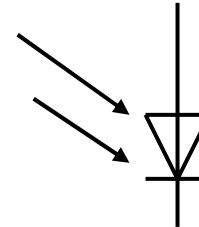
- ⇒ Ausnutzung des Lawinen-Effekts (Diode wird dabei nicht zerstört)
- ⇒ Strom darf einen Höchstwert I_{Zmax} nicht überschreiten (Vorwiderstand kann dies verhindern)
- ⇒ Anwendung: Spannungsbegrenzung bei Wechselspannungen



Halbleiterdioden mit besonderen Eigenschaften

○ Fotodioden

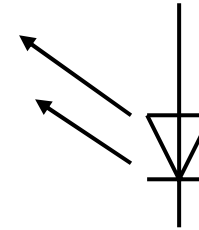
- ⇒ Licht kann durch eine Öffnung an den pn-Übergang gelangen
- ⇒ ein einfallendes Lichtquant erzeugt ein Elektron-Loch-Paar
- ⇒ Fotodioden werden in Sperrichtung betrieben
 - ist kein Licht vorhanden fließt kein Strom
 - bei Lichteinfall fließt durch den Photoeffekt ein Strom (proportional Lichtstärke)
- ⇒ Lichtschranken
- ⇒ Datenübertragung mit Lichtwellenleitern



Halbleiterdioden mit besonderen Eigenschaften

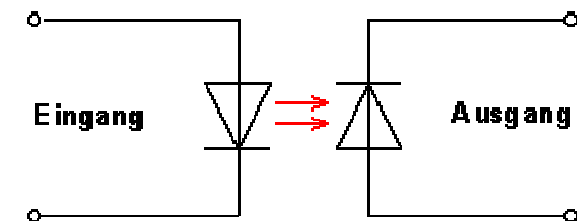
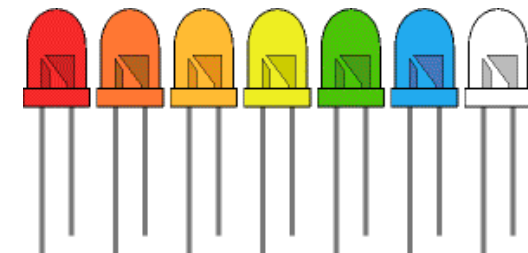
○ Lumineszenzdioden (Light Emitting Diode, LED)

- ⇒ pn-Übergang mit hoher Dotierung
- ⇒ Betrieb in Durchlassrichtung (Vorwiderstand)
- ⇒ Durchlassstrom injiziert Ladungsträger in den p- und n-Bereich
- ⇒ Durch die hohe Zahl der Überschusselektronen (n-Bereich) bzw. Löcher (p-Bereich) werden Ladungsträger aus dem Leitungsband in das Valenzband gezogen (Rekombination)
- ⇒ Durch den Energieerhaltungssatz muss Energie abgegeben werden → es entsteht ein Lichtquant



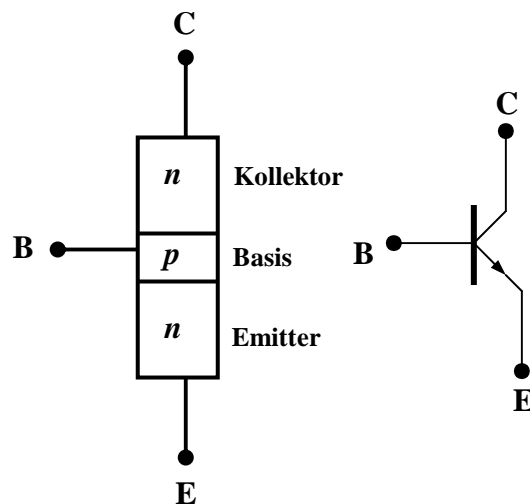
⇒ Anwendungen:

- Anzeigen
- Datenübertragung durch Lichtwellenleiter
- Optokoppler - zur Verbindung elektrisch getrennter Bauteile (LED+Fotodiode)

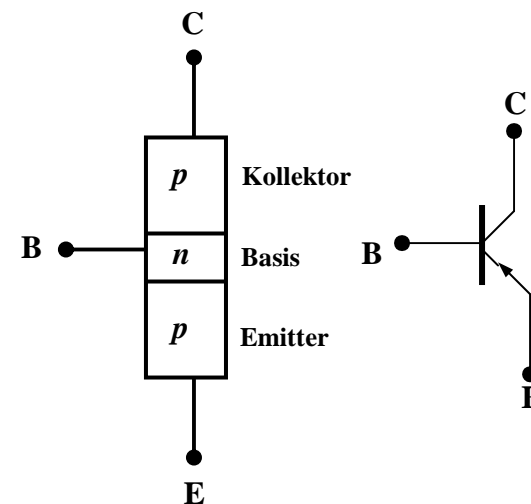


3.2 Bipolare Transistoren

- Ausnutzen der Eigenschaft zweier pn-Übergänge
 - ⇒ NPN-Transistor
 - ⇒ PNP-Transistor
- Von jeder Zone wird ein Anschluss herausgeführt
 - ⇒ Emitter (E)
 - ⇒ Basis (B)
 - ⇒ Kollektor (C)



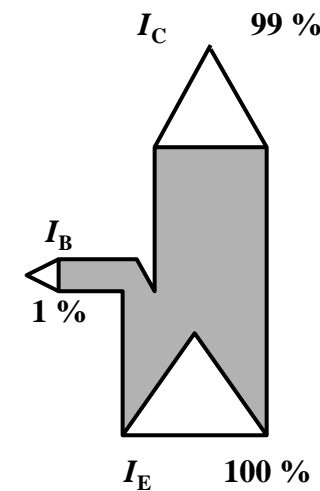
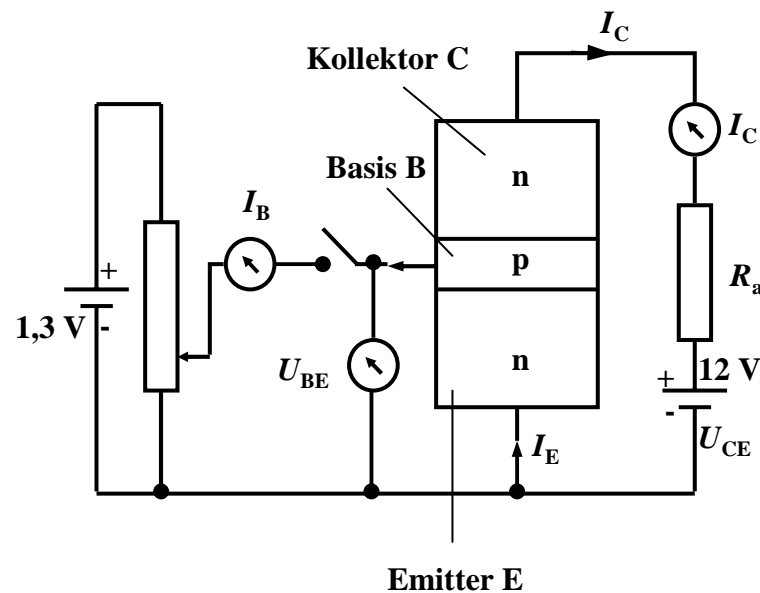
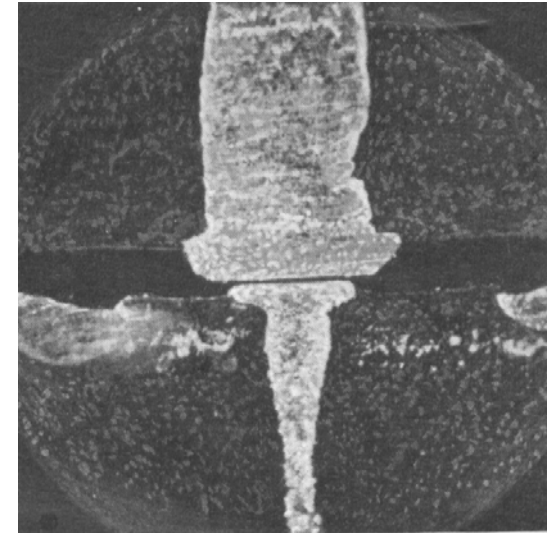
NPN-Transistor



PNP-Transistor

Der Transistoreffekt

- **Basis des Transistors ist sehr dünn**
 - ⇒ Die Emitter-Basis-Diode wird in Durchlassrichtung gepolt
 - ⇒ Die meisten der Elektronen fließen jedoch nicht über die Basis ab, sondern werden vom Kollektor aufgenommen (starkes elektrisches Feld)
 - ⇒ Es fließt nur ein kleiner Basisstrom



Der Transistoreffekt

- Erhöht man die Spannung an der Basis, so bleibt der Basisstrom relativ klein, der Kollektorstrom wächst hingegen relativ stark

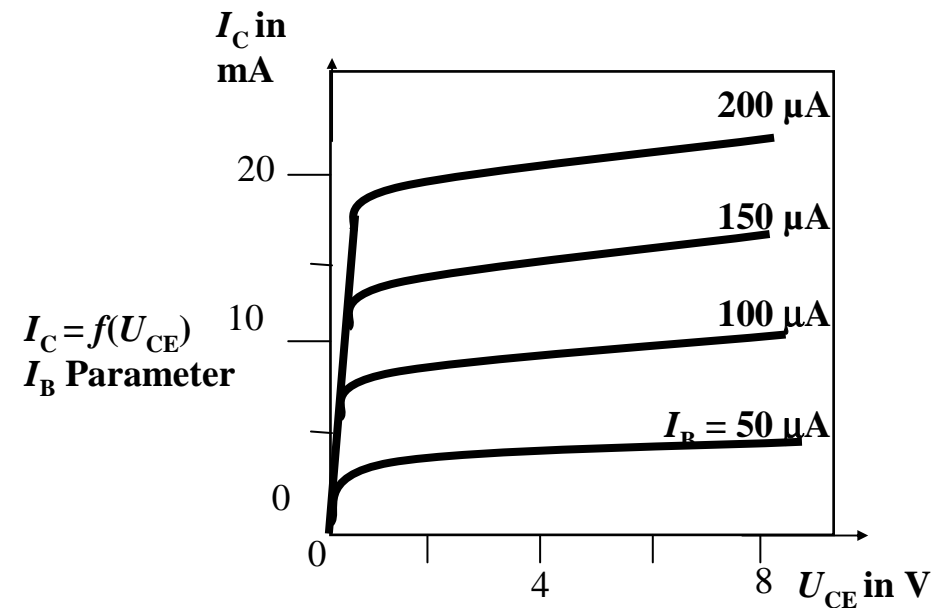
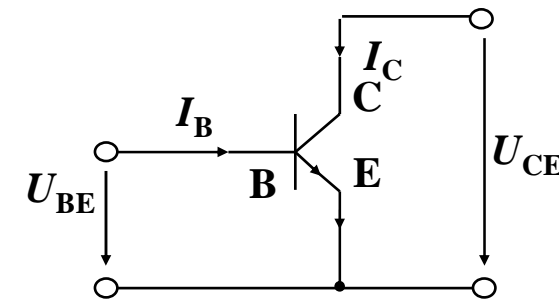
⇒ Der Transistor ist ein **stromgesteuerter Widerstand**

- **Stromverstärkung**

$$B = \frac{I_C}{I_B}$$

- **Der Basisstrom steuert den Kollektorstrom**

$$I_B \cdot B = I_C$$



Ausgangskennlinien (Stromsteuerung)

Arbeitspunkt

- Der Arbeitspunkt kann sich nur entlang der Arbeitsgeraden verschieben

- **Sperrbereich**

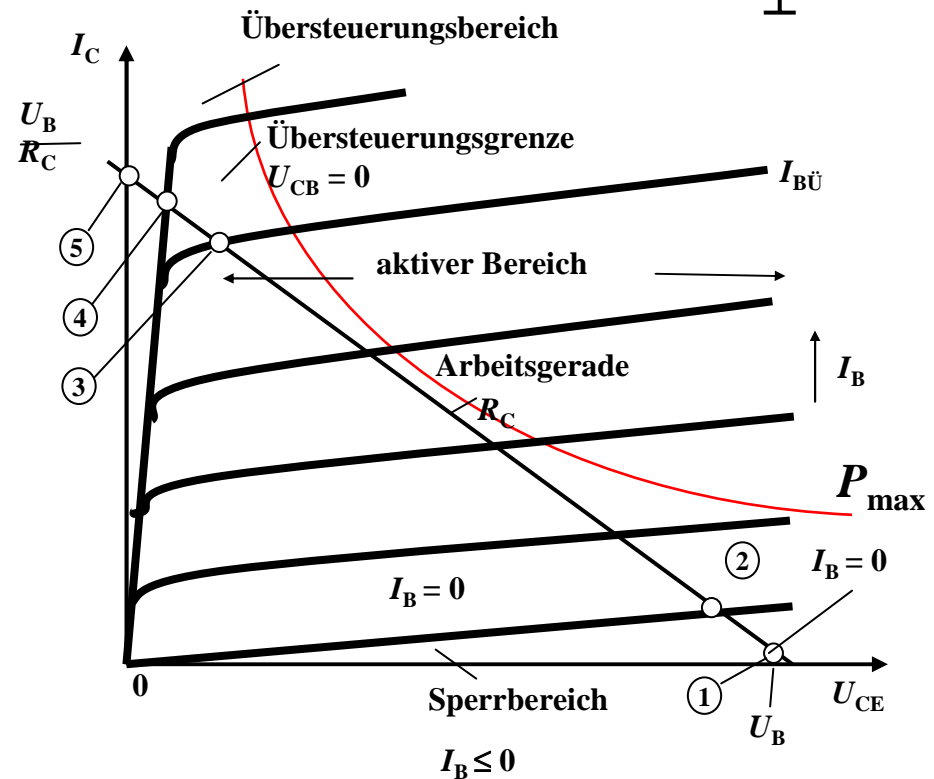
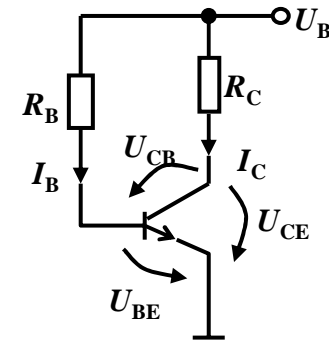
- ⇒ AP 1 bis AP 2
- ⇒ $I_B = 0, U_{CE} \approx U_B, I_C \approx 0$
- ⇒ Schalter aus

- **Aktiver Bereich**

- ⇒ AP 2 bis AP 3
- ⇒ Transistor als Verstärker

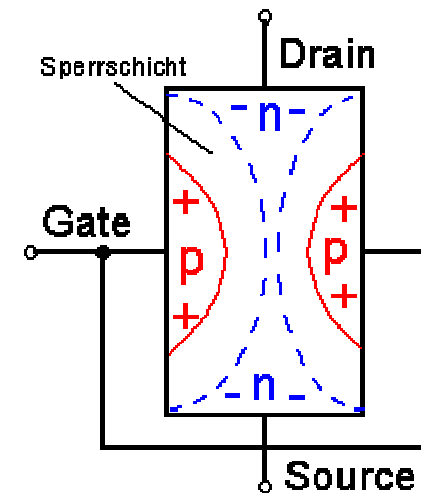
- **Sättigungsbereich**

- ⇒ Übersteuerung
- ⇒ AP 3 bis AP 4
- ⇒ $I_C \approx U_B/R_C$
- ⇒ Schalter ein



3.3 Unipolare Transistoren

- Im Gegensatz zu bipolaren Transistoren wird bei **unipolaren** Transistoren der Strom durch eine **Spannung** gesteuert
 - ⇒ Elektrisches Feld
 - ⇒ **Feldeffekt-Transistor (FET)**
 - ⇒ Spannungsgesteuerter Widerstand
- Anschlüsse
 - ⇒ **Source S** (Quelle)
 - ⇒ **Drain D** (Senke)
 - ⇒ **Gate G** (Tor)
- **Sperrschicht-FET**
 - ⇒ Erhöhtes negatives Potential an G bewirkt Ausdehnung der Sperrschicht
 - ⇒ es ist kein Strom am Gate nötig, um den Stromfluss von G zu S zu sperren



Isolierschicht-FET (MOS-FET)

○ Isolierschicht-FET

- ⇒ Beeinflussung der Leitfähigkeit durch Influenz
- ⇒ Isolation des Gates durch Isolator (Siliziumdioxid, SiO_2)
- ⇒ **MOS**: Metal Oxide Semiconductor

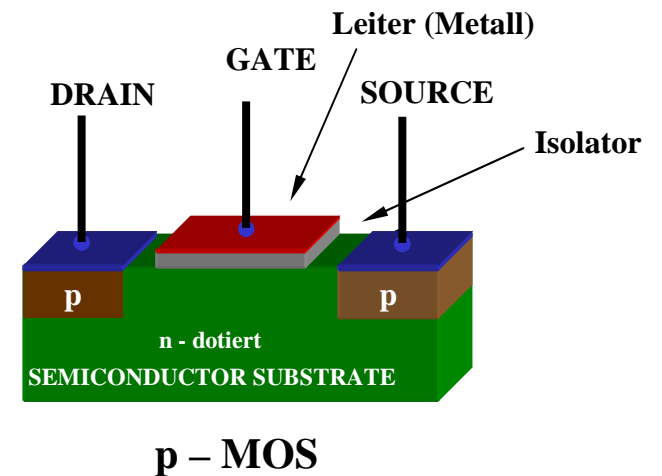
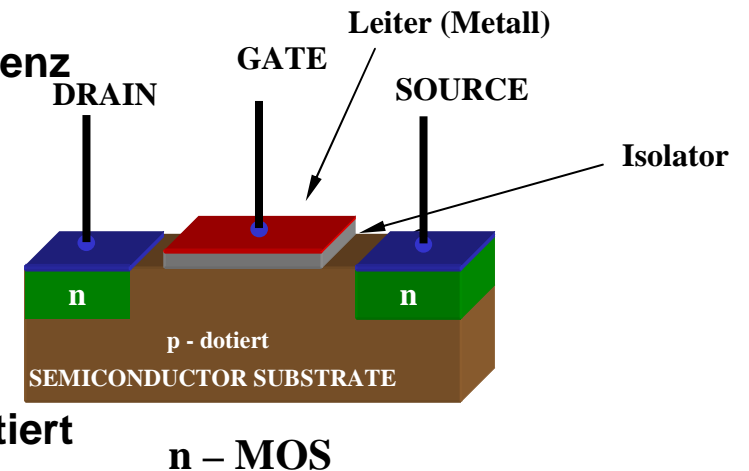
○ n-MOS

- ⇒ das gesteuerte Halbleiter-Substrat ist p-dotiert
- ⇒ die Anschlüsse sind stark n-dotiert
- ⇒ n-Kanal-MOS-FET

○ p-MOS

- ⇒ das gesteuerte Halbleiter-Substrat ist n-dotiert
- ⇒ die Anschlüsse sind stark p-dotiert
- ⇒ p-Kanal-MOS-FET

- Da die n-Zonen (p-Zonen) weit auseinanderliegen, kommt es nicht zum Transistoreffekt

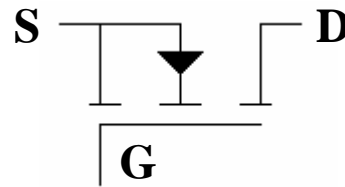


Der NMOS-Transistor

○ Anreicherungstyp

⇒ enhancement

⇒ selbstsperrend



○ Funktionsweise

⇒ Unter der Oxidschicht werden durch Influenz Ladungsträger angesammelt

⇒ Die Raumladungen (Löcher) werden zurückgedrängt

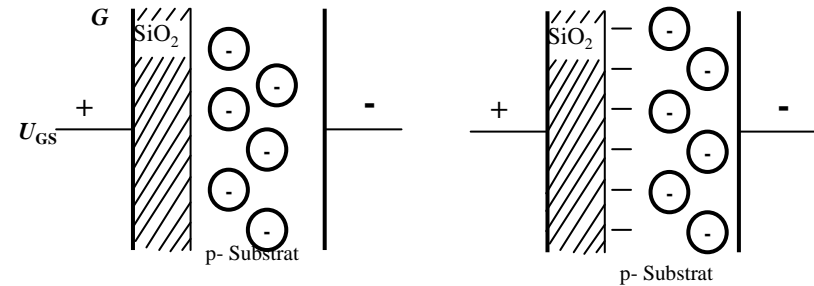
⇒ Es bildet sich ein leitender **n-Kanal**

⇒ Dicke des Kanals abhängig von U_{GS}

○ Der NMOS-Transistor leitet, wenn U_{GS} positiv ist

⇒ D.h. am Gate liegt eine positive Spannung gegenüber Source an

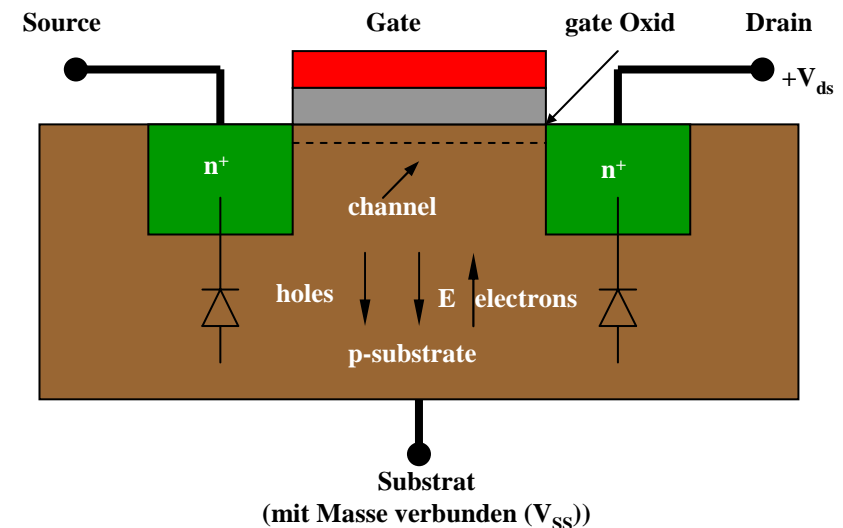
○ Der NMOS-Transistor sperrt, wenn U_{GS} nahe 0V oder negativ ist



○ ortsfeste Raumladungen
- Ladungsträger

$0 < U_{GS} < U_{th}$

$U_{GS} > U_{th}$



Der PMOS-Transistor

- Dotierungen sind umgekehrt (im Vergleich zum NMOS-Transistor)

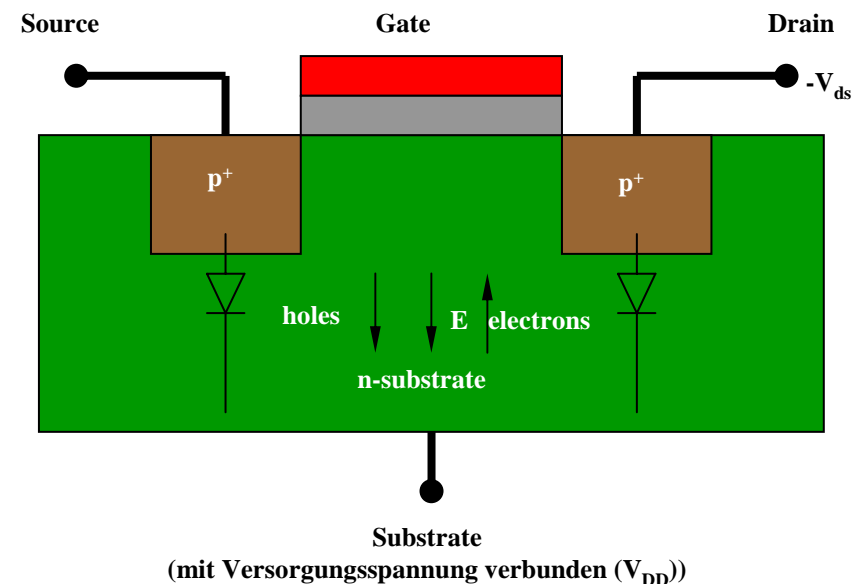
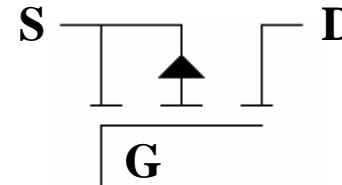
- Funktionsweise

- ⇒ Wie bei n-MOS Transistor
- ⇒ Statt Ladungsträger werden Löcher unter der Oxidschicht durch Influenz angesammelt
- ⇒ Es bildet sich ein leitender **p-Kanal**

- Der PMOS-Transistor leitet, wenn U_{GS} negativ ist

- ⇒ D.h. am Gate liegt eine negative Spannung gegenüber Source an

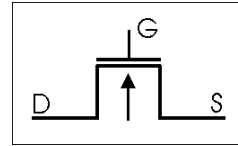
- Der PMOS-Transistor sperrt, wenn U_{GS} nahe 0V oder positiv ist



MOS-Transistor selbstleitend

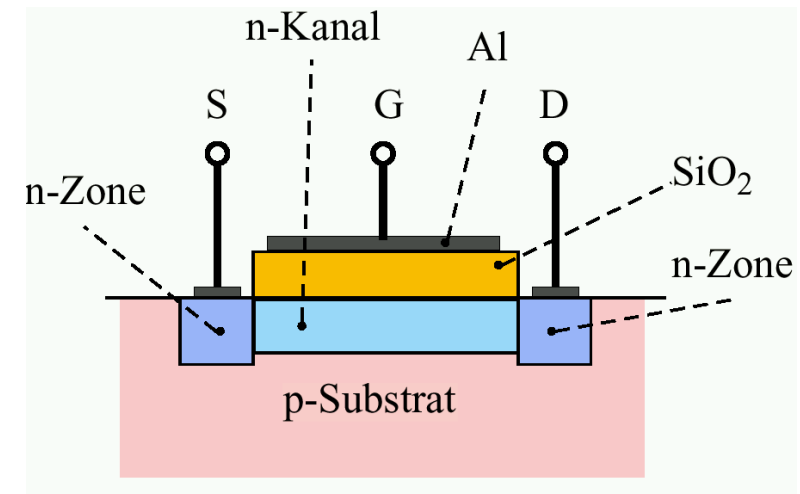
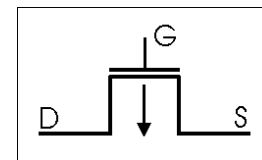
○ Verarmungstyp

- ⇒ depletion
- ⇒ selbstleitend

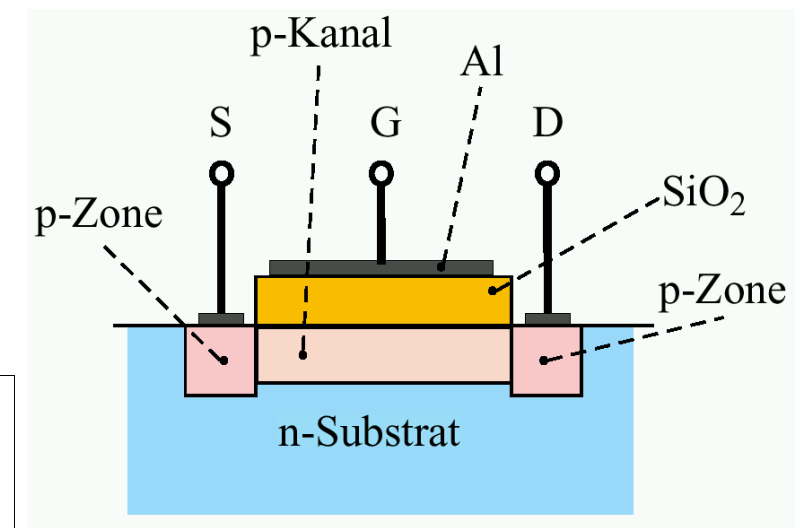


○ Funktionsweise

- ⇒ Ein leitender Kanal ist vorhanden:
 - n-Kanal bei n-MOS
 - p-Kanal bei p-MOS
- ⇒ Durch Anlegen einer geeigneten Spannung zwischen G und S wird der Kanal durch Influenz sperrend
 - negative Spannung bei n-MOS
 - positive Spannung bei p-MOS



n-MOS selbstleitend

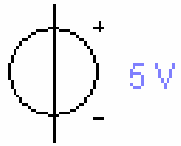


p-MOS selbstleitend

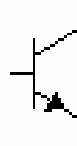
4 Der Transistor als Schalter

- **Elektronische Verknüpfungselemente** werden aus Halbleiterbauelementen aufgebaut
 - ⇒ Binäre Schaltvariablen werden nach den Gesetzen der Schaltalgebra miteinander verknüpft
 - ⇒ Werte entsprechen der Zweiwertigkeit von Schalterzuständen
- **Im Folgenden gilt:**
 - ⇒ „Ein“ entspricht „1“, 5 V, POWER oder VDD
 - ⇒ „Aus“ entspricht „0“, 0 V, GROUND oder VSS
- **Verknüpfungselemente** werden zu komplexeren **Schaltnetzen** und **Schaltwerken** zusammengefügt
 - ⇒ Die beteiligten Schaltelemente müssen die gleichen Signalpegel besitzen

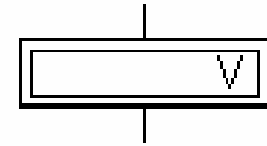
Schaltzeichen nach DIN



Spannungsquelle



NPN-Transistor

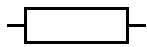


Spannungsmessgerät



Masse (GND)

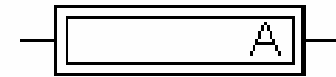
1 k Ohm



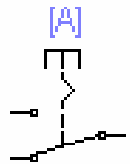
Widerstand



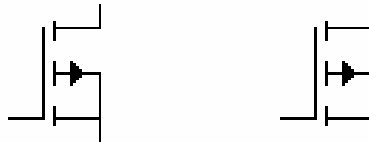
NMOS-Transistor



Strommessgerät



Schalter



PMOS-Transistor



Pegelanzeige

Idealer Schalter

○ Annahme: der Schaltvorgang

- ⇒ erfordert keine Leistung
- ⇒ benötigt keine Zeit
- ⇒ Im Schalter fällt keine Spannung ab

○ Im Schalterzustand „Ein“

$$R_i = 0 \quad \text{Innenwiderstand}$$

$$I = \frac{U_B}{R}$$

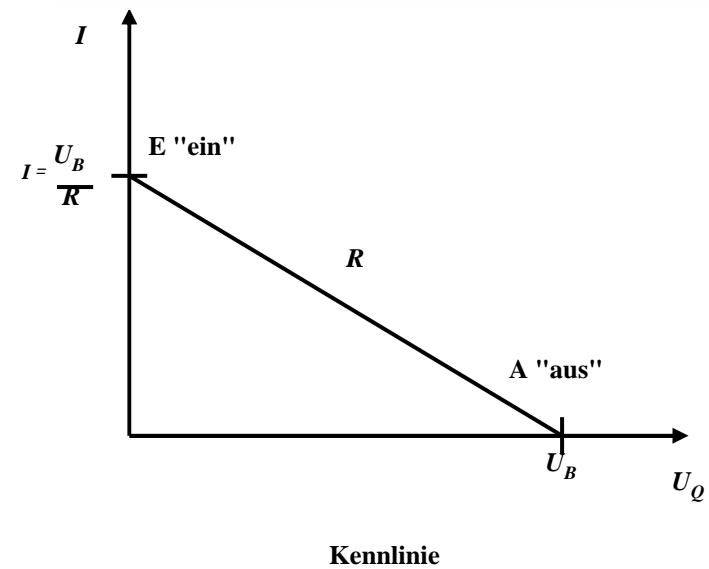
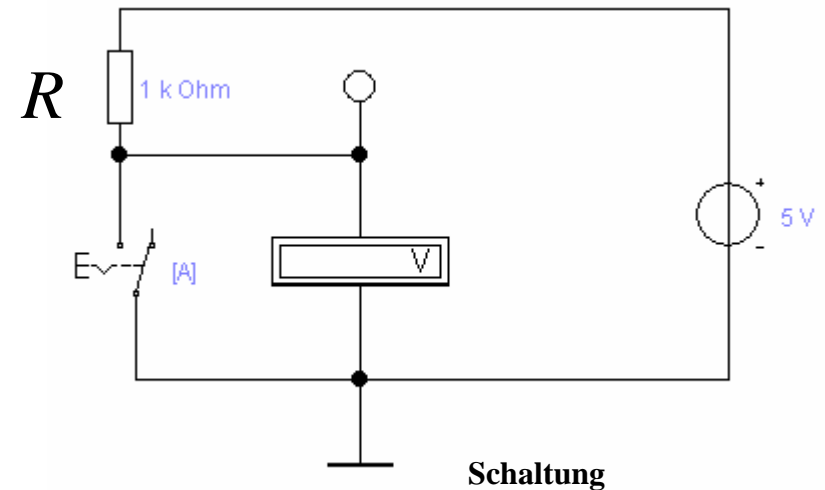
$$U_Q = 0$$

○ Im Schalterzustand „Aus“

$$R_S = \infty \quad \text{Sperrwiderstand}$$

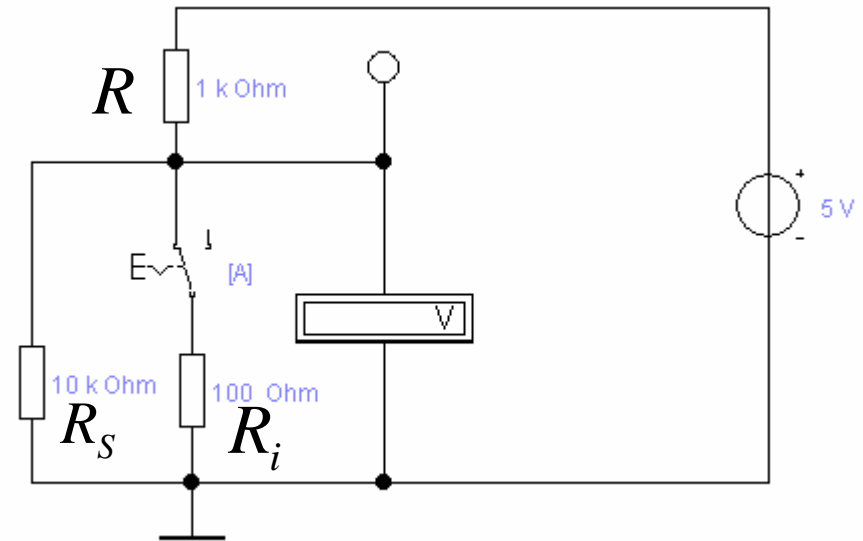
$$I = 0$$

$$U_Q = U_B$$



Realer Schalter

- R_i kann nicht 0 sein
- R_S kann nicht unendlich werden
 - ⇒ in der Praxis versucht man, R_i möglichst klein und R_S möglichst groß zu machen

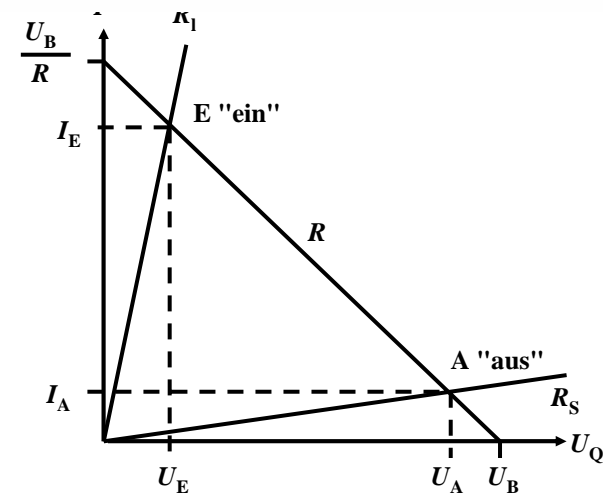


- Im Schalterzustand „Ein“

$$I_E = \frac{U_B}{R + R_i}; U_E = \frac{U_B \cdot R_i}{R + R_i}$$

- Im Schalterzustand „Aus“

$$I_A = \frac{U_B}{R + R_S}; U_A = \frac{U_B \cdot R_S}{R + R_S}$$

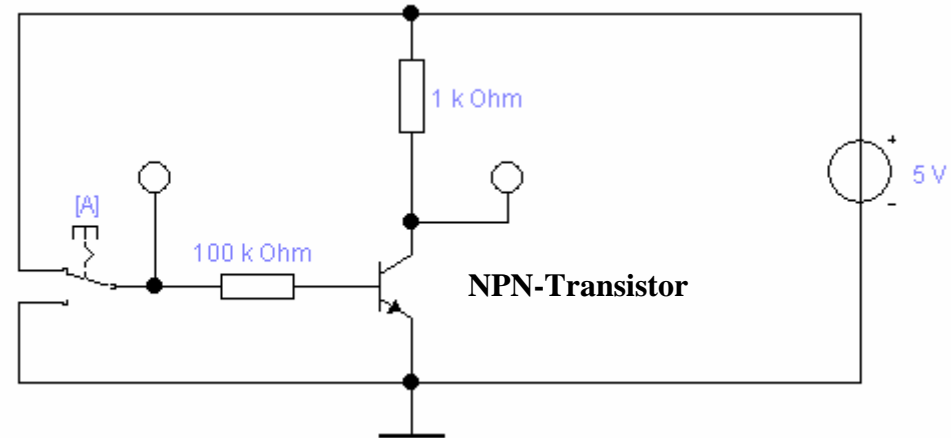


Kennlinie

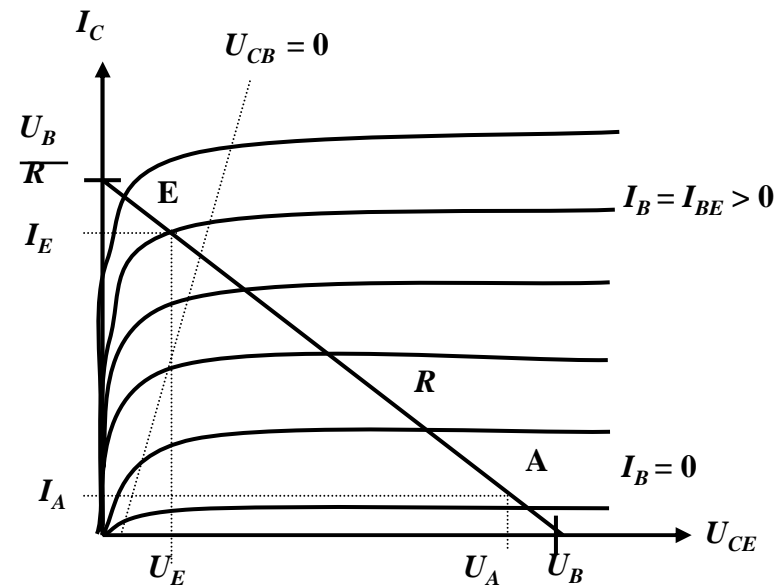
Martin Middendorf

Bipolarer Transistor als Schalter

- Schaltvorgang wird durch den Basisstrom I_B gesteuert
 - ⇒ Schalter Ein: Transistor leitet
 - ⇒ Schalter Aus: Transistor sperrt

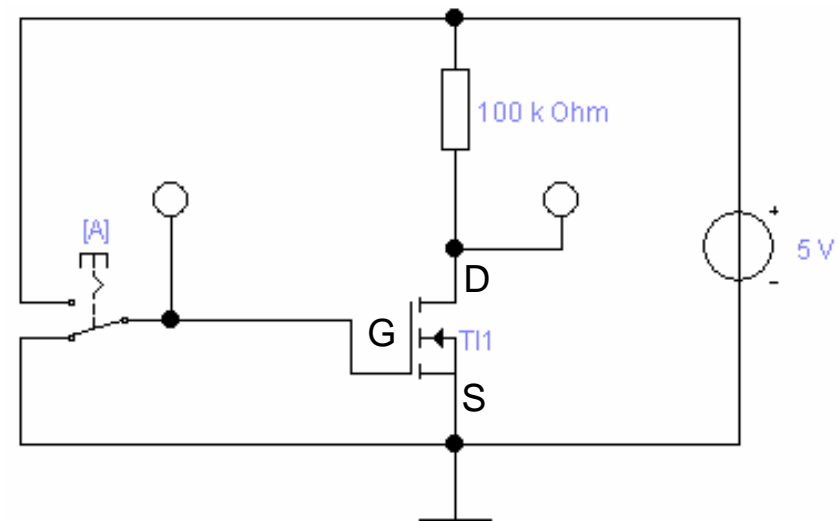
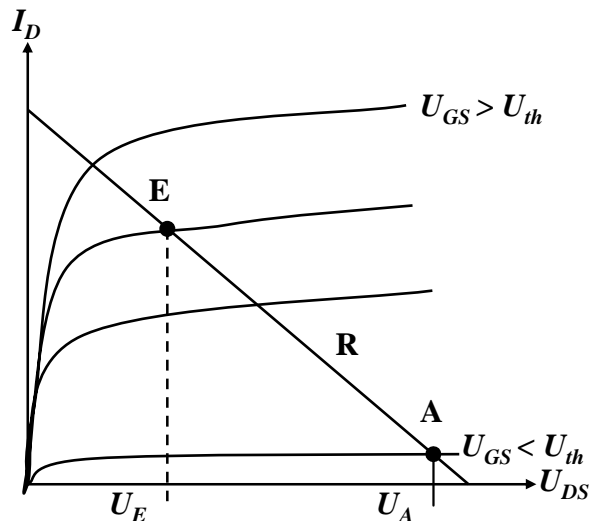


- Die Arbeitspunkte werden so berechnet, dass sich der Transistor im Übersteuerungsbereich befindet



Der NMOS-Transistor als Schalter

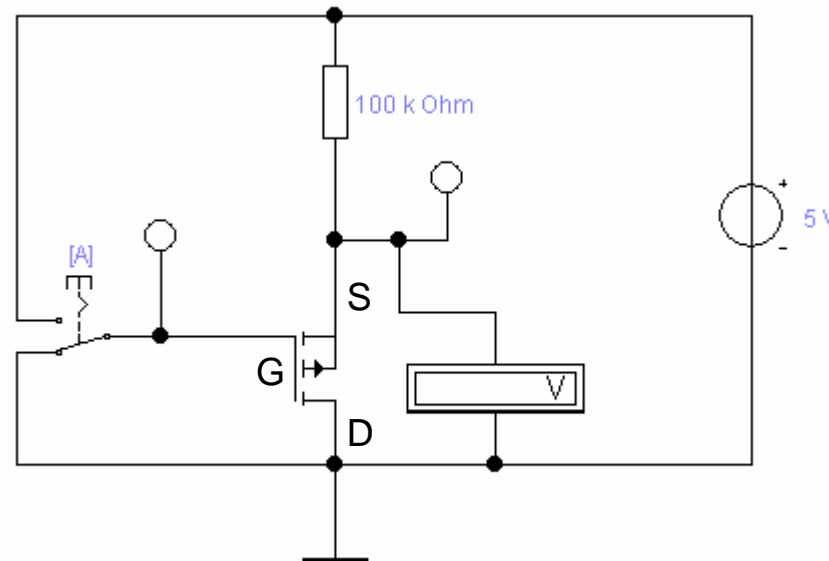
- NMOS Transistoren leiten wenn U_{GS} positiv ist
 - ⇒ U_{GS} muss eine Tresholdspannung übersteigen U_{th}
 - ⇒ Verwendung wie bei Bipolar-Transistoren
- Der Substrat-Anschluss (Bulk) muss „negativer“ sein als das Gate
 - ⇒ Häufig zusätzliche negative Spannung (-5V)



Der PMOS-Transistor als Schalter

○ PMOS Transistoren leiten wenn U_{GS} negativ ist

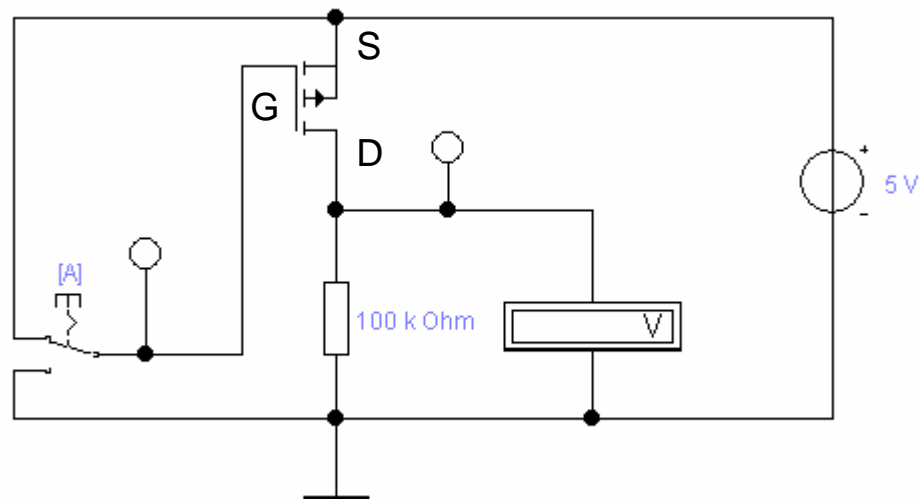
- ⇒ Der Gate-Anschluss liegt auf 0 V (Masse)
- ⇒ Die Spannung U_{GD} ist hoch (ca. 1,7 V)
- ⇒ Der p-MOS-Transistor leitet schlecht, da der Spannungsunterschied zwischen Gate und Source (U_{GS}) gering ist



Der PMOS-Transistor als Schalter

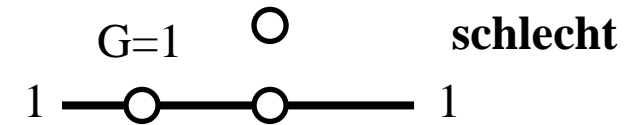
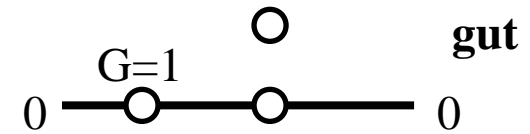
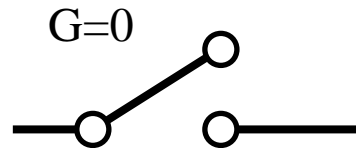
○ Besserer Einsatz des PMOS-Transistors

⇒ Der Transistor leitet gut, da der Spannungsunterschied zwischen Gate und Source (U_{GS}) mit 5V hoch ist

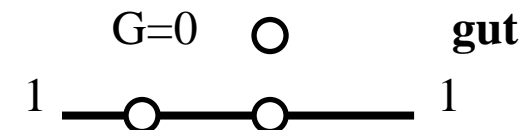
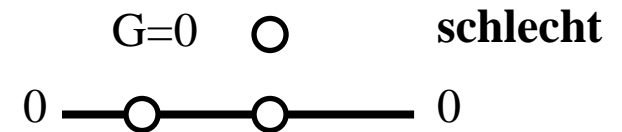
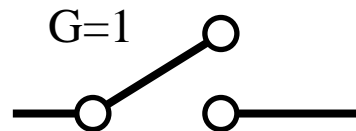


Übersicht: MOS-Transistoren als Schalter

NMOS

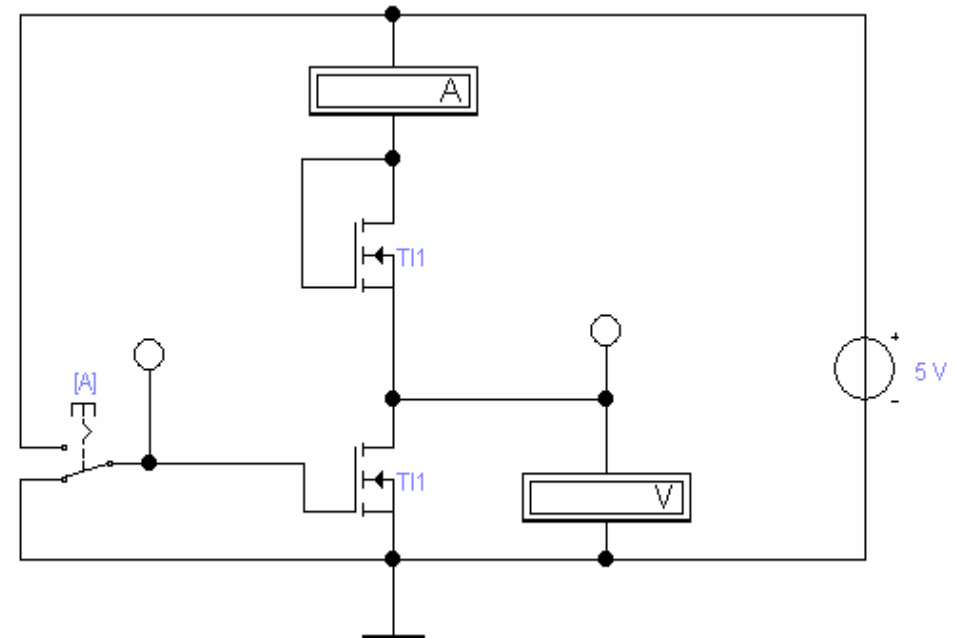


PMOS



Integrierte Widerstände

- In integrierten Schaltkreisen benötigen konventionelle Widerstände sehr viel Platz
 - ⇒ Der Gate-Widerstand kann entfallen, da das Gate isoliert ist und daher kein Strom fließt
 - ⇒ Der Drain-Widerstand kann durch (speziellen) schlecht leitenden NMOS- bzw. PMOS-Transistor ersetzt werden
 - ⇒ Transistoren lassen sich kleiner bauen als integrierte Widerstände
- Nachteile:
 - ⇒ Versorgungsspannung und 0-Pegel werden am Ausgang nicht mehr erreicht
 - ⇒ Schaltungen können so nicht miteinander verbunden werden



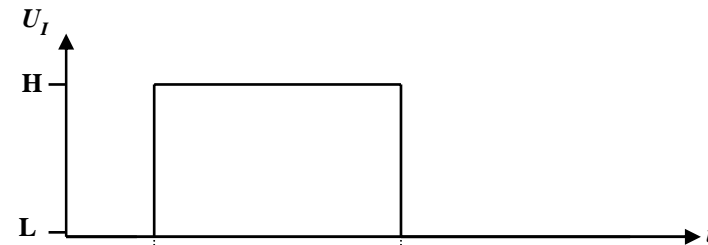
Kenngrößen: Signalpegel

- **Signale werden nie genau durch GND oder den Wert der Versorgungsspannung dargestellt**
 - ⇒ Transistor ist kein idealer Schalter
 - ⇒ Übersprechen zwischen benachbarten Leitungen
 - ⇒ Der Eingang eines nachfolgenden Transistors hat Auswirkungen auf den vorgehenden
- **Spannungen, welche die Signale stören, nennt man **Störspannungen****
- **Um zu verhindern, dass Störspannungen zu falschen Signalen führen, definiert man Pegel**
 - ⇒ **High**: die Spannung ist mindestens so hoch wie der „high Pegel“
 - ⇒ **Low**: die Spannung ist höchstens so hoch wie der „low Pegel“
- **Die Pegel werden willkürlich logischen Werten zugeordnet**
 - ⇒ High ist logisch „1“
 - ⇒ Low ist logisch „0“
 - ⇒ bei negativer Logik sind diese Pegel umgekehrt

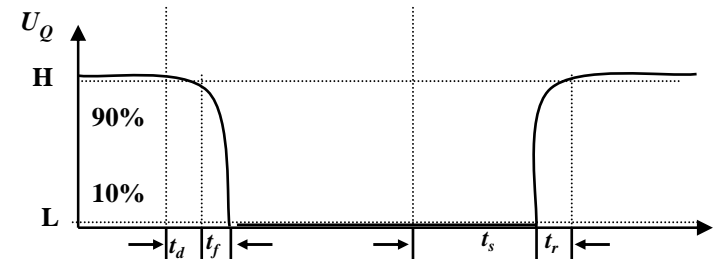
Kenngrößen: Signalübergangszeit

○ Signalübergangszeit (transition time)

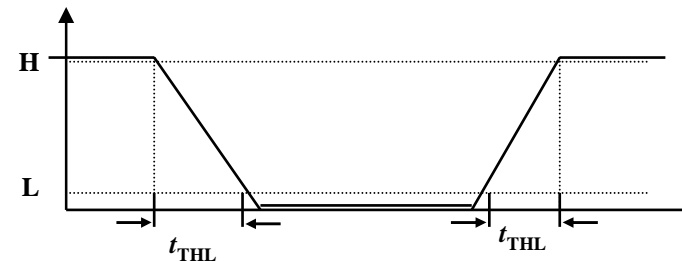
- ⇒ Flankensteilheit
- ⇒ Übergang von „H“ nach „L“ oder von „L“ nach „H“



idealer Rechteckimpuls am Eingang



verformter Rechteckimpuls am Ausgang



linearisierter Ausgangsimpuls

Kenngrößen: Signallaufzeit

○ Signallaufzeit (Propagation delay)

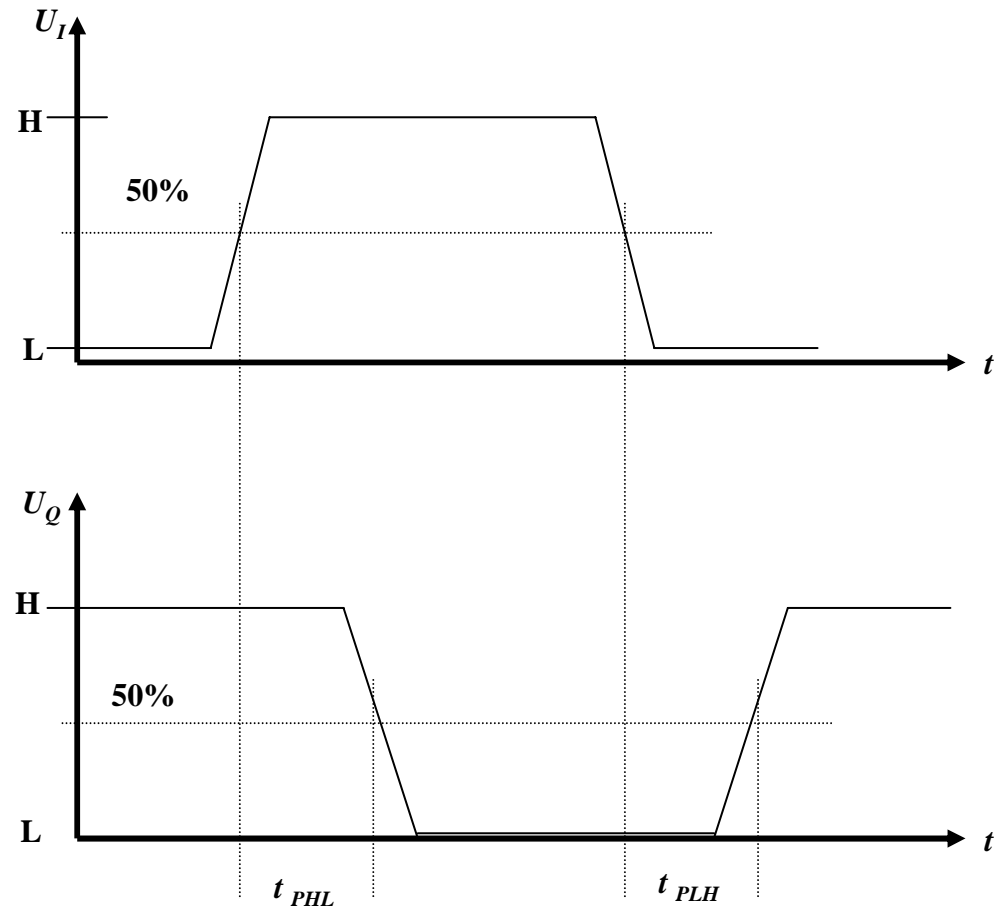
⇒ Zeit die ein Signalimpuls vom Eingang der Schaltung bis zum Ausgang benötigt

○ Mittlere Signallaufzeit eines Schaltelementes:

⇒ bezogen auf die 50% Marke der Amplitude zwischen H- und L-Pegel

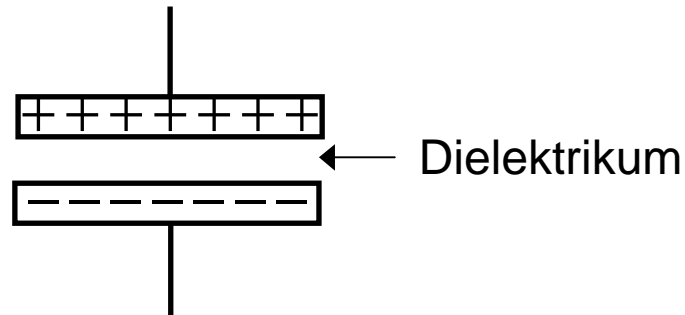
Beispiel Inverter:

$$t_P = \frac{t_{PHL} + t_{PLH}}{2}$$



Der Kondensator

- **Kondensator**



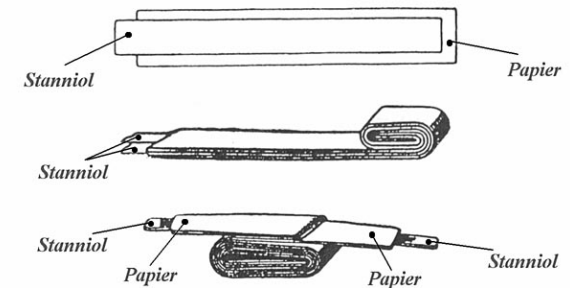
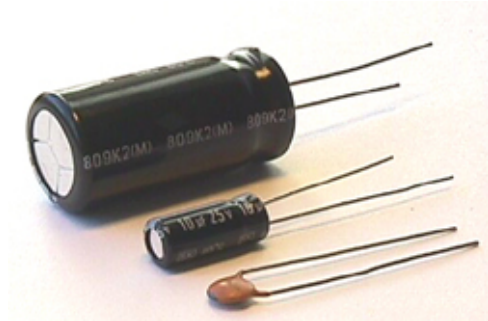
Für die Spannung am Kondensator gilt

$$Q = C \cdot U$$

- Der Proportionalitätsfaktor **C** ist die **Kapazität** des Kondensators

- Die Einheit der Kapazität ist **Farad (F)**

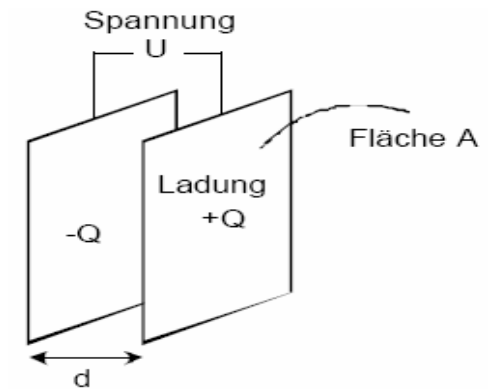
$$1F = 1 \frac{C}{V}$$



Der Kondensator

- Beim **Plattenkondensator** gilt

$$C = \frac{\epsilon \cdot A}{d}$$



Dabei ist A die Fläche der Platten, d der Abstand der Platten und

$$\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \quad \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F / m}$$

dabei ist

ϵ_0 die **absolute Dielektrizitätskonstante** (bezieht sich auf das Vakuum) und
 ϵ_r die **relative Dielektrizitätskonstante** (ist materialabhängig)

Beispiele für Werte von

ϵ_r :	Vakuum	1,0
	Luft	1,0
	Quarz	4,3
	Wasser	78,5

Der Kondensator

- Für den **Strom** am Kondensator gilt

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \cdot \frac{dU}{dt}$$

- ⇒ Am Kondensator gibt es keine Spannungssprünge
- ⇒ Strom fließt am Kondensator nur bei Spannungsänderungen
- ⇒ Bei Gleichstrom wirkt ein Kondensator wie eine Unterbrechung

- Die in einem Kondensator **gespeicherte Energie** beträgt

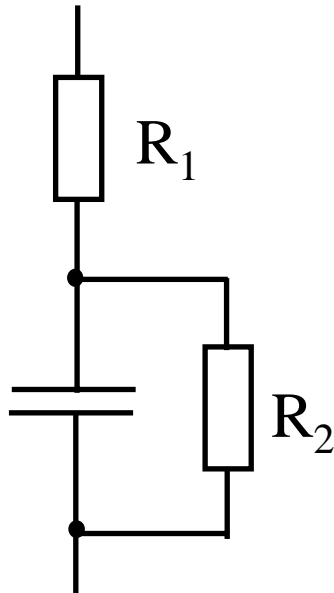
$$\begin{aligned} W &= \int_{t_0}^t P(t) dt = \int_{t_0}^t U(t) \cdot I(t) dt = \int_{t_0}^t U(t) \cdot C \frac{dU}{dt} dt \\ &= C \cdot \int_0^{U(t)} U dU = C \cdot \frac{U(t)^2}{2} \end{aligned}$$

und ist somit proportional zur Kapazität und zum Quadrat der Spannung

Der Kondensator

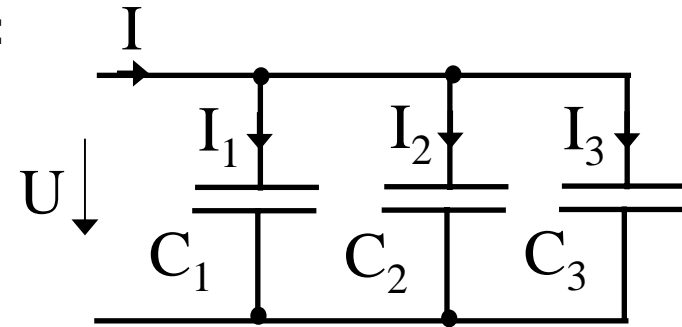
○ Parasitäre Effekte (die ein ideales Verhalten verändern)

- ⇒ Widerstand von Platten und Drähten (R_1)
- ⇒ Nicht vollständige Isolation des Dielektrikums (R_2)



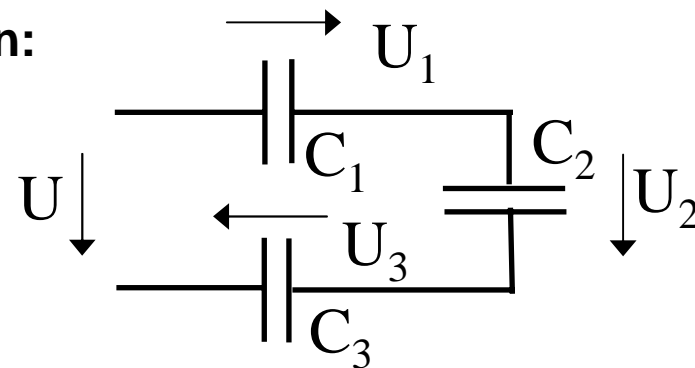
Der Kondensator

- **Parallelschaltung** von Kondensatoren:



$$I = I_1 + I_2 + I_3 = C_1 \frac{dU}{dt} + C_2 \frac{dU}{dt} + C_3 \frac{dU}{dt} = (C_1 + C_2 + C_3) \frac{dU}{dt}$$

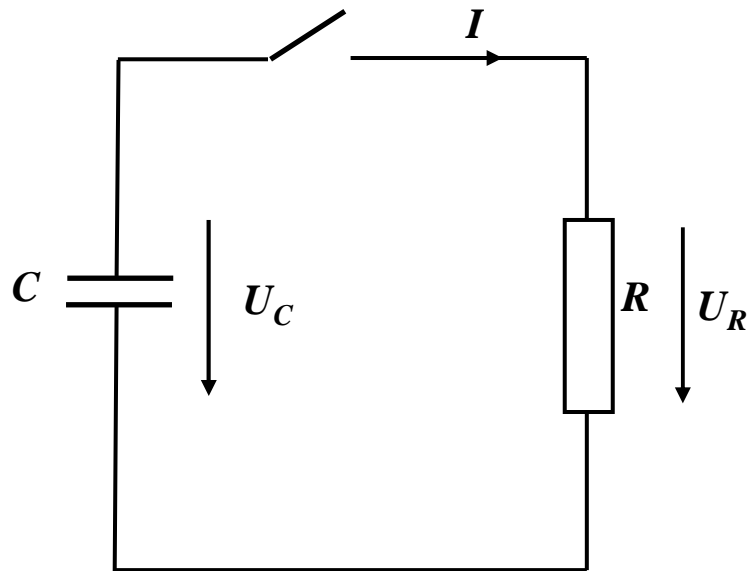
- **Reihenschaltung** von Kondensatoren:



$$U = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{1}{C_1} \int_0^t I dt + \frac{1}{C_2} \int_0^t I dt + \frac{1}{C_3} \int_0^t I dt = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) \int_0^t I dt$$

RC-Schaltung

- Änderung der Spannung:



$$U_C(t) + U_R(t) = 0$$

$$\Rightarrow R \cdot I(t) = -\frac{Q(t)}{C}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{Q}(t)}{Q(t)} = -\frac{1}{RC}$$

$$\Rightarrow \int_0^t \frac{\dot{Q}(t)}{Q(t)} dt = -\int_0^t \frac{1}{RC} dt$$

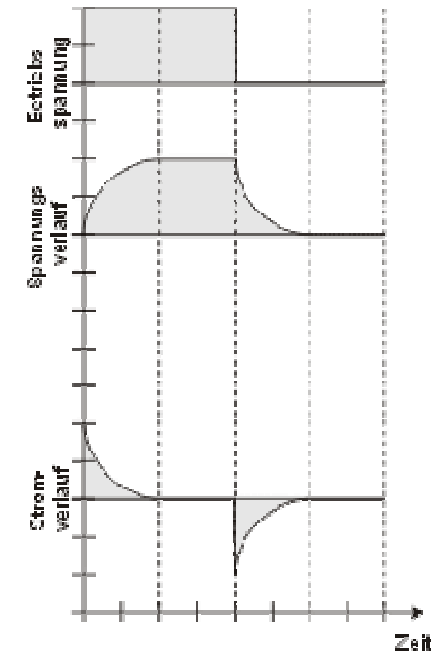
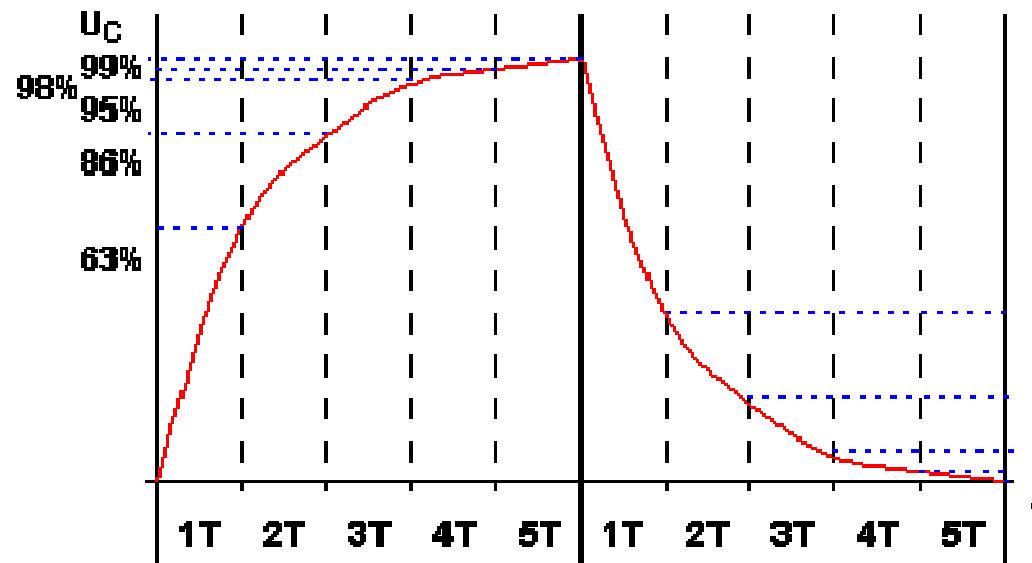
$$\Rightarrow \ln(Q(t)) = -\frac{t}{RC} + K_1$$

$$\Rightarrow Q(t) = K_2 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Anfangsbedingung: $Q(0) = Q_0 \Rightarrow K_2 = Q_0$

RC-Schaltung

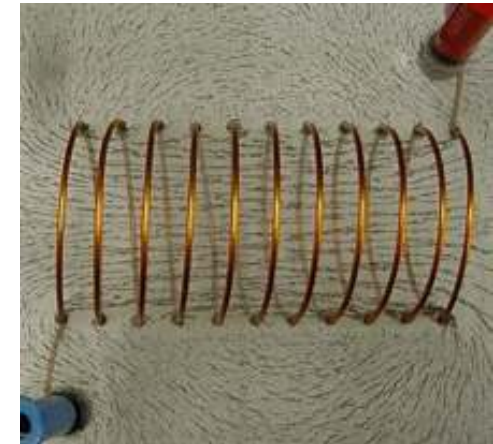
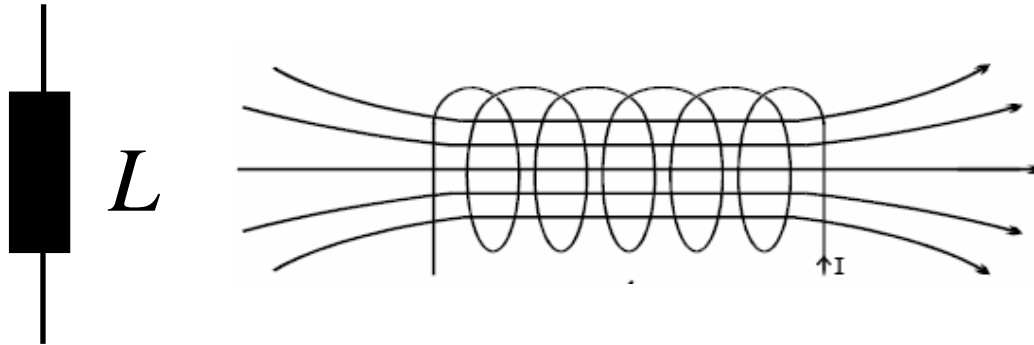
○ Beladung und Entladung eines Kondensators



Anteil der gesamten Entladung/Beladung bezogen auf die Zeiteinheiten $T = R \cdot C$

Induktivität

- Schleife, Spule



- Der **magnetische Fluss** Φ durch eine Spule (Leiterschleife) ist proportional zum Strom

$$\Phi = L \cdot I$$

- Der Proportionalitätsfaktor L ist die **Induktivität** der Leiterschleife (L ist proportional zum Quadrat der Windungszahl der Spule)
- Die Einheit der Induktivität ist **Henry**

$$1H = 1 \frac{Vs}{A}$$

Induktivität

- Für die **Spannung** an einer Spule gilt

$$U = \frac{d\Phi}{dt} = L \cdot \frac{dI}{dt}$$

- ⇒ Nach den Anlegen einer Spannung wirkt ihr die induzierte Spannung entgegen (der Widerstand der Spule ist zunächst groß)
- ⇒ Die Spannung an der Spule ist proportional zur Änderung des Stromes
- ⇒ An einer Spule gibt es keine sprunghaften Stromänderungen
- ⇒ Bei Gleichstrom wirkt eine Spule wie ein Kurzschluss

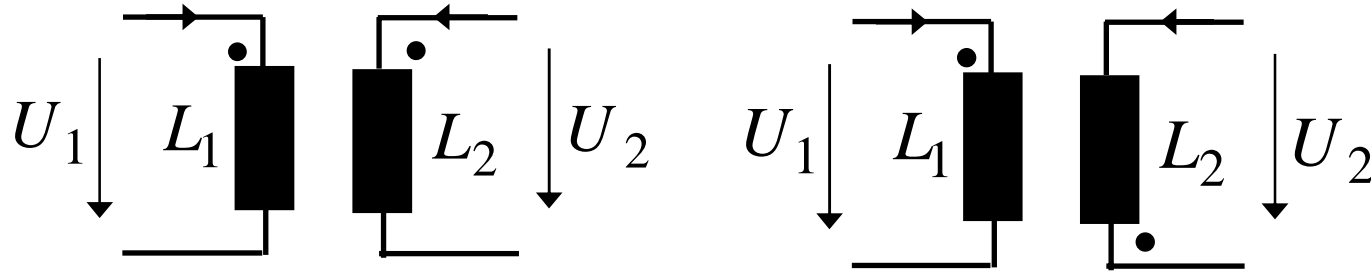
- Die in einer Spule **gespeicherte Energie** beträgt

$$W = \int_{t_0}^t p(t) dt = \int_{t_0}^t I(t) \cdot L \frac{dI}{dt} dt = L \cdot \int_0^{I(t)} IdI = L \cdot \frac{I(t)^2}{2}$$

und ist somit proportional zur Induktivität und zum Quadrat der Stromstärke

Induktion

- Ein magnetischer Fluß in einer Spule (Stromschleife) induziert in einer anderen Spule Spannung



Fließen Ströme durch beide Spulen können sich die Magnetfelder verstärken oder abschwächen (im Schaltbild erkennbar an den Punkten)

- Die **Gegeninduktivität M** beschreibt den Grad der Kopplung

$$U_1 = L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \cdot \frac{dI_2}{dt}$$

$$U_1 = L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \cdot \frac{dI_2}{dt}$$

$$U_2 = M \frac{dI_1}{dt} + L_2 \cdot \frac{dI_2}{dt}$$

$$U_2 = -M \frac{dI_1}{dt} + L_2 \cdot \frac{dI_2}{dt}$$

Wechselstrom

○ Wechselspannung

$$U(t) = U_0 \cdot \sin \omega t$$

⇒ Leistung des Wechselstroms zur Zeit t

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = \frac{U(t)^2}{R} = \frac{U_0^2}{R} \sin^2 \omega t$$

⇒ Mittlere Leistung

$$\langle P \rangle = \frac{U_0^2}{2 \cdot R} \quad (\text{denn Mittelwert } \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2})$$

⇒ **Effektivwert:** entspricht der Spannung eines Gleichstroms, der an einem ohmschen Widerstand die gleiche Leistung wie der Wechselstrom im zeitlichen Mittel verrichtet.

$$\frac{U_0^2}{2 \cdot R} = \frac{U_{\text{Eff}}^2}{R} \quad \Rightarrow \quad U_{\text{Eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

Beispiel: Haushalt 220V (effektiv) hat Maximalwerte $\pm 311\text{V}$

Wechselstrom

- An einem Kondensator gilt:

$$I(t) = C \cdot \frac{dU(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow I(t) = C \cdot \frac{dU_0 \sin \omega t}{dt} = C \omega \cdot U_0 \cos \omega t = C \omega \cdot U_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

- An einer Spule gilt:

$$U(t) = L \cdot \frac{dI(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow I(t) = \frac{1}{L} \int_0^t U_0 \sin \omega t dt = -\frac{1}{L\omega} U_0 \cos \omega t = \frac{1}{L\omega} U_0 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Lastarten



Ohmsch

Kapazitiv

Induktiv

⇒ **Strom als Funktion der Spannung** $U(t) = U_0 \cdot \sin \omega t$

$$I(t) = \frac{1}{R} \cdot U_0 \cdot \sin \omega t \quad I(t) = \omega \cdot C \cdot U_0 \cdot \cos \omega t \quad I(t) = -\frac{U_0}{\omega \cdot L} \cdot \cos \omega t$$

⇒ **Maximalwert des Stromes**

$$I_0 = \frac{1}{R} \cdot U_0$$

$$I_0 = \omega \cdot C \cdot U_0$$

$$I_0 = \frac{U_0}{\omega \cdot L}$$

⇒ **Widerstand** ($R = \frac{U_0}{I_0}$)

$$R$$

$$R_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

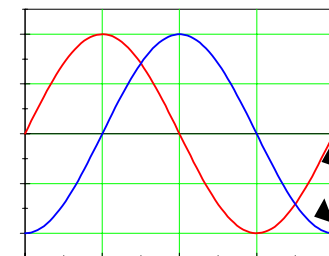
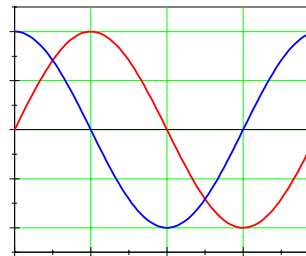
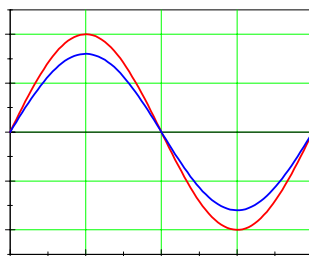
$$R_L = \omega \cdot L$$

⇒ **Phasenverschiebung (zwischen Spannung und Strom):**

$$0$$

$$\frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2}$$



U
 I

Lastarten

○ Energieverbrauch:

⇒ **Widerstände setzen elektrische Energie irreversibel in thermische Energie (Wärme) um**

$$W_R = \int_0^t UI dt = R \int_0^t I^2 dt = t \cdot RI^2$$

⇒ **Kondensatoren und Spulen speichern Energie in ihren Feldern**
→ **die Feldenergie kann wieder in elektrische Energie zurückgewandelt werden**

Transformator

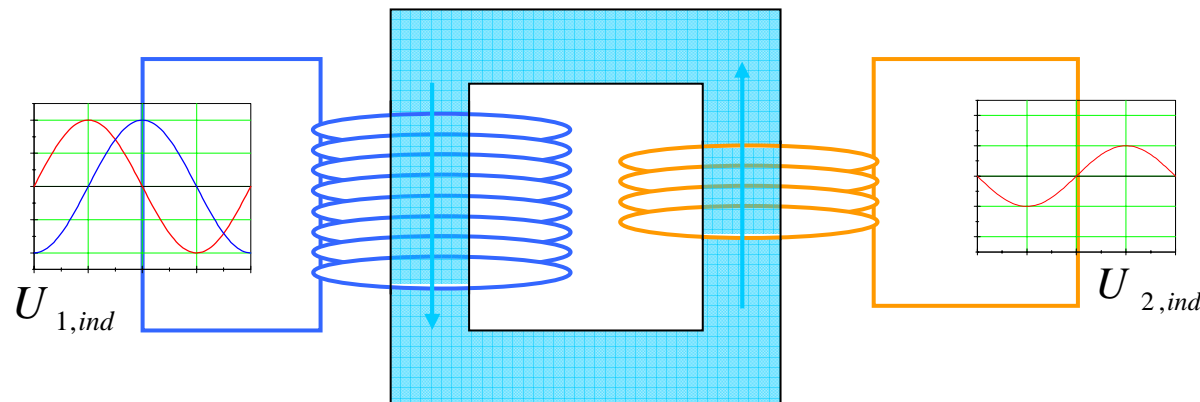
○ Spannungsteiler mit Spulen:

- ⇒ durch Spule 1 (Primärspule) fließt ein Wechselstrom
- ⇒ durch die Änderung des magnetischen Flusses wird in beiden Spulen eine Spannung induziert
- ⇒ in der Primärspule ist die induzierte Spannung gleich der negativen Quellspannung
- ⇒ Vorteil: Spannungsteiler arbeitet verlustfrei (im Idealfall)

$$U_{1,ind} = -L_1 \cdot \frac{dI_1}{dt} = -n_1 \cdot \frac{d\Phi}{dt}$$

$$U_{2,ind} = -n_2 \cdot \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\frac{U_{1,ind}}{U_{2,ind}} = \frac{n_1}{n_2}$$



Schwingkreis

- Im Schwingkreis gilt nach der Maschenregel:

$$U_C(t) = U_L(t)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C} \cdot Q(t) + L \cdot \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} = 0$$

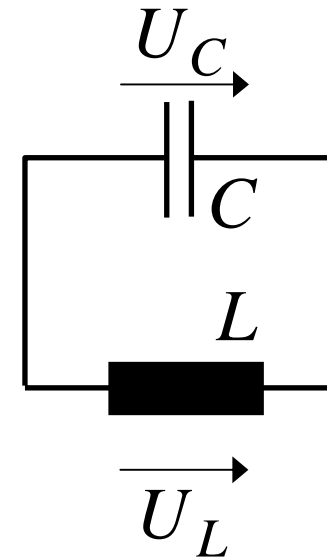
- Lösung der Differentialgleichung ist

$$Q(t) = Q_0 \cdot \sin \omega \cdot t$$

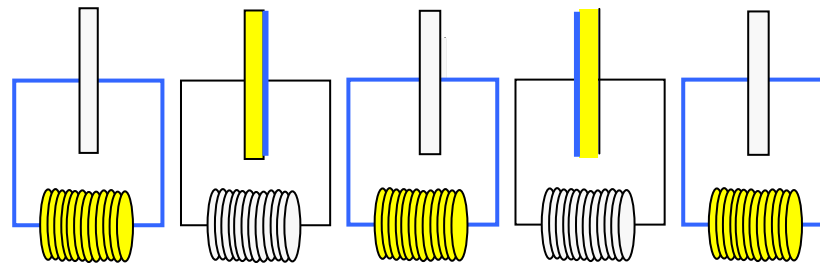
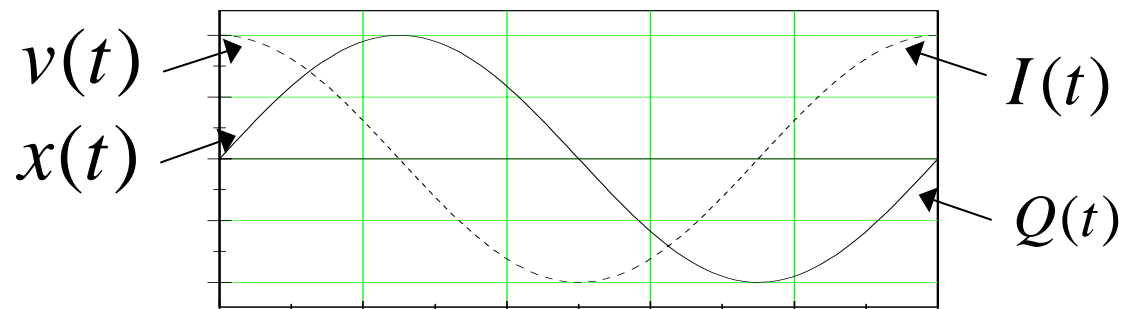
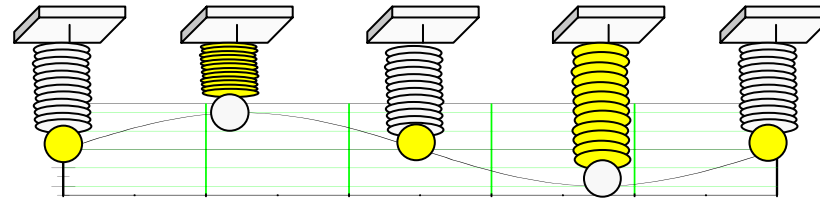
$$\Rightarrow \frac{1}{C} \cdot Q_0 \cdot \sin \omega t - L \cdot \omega^2 \cdot Q_0 \cdot \sin \omega t = 0$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{T} \quad T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}$$

wobei T die Zeitdauer einer Schwingung ist



Schwingkreis



Befindet sich ein Widerstand im Schwingkreis, wird die Schwingung gedämpft, d.h. die Amplitude verringert sich mit der Zeit.

Komplexe Größen

- Komplexe Zahlen bestehen aus **Realteil** und **Imaginärteil**
- Ist \underline{c} ein Element der komplexen Zahlen \mathbb{C} , dann gilt

$$\underline{c} = x + jy$$

(kartesische Schreibweise)

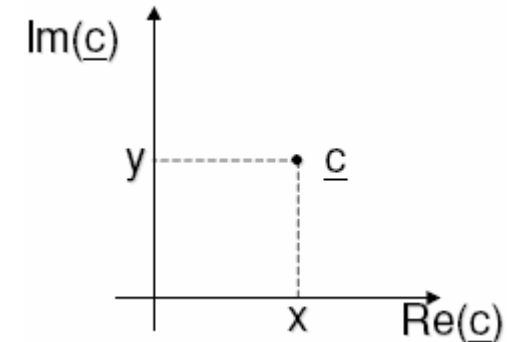
- x ist der Realteil von \underline{c} und y ist der Imaginärteil von \underline{c}

$$\operatorname{Re}(\underline{c}) = x \quad \operatorname{Im}(\underline{c}) = y$$

$$\underline{c} = \operatorname{Re}(\underline{c}) + j \operatorname{Im}(\underline{c})$$

- Die imaginäre Achse wird in der Einheit j gemessen (in der Mathematik i statt j) wobei gilt

$$j = \sqrt{-1} \quad j^2 = -1$$

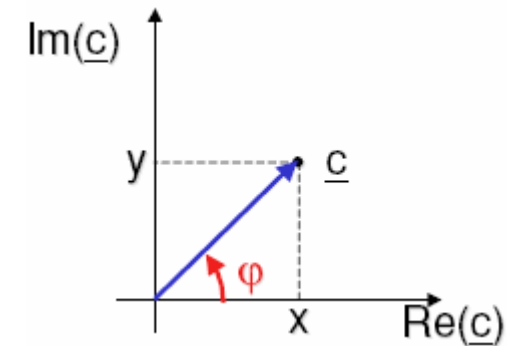


Komplexe Größen

- Jede komplexe Zahl lässt sich darstellen durch
(**Polarschreibweise**)

$$\text{Betrag } r = |\underline{c}| \quad \text{Winkel } \varphi$$

⇒ Der Winkel wird auch als **Phase** bezeichnet



- Wegen $\sin \varphi = y/r$ und $\cos \varphi = x/r$ schreibt man

$$\underline{c} = r \cos \varphi + jr \sin \varphi \quad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

- Mit den Eulerschen Formeln

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}) \quad \sin \varphi = \frac{1}{2j}(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi})$$

erhält man in **Exponentialschreibweise**

$$\underline{c} = r \cos \varphi + jr \sin \varphi = re^{j\varphi}$$

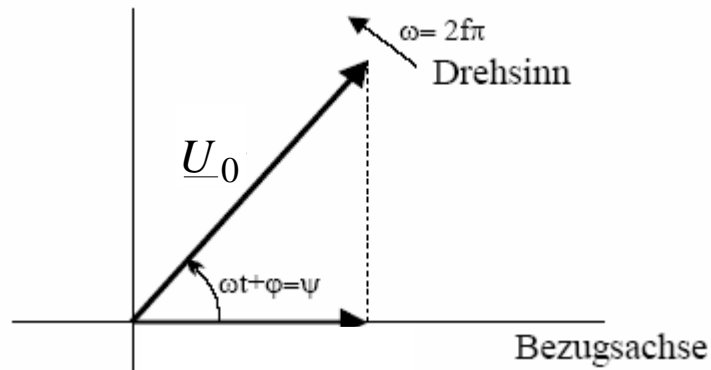
Komplexe Größen

○ Sinus/Kosinusfunktionen

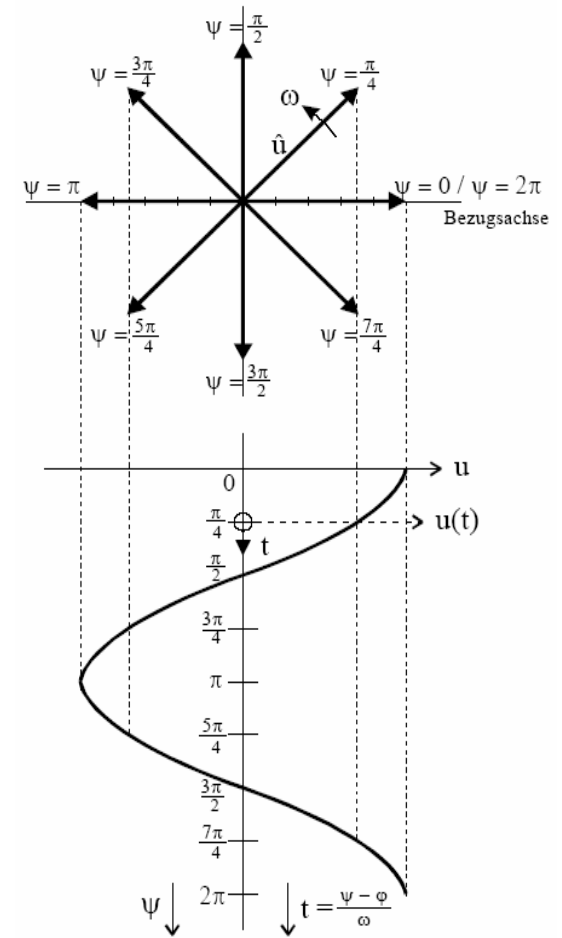
$$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

- ⇒ Winkelgeschwindigkeit ω
- ⇒ Phasenwinkel φ_0
- ⇒ Gesamtwinkel $\psi = \omega t + \varphi_0$

○ Somit erhält man die **komplexe Amplitude**



$$\underline{U}_0 = \text{Re}(\underline{U}_0) + j \text{Im}(\underline{U}_0) = U_0 (\cos(\varphi_0) + j \sin(\varphi_0)) = U_0 e^{j\varphi_0}$$



Komplexe Größen

○ Zum Rechnen mit komplexen Signalen

⇒ Für Addition/Subtraktion günstig

$$\underline{U}_{ges} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2$$

$$\underline{U}_{ges} = \operatorname{Re}(\underline{U}_1) + \operatorname{Re}(\underline{U}_2) + j \operatorname{Im}(\underline{U}_1) + j \operatorname{Im}(\underline{U}_2)$$

⇒ Für Multiplikation/Division ist Exponentialschreibweise günstig

$$\underline{U}_{ges} = \underline{U}_1 \cdot \underline{U}_2 = U_1 U_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\underline{U}_{ges} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{U_1}{U_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Komplexe Größen

○ Ohmscher Widerstand

$$\operatorname{Re}(\underline{U}(t)) = R \cdot \operatorname{Re}(\underline{I}(t))$$

$$\Rightarrow \underline{U}(t) = R \cdot \underline{I}(t) \Leftrightarrow \underline{U}_{eff} = R \cdot \underline{I}_{eff}$$

○ Induktivität

$$\operatorname{Re}(U_0 e^{j\omega t}) = L \cdot \frac{d}{dt} \operatorname{Re}(I_0 e^{j\omega t}) = L \cdot \operatorname{Re}(I_0 \cdot j \cdot \omega \cdot e^{j\omega t})$$

$$\Rightarrow \underline{U}(t) = j \cdot \omega \cdot L \cdot \underline{I}(t) \Leftrightarrow \underline{U}_{eff} = j \cdot \omega \cdot L \cdot \underline{I}_{eff}$$

⇒ Phasenverschiebung durch Multiplikation mit j

○ Kapazität

$$\operatorname{Re}(I_0 e^{j\omega t}) = C \cdot \frac{d}{dt} \operatorname{Re}(U_0 e^{j\omega t}) = C \cdot \operatorname{Re}(U_0 \cdot j \cdot \omega \cdot e^{j\omega t})$$

$$\Rightarrow \underline{I}(t) = j \cdot \omega \cdot C \cdot \underline{U}(t) \Leftrightarrow \underline{I}_{eff} = j \cdot \omega \cdot C \cdot \underline{U}_{eff}$$

⇒ Phasenverschiebung durch Division mit j

Komplexe Größen

- Die Größe

$$\underline{Z} := \frac{U}{I} = R + jX$$

bezeichnet man als **komplexen Widerstand** oder **Impedanz** und die rein reellen Größen

$$|\underline{Z}| \quad \text{Scheinwiderstand}$$

$$R \quad \text{Wirkwiderstand}$$

$$X \quad \text{Blindwiderstand}$$

- Ohmscher Widerstand

$$\underline{Z} = R$$

- Induktivität

$$\underline{Z} = j\omega L$$

- Kapazität

$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C}$$

Komplexe Größen

- Entsprechend unterscheidet man auch bei der Leistung nach

Scheinleistung

Wirkleistung

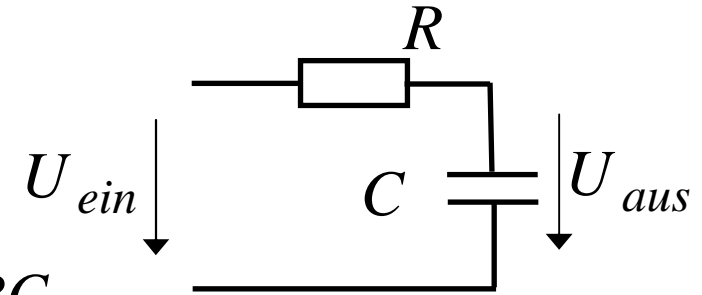
Blindleistung

- **Bei Ohmschen Widerständen (Glühlampe, Herd) ist die gesamte Leistung gleich der Wirkleistung**
- **Bei Geräten mit Spulen und Kondensatoren (Motoren, Generatoren) tritt Blindleistung auf**
 - ⇒ Da Leitungen auch die Blindleistung transportieren müssen sie entsprechende ausgelegt sein
 - ⇒ Blindleistung pendelt zwischen Stromerzeuger und Verbraucher
 - ⇒ Durch den Widerstand der Leitungen „verschwindet“ ein Teil des Blindstroms in zusätzlicher Wärmeleistung.
- **Beispiel: Windkraftanlagen arbeiten oft mit Motoren, die Magnetfeld benötigen, dass aus Strom erzeugt wird. Dadurch tritt Blindleistung auf.**
 - ⇒ Energieversorgungsunternehmen verlangen, dass Blindleistung durch Kondensatoren direkt in den Anlagen kompensiert wird.

Filter

- **Tiefpassfilter** (niedrige Frequenzen werden gut übertragen)

$$\frac{U_{aus}}{U_{ein}} = \frac{1/(j\omega C)}{R + 1/(j\omega C)} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} e^{j\varphi} \quad \tan \varphi = -\omega RC$$



denn

$$\frac{1}{x + jy} = \frac{x - jy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} e^{j\varphi} \quad \tan \varphi = -y/x$$

Für niederfrequente Wechselspannungen ($\omega \approx 0$): $\left| \frac{U_{aus}}{U_{ein}} \right| \approx 1$

Für hochfrequente Wechselspannungen ($\omega \rightarrow \infty$): $\left| \frac{U_{aus}}{U_{ein}} \right| \approx 0$

Dabei ist die **Frequenz** $f = \frac{\omega}{2\pi}$

Signale

- Theoretische Grundlage der Darstellung einer periodischen Funktion durch eine Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen ist die **Fourieranalyse**

- Ziel: Darstellung einer Funktion $F(t)$ mit der Periode T durch eine (eventuell unendliche) Summe der Form

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi nft) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi nft)$$

- ⇒ Grundfrequenz $f=1/T$
- ⇒ a_n, b_n die Kosinus- bzw. Sinusamplituden der **n-ten Harmonischen**
- ⇒ obige Zerlegung heißt **Fourierreihe**

- ⇒ Koeffizienten ermittelt man durch die **Euler-Fourierschen Formeln**

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos(2\pi nft) dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin(2\pi nft) dt$$

- ⇒ Bestimmung der Koeffizienten: **Harmonische Analyse**

Signale

- Ist eine Funktion nicht periodisch, interessiert ihr Verlauf jedoch nur in einem Intervall, so versucht man für die Funktion in diesem Intervall eine Fourierdarstellung zu finden.
- **Satz (Dirichletsche Bedingung):** Läßt sich das Intervall $(0:T)$ in endlich viele Teilintervalle zerlegen und ist
 - ⇒ i) $F(t)$ in jedem dieser Teilintervalle stetig und monoton und
 - ⇒ ii) existieren an jeder Unstetigkeitsstelle die rechts- und linksseitigen Grenzwerte

so ist $F(t)$ in $(0:T)$ in eine Fourierreihe entwickelbar, und die Fourierkoeffizienten können nach den Euler-Fourierschen Formeln eindeutig bestimmt werden.

- ⇒ alternative Beschreibungsmöglichkeiten für F :
 - im **Zeitraum** (als $F(t)$)
 - im **Frequenzraum** (durch die Koeffizienten a_n, b_n)

Signale

- **Alternative Darstellung als Summe von phasenverschobenen Kosinusfunktionen**

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(2\pi nft - \varphi_n)$$

$$c_n = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \varphi_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

Signale

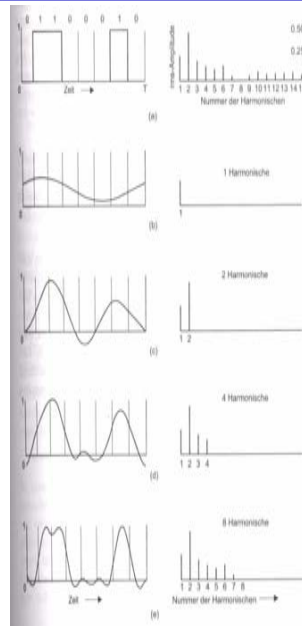
- Probleme bei der Übertragung eines elektrischen Signals:
 - ⇒ Abschwächung der Amplitude
 - ⇒ Verzerrung, da die Amplitudenabschwächung mit zunehmender Frequenz stärker wird
 - ⇒ Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Sinusschwingung wird mit zunehmender Frequenz größer
 - ⇒ Interferenz mit benachbarten Leitungen
 - ⇒ Störungen durch elektromagnetische Strahlung
 - ⇒ unvermeidliches Rauschen

Signale

- Oft werden nur Frequenzen im Bereich von 0 bis zu einer **Grenzfrequenz** gut übertragen, alle Frequenzen jenseits der Grenzfrequenz werden nur schwach übertragen.
- **Bandbreite** W (width): Größe des Frequenzbereichs, der ohne wesentliche Amplitudenabschwächung oder verschiedenartige Phasenverschiebungen übertragen wird.
 - ⇒ Beispiel: Telefonkanal überträgt gut im Bereich 400 - 3400 Hz
 - ⇒ Welche Bandbreite benötigt man, um eine Rechteckfunktion zu übertragen?

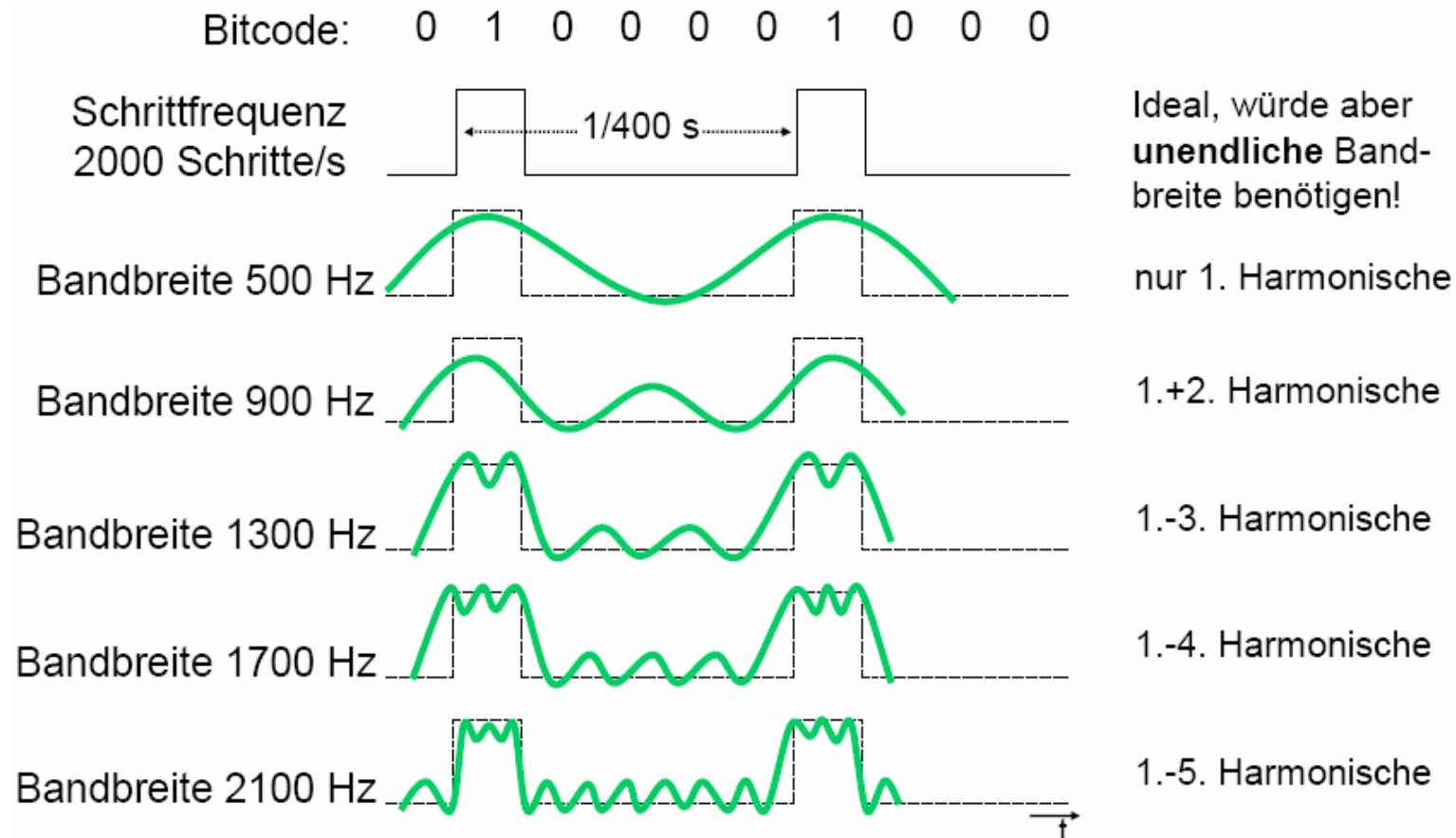
Signale

○ Beispiel



Signale

- Bei einer Bitrate von 2000 Bit/sec genügt eine Bandbreite von ca.1000 Hz um das Signal zu erkennen:



Signale

- **Weißes Rauschen** (zufälligem Rauschen, white noise): Summe aller zufälligen Störungen, die auf einem Übertragungsmedium auftreten.
 - ⇒ Der Betrag des Rauschens wird durch das Verhältnis S/N von Signalstärke S (Signalleistung) zu Rauschstärke N (Rauschleistung) gemessen und **Rauschabstand** genannt.
- **Kanalkapazität C**: Informationsmenge, die auf einem Kanal pro Sekunde befördert wird (maximale Datenrate, gemessen in Bits/Sec).
- **Satz von Shannon**: Für einen Kanal mit der Bandbreite W, der Signalstärke S und der Rauschstärke N gilt für die Kapazität

$$C = W \cdot \log\left(1 + \frac{S}{N}\right)$$

Signale

○ **Daten:**

- ⇒ analog (zeitkontinuierlich und wertekontinuierlich, Beispiel: Sprache)
- ⇒ digital (zeitdiskret und wertediskret, Beispiel: Texte)

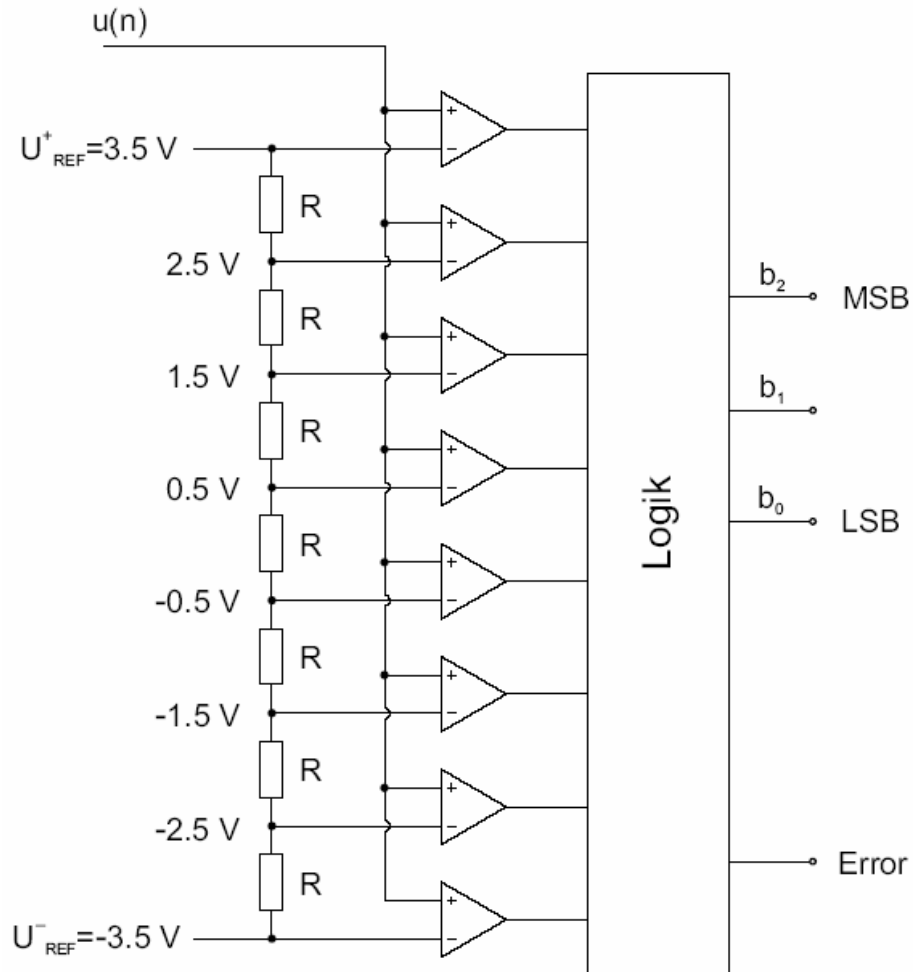
○ **Signale (meist zeitkontinuierlich):**

- ⇒ analog (wertekontinuierlich)
- ⇒ digital (wertediskret)

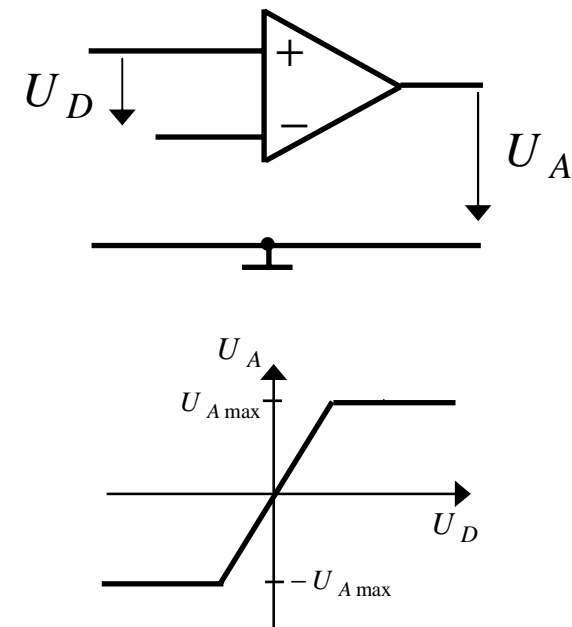
		Ergebnissignal			
		zeitkontin. wertkontin.	zeitdiskret wertkontin.	zeitkontin. wertdiskret	zeitdiskret wertdiskret
Ausgangssignal	zeitkontin. wertkontin.		Abtastung	Quantisierung	A/D-Wandlung
	zeitdiskret wertkontin.	Interpolation			Quantisierung
	zeitkontin. wertdiskret	Glättung			Abtastung
	zeitdiskret wertdiskret	D/A-Wandlung		Interpolation	

Signale

○ Einfacher A/D-Wandler:



Verwendet Operationsverstärker

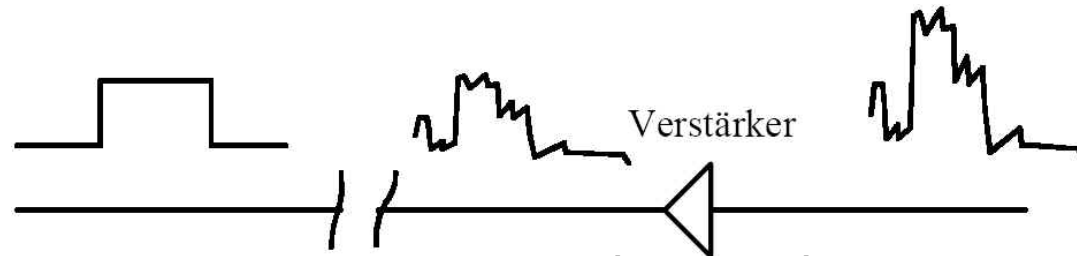


Signale

- Damit elektrisches Signal im Vergleich zu den Störungen nicht zu schwach wird, muss es in gewissen Abständen aufgefrischt werden:

⇒ Bei analoger Übertragung durch **Verstärker**

- Probleme: Verzerrung wird mit verstärkt
(bei Sprachübertragung meist nicht so schlimm, bei digitalen Daten kritisch)



⇒ Bei digitaler Übertragung durch **Regeneratoren (Repeater)**: interpretieren ankommendes Signal als Digitalwert und senden am Ausgang ein entsprechendes neues Signal.

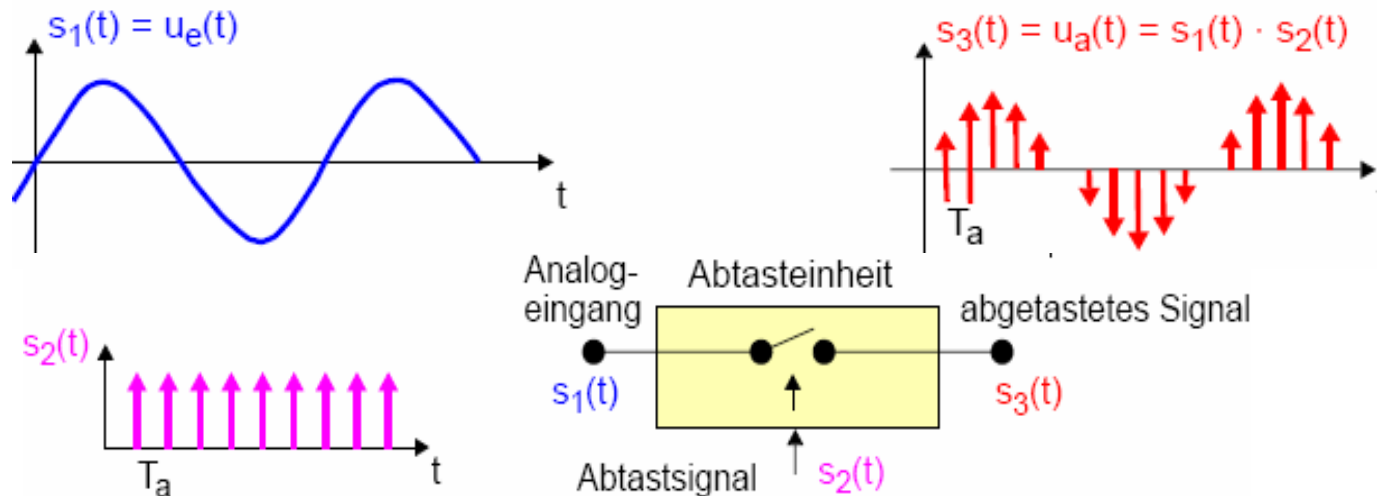
- Problem: 0/1 könnten vertauscht werden (aber sehr unwahrscheinlich bei ausreichender Signalqualität)



Signale

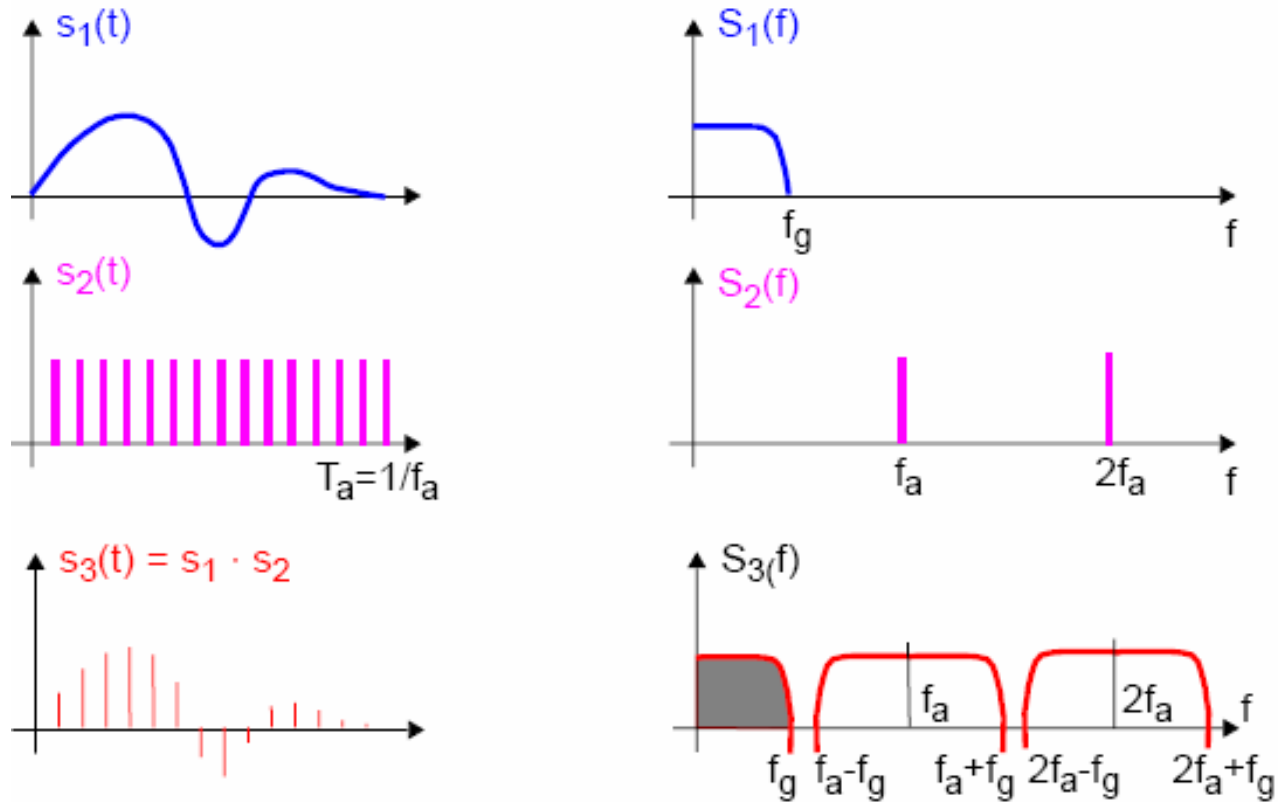
- Digitale Übertragung eines analogen Signals: **Abtasten** in bestimmten Zeitabständen so dass diskrete Werte abgelesen werden können, die dann als Bitgruppe codiert werden (**Pulse Code Modulation, Analog-Digital-Umwandlung**)
- **Satz von Nyquist (Abtasttheorem)**: Ein Signal dessen Spektrum nur Schwingungen mit Perioden $\geq T_0$ enthält kann aus regelmäßigen Abtastwerten im Abstand von $(1/2)T_0$ rekonstruiert werden.

⇒ Beispiel: Musik-CD Abtastfrequenz 44 kHz → Nyquistfrequenz 22 KHz



Signale

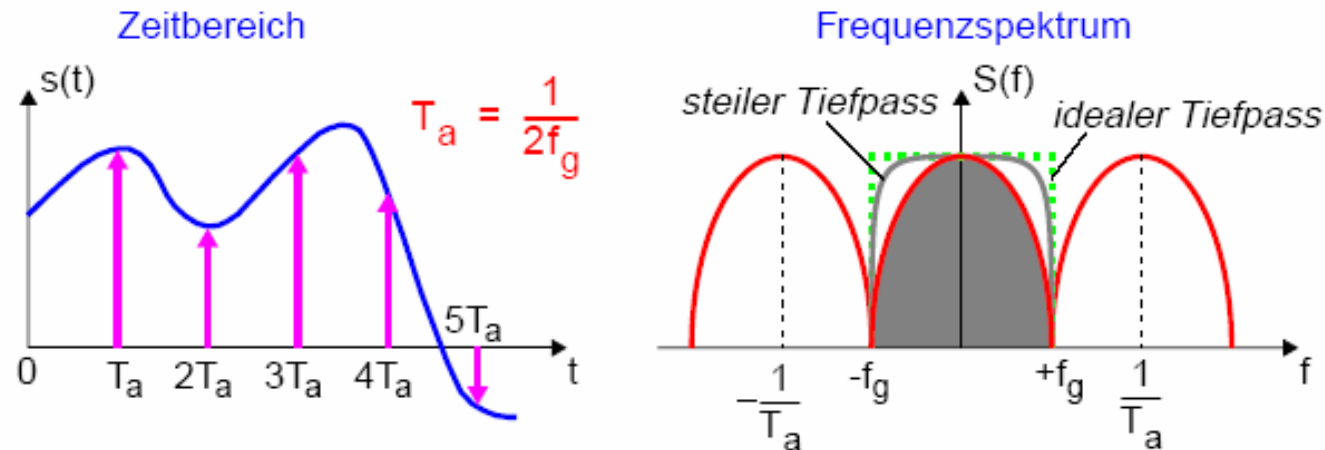
- Das abgetastete Signal ist periodisch im Frequenzbereich



- Um zu garantieren das das Eingangssignal bandbegrenzt ist, kann ein Tiefpassfilter eingesetzt werden

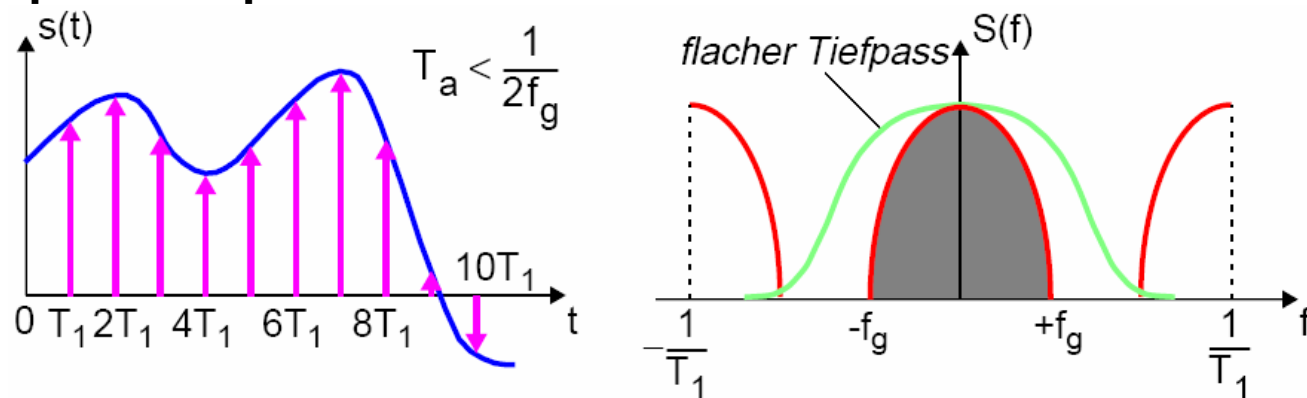
Signale

- **Abtastfrequenz erfüllt das Abtasttheorem**



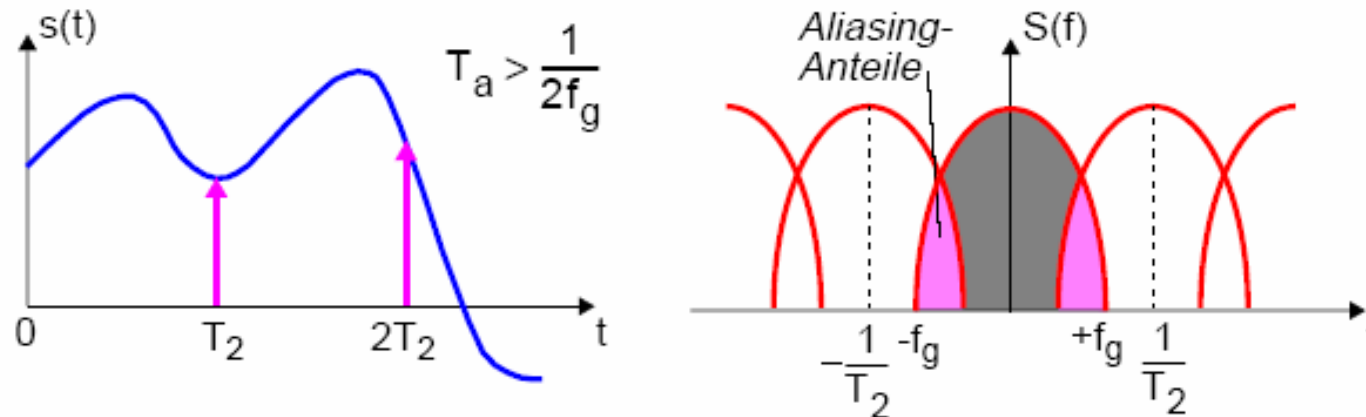
⇒ Tiefpassfilter kann die gewünschten Frequenzen rausfiltern

- **Bei zunehmender Abtastfrequenz größere Abstände im Amplitudenspektrum**



Signale

○ Abtastfrequenz zu niedrig



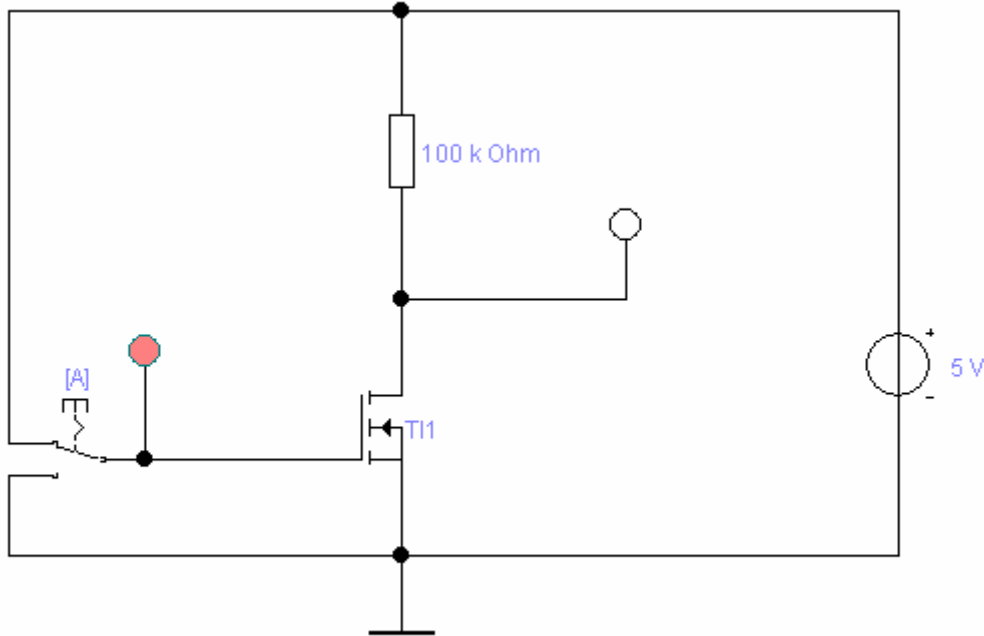
- ⇒ **Aliasing-Frequenzen** sind Frequenzen, die durch Abtasten auf die gleiche Frequenz abgebildet werden
- ⇒ **Problem bei verrauschten Signalen:**
 - Rauschen ist oft eine breitbandige Störung
 - Auch wenn Originalsignal das Abtasttheorem erfüllt, kann es durch Rauschen verletzt werden
 - Dies führt durch Aliasing zu einem erhöhten Rauschanteil im abgetasteten Signal
 - Tiefpassfilter vor dem Abtasten wird oft genutzt um Rauschanteile außerhalb des gewünschten Frequenzbandes zu beseitigen (**Anti-Alias-Tiefpassfilter**)

5 Logische Schaltglieder

- **Komplexe Schaltungen werden aus einfachen logischen Gattern aufgebaut**
- **Man benötigt **logische Grundfunktionen****
 - ⇒ **UND, ODER, NICHT**
- **Logische Gatter werden später als atomare Bausteine in der Digitaltechnik verwendet**
 - ⇒ **In diesem und im nächsten Kapitel steht der innere Aufbau der Gatter im Vordergrund**
- **Eingangssignalpegel der Gatter müssen zu den Ausgangssignalpegeln kompatibel sein**
 - ⇒ **Leitungen verbinden die Ausgänge eines Gatters mit nachfolgenden Gattern**

NICHT-Gatter (Inverter)

- Der Wert des Eingangs wird negiert

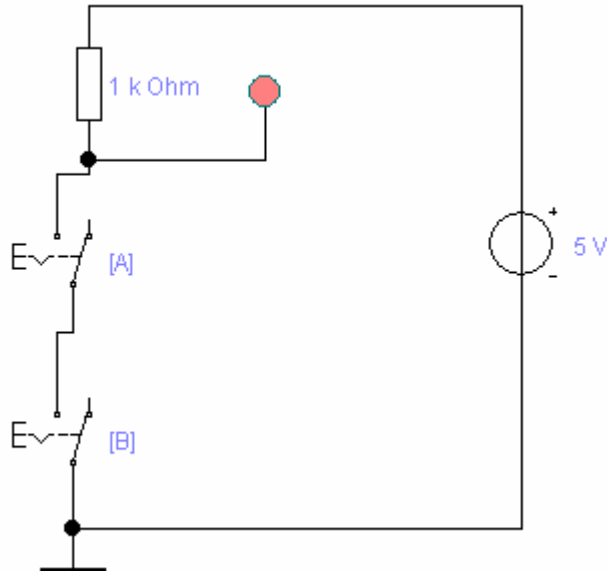


Wertetabelle

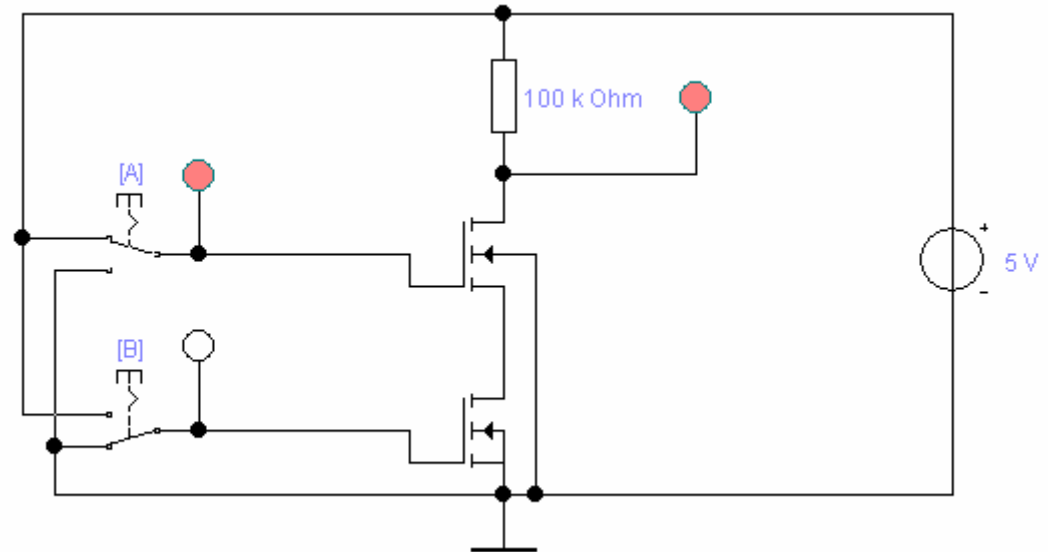
A	Y
0	1
1	0

NAND-Gatter

○ Reihenschaltung zweier Schalter/Transistoren



**NAND-Verknüpfung
mit Schaltern**



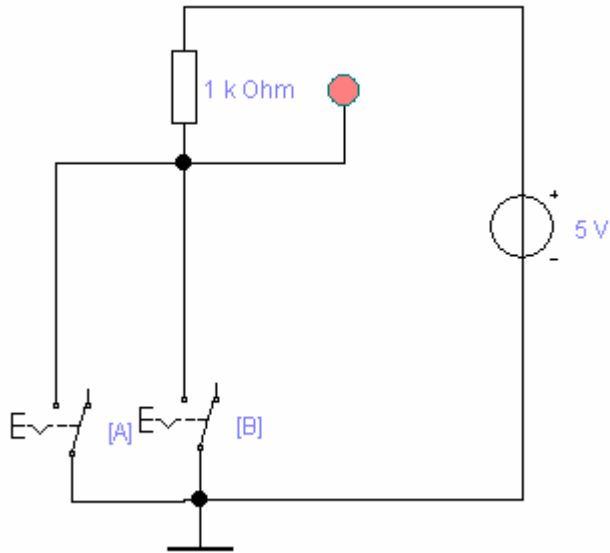
**NAND-Verknüpfung
mit NMOS-Transistoren**

Wertetabelle

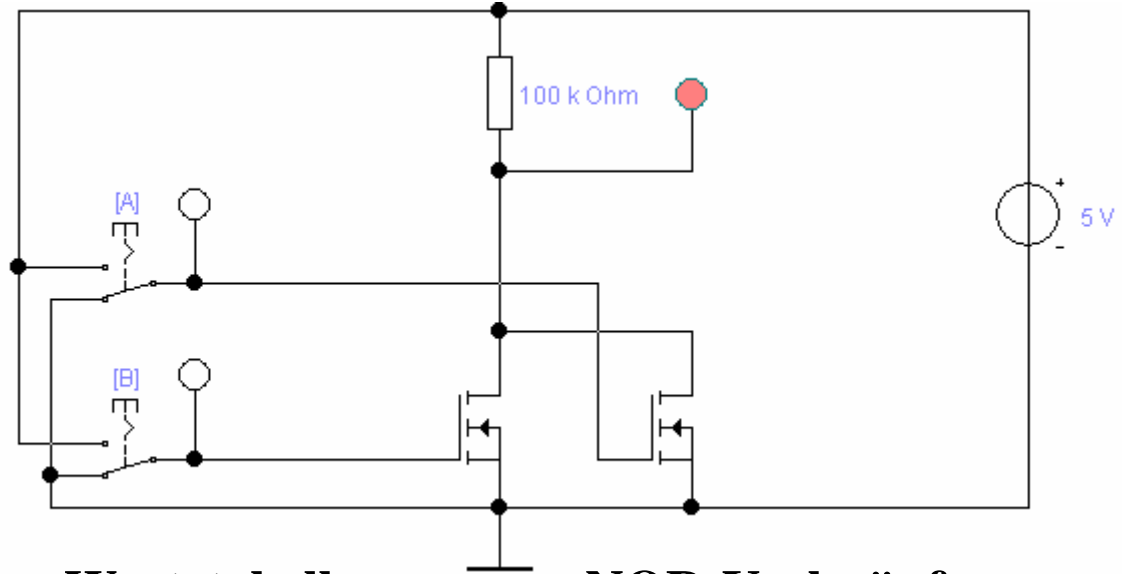
B	A	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NOR-Gatter

○ Parallelschaltung zweier Schalter/Transistoren



**NOR-Verknüpfung
mit Schaltern**



**NOR-Verknüpfung
mit NMOS-Transistoren**

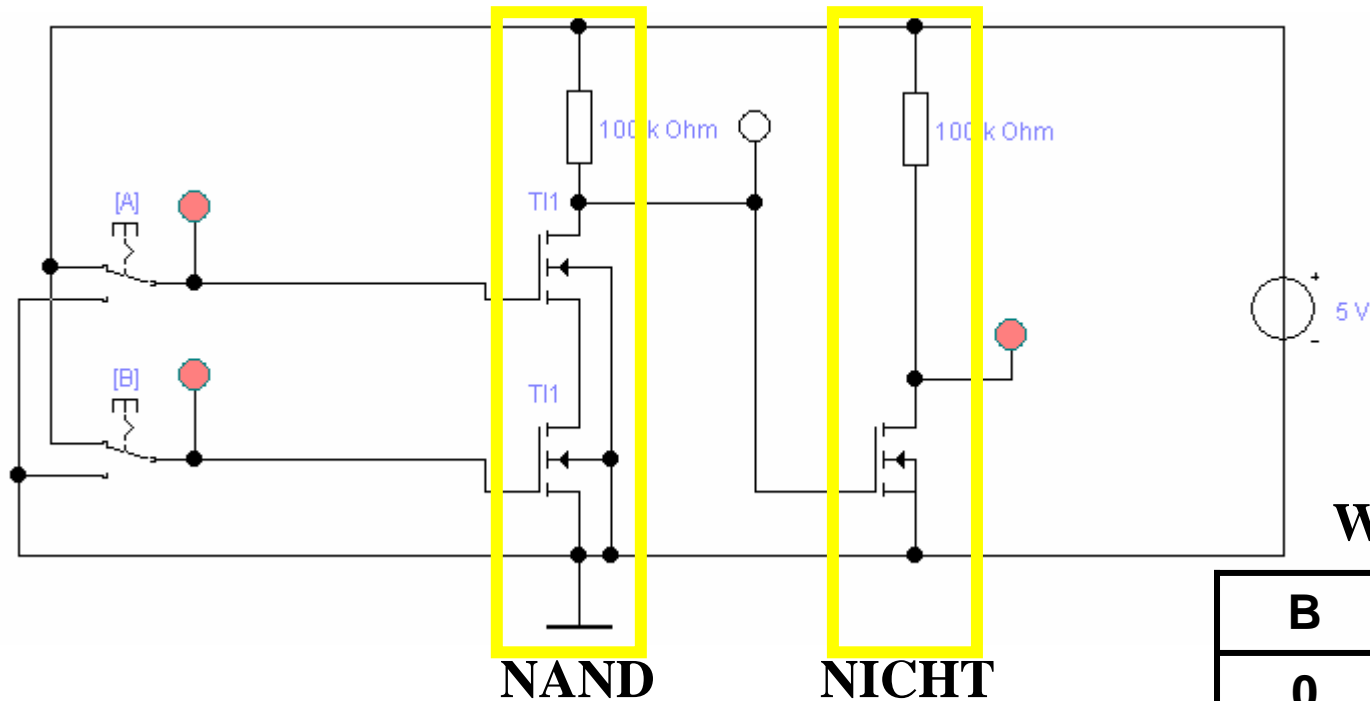
Wertetabelle

B	A	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

UND-Gatter

○ Verknüpfung aus NAND und NICHT

⇒ NMOS-Transistorschaltbild



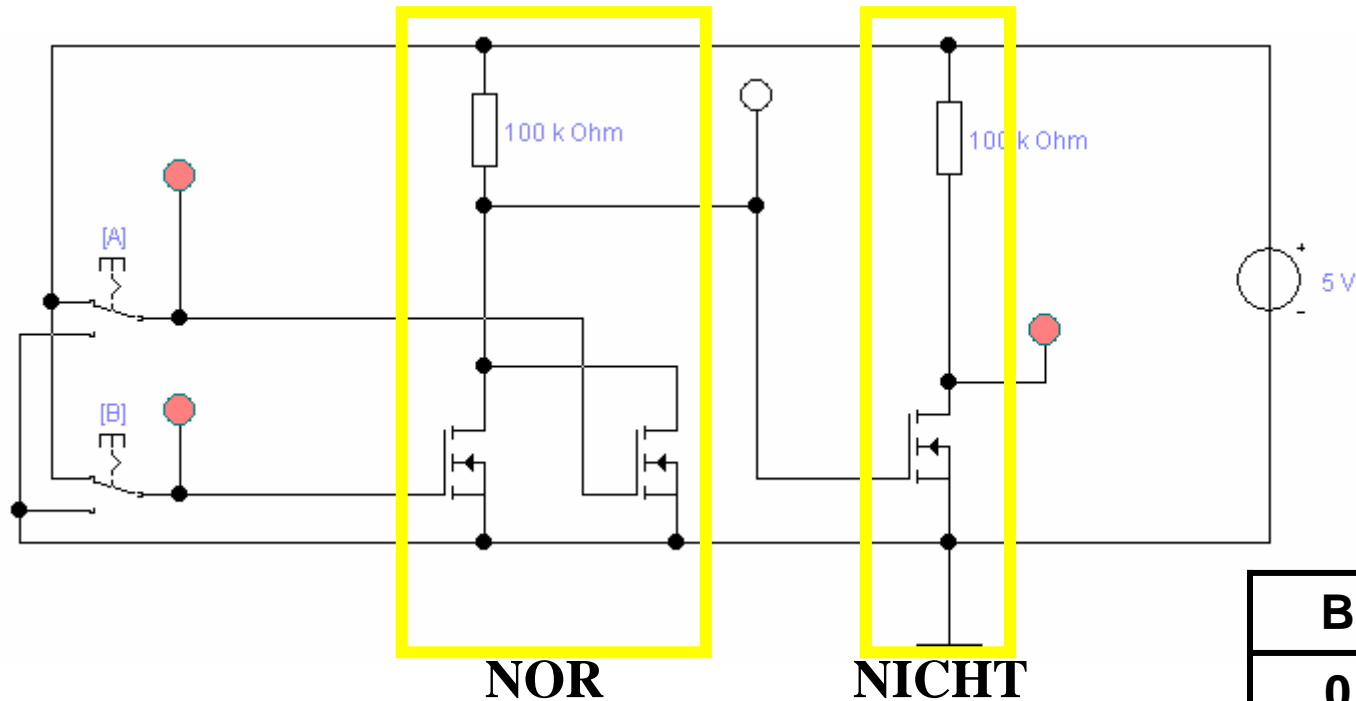
Wertetabelle

B	A	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ODER-Gatter

○ Verknüpfung aus NOR und NICHT

⇒ NMOS-Transistorschaltbild



Wertetabelle

B	A	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

6 Logische Schaltungen in CMOS-Technik

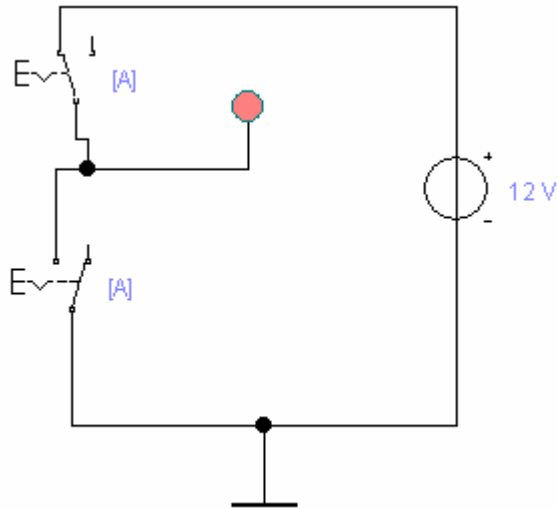
- **CMOS-Technik (Complementary MOS):** verwendet komplementäre Paare aus nMOS- und pMOS-Transistor
 - ⇒ Widerstand wird durch geschalteten PMOS-Transistor ersetzt
 - ⇒ PMOS-Transistoren schalten komplementär zu NMOS-Transistoren
 - Der p-MOS-Transistor leitet, wenn „0“ anliegt und sperrt bei „1“
 - Der n-MOS-Transistor sperrt, wenn „0“ anliegt und leitet bei „1“
 - n-MOS-Transistoren leiten „0“ gut
 - n-MOS-Transistoren werden mit der Masse (GND) verbunden
 - p-MOS-Transistoren leiten „1“ gut
 - p-MOS-Transistoren werden mit der Spannungsversorgung verbunden
 - ⇒ Auf jedem Pfad zwischen VDD und GND ist mindestens ein Transistor gesperrt

- **Für die meisten heutzutage hergestellten logischen Schaltelemente wird CMOS-Technik verwendet**

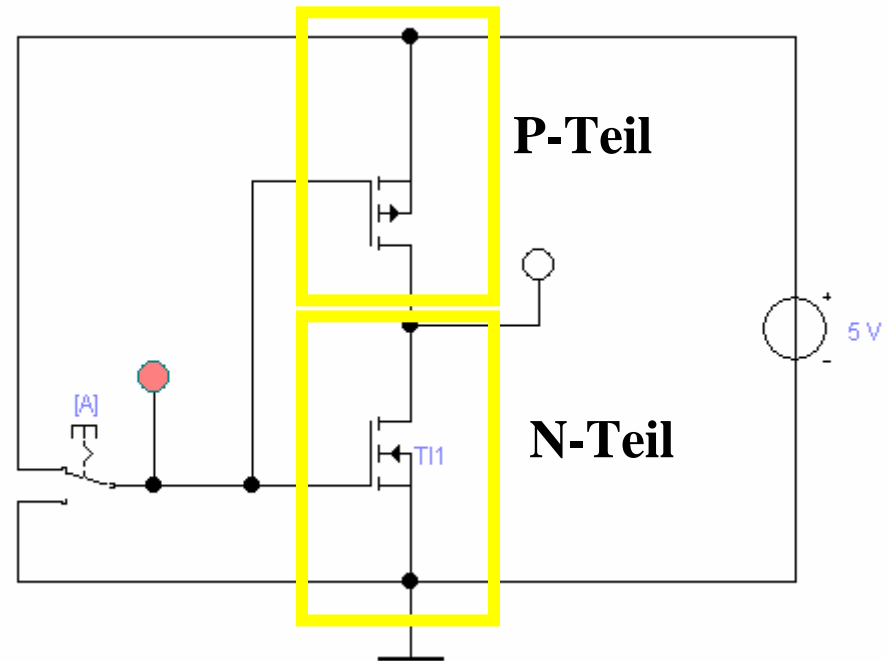
- **Vorteile**
 - ⇒ Keine Widerstände nötig
 - ⇒ Es fließt nur ein geringer Strom

- **Nachteil**
 - ⇒ Schwierigere Herstellung, da n-MOS- und p-MOS-Transistoren auf dem selben Substrat integriert werden müssen

CMOS NICHT-Gatter



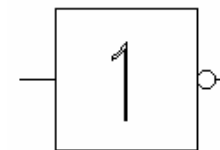
**CMOS NICHT-Gatter
mit Schaltern**
(Beide Schalter werden mit
dem gleichen Eingangssignal
gesteuert)



**CMOS NICHT-Gatter
mit MOS-Transistoren**

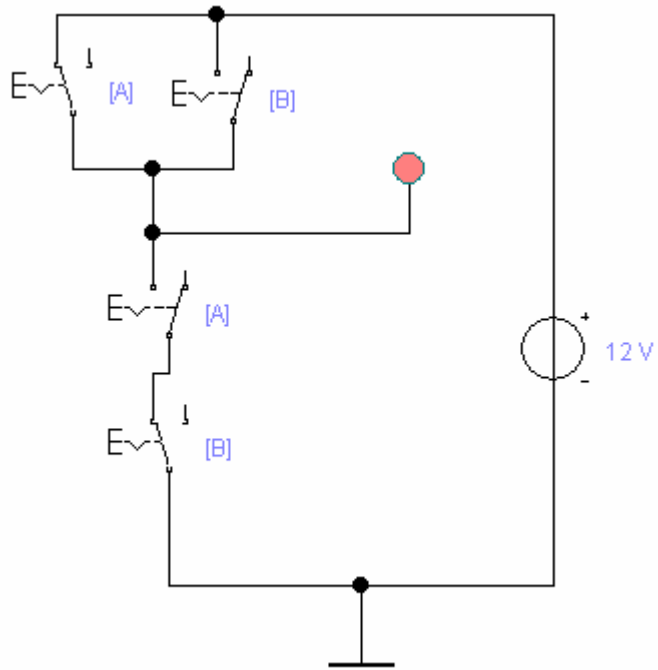
Wertetabelle

A	Y
0	1
1	0



Schaltzeichen

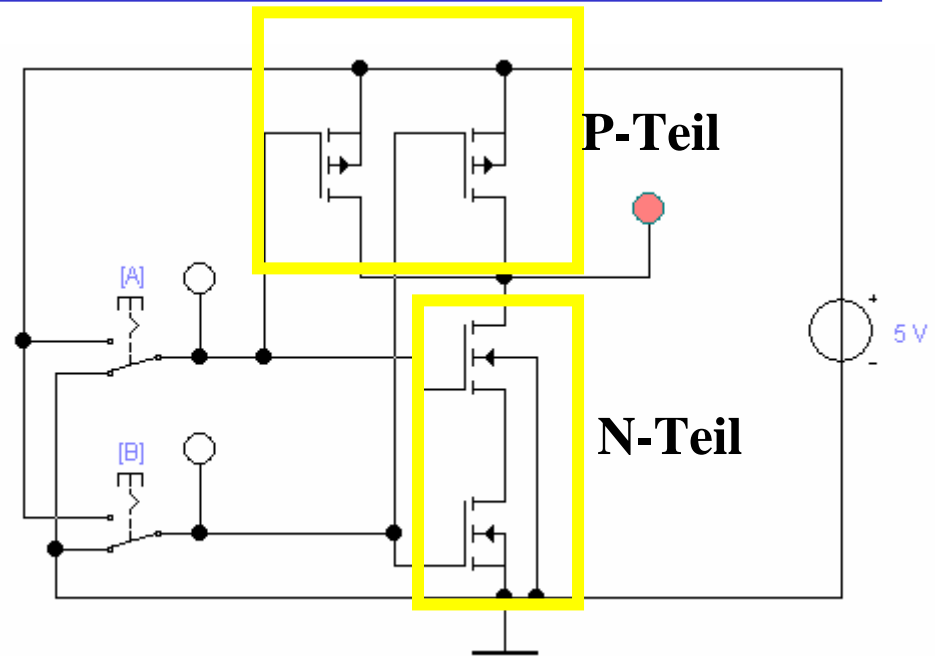
CMOS NAND-Gatter



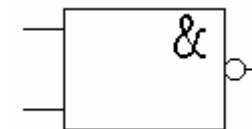
**NAND-Gatter
mit Schaltern**

Wertetabelle

B	A	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

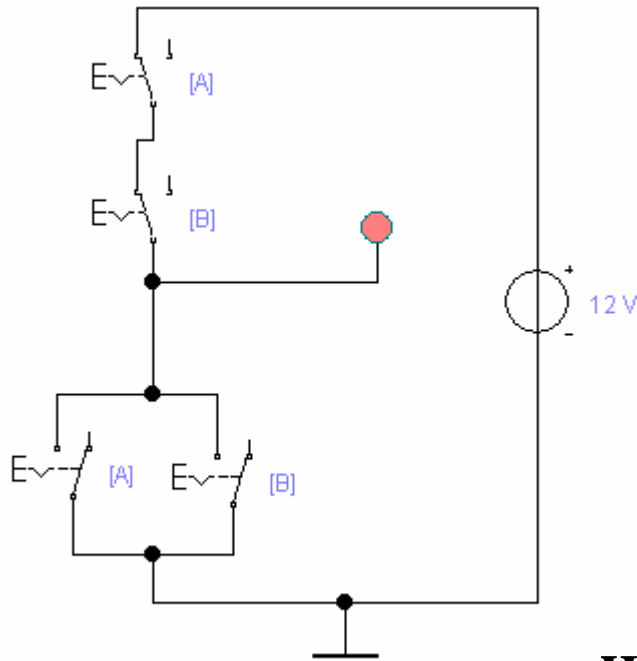


**NAND-Gatter
mit MOS-Transistoren**



Schaltzeichen

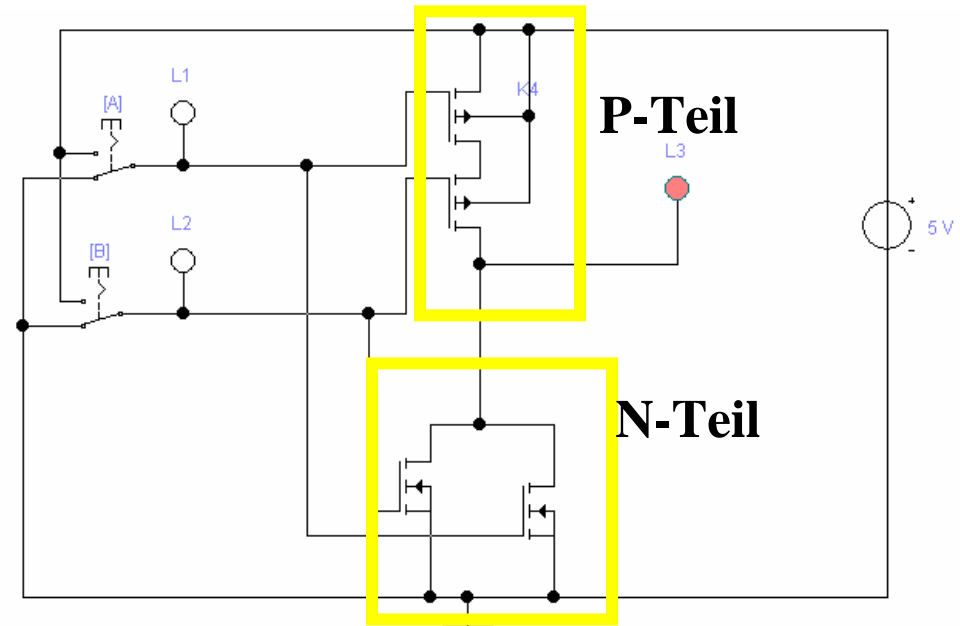
CMOS NOR-Gatter



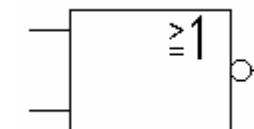
**NOR-Gatter
mit Schaltern**

Wertetabelle

B	A	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

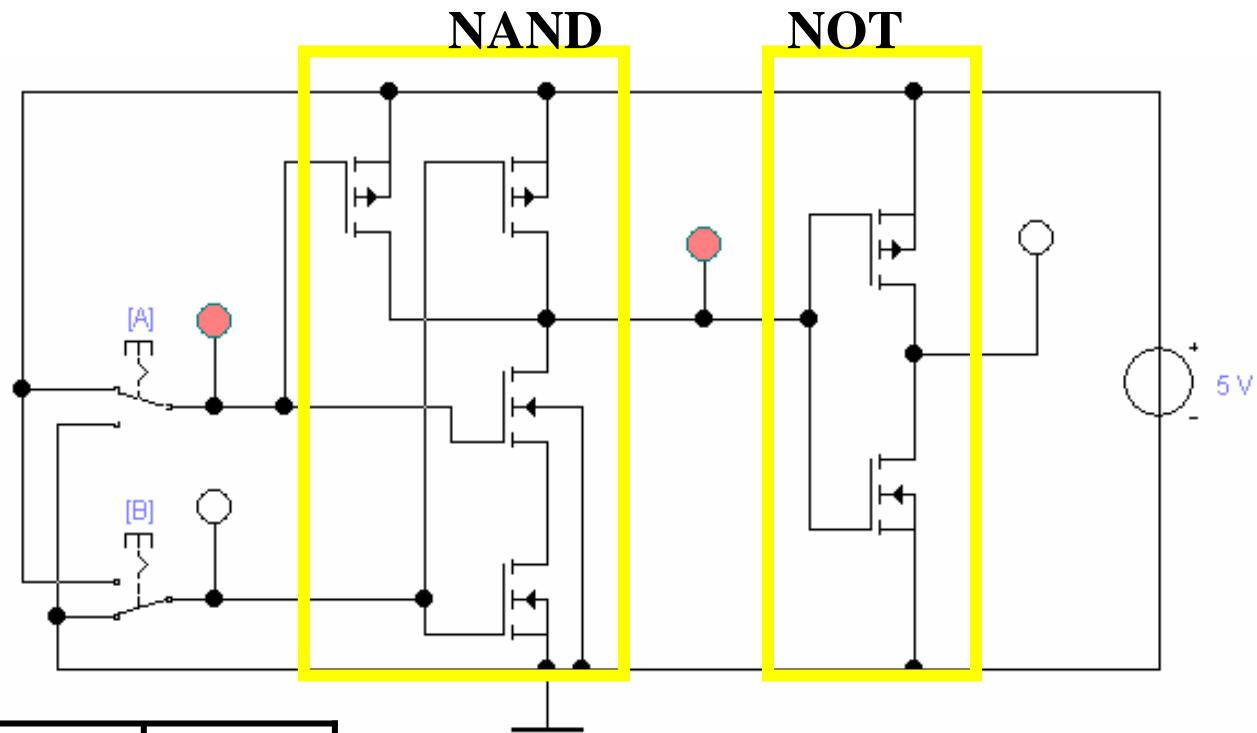


**NOR-Gatter
mit MOS-Transistoren**



Schaltzeichen

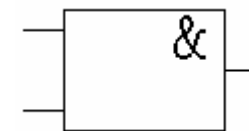
CMOS UND-Gatter



Wertetabelle

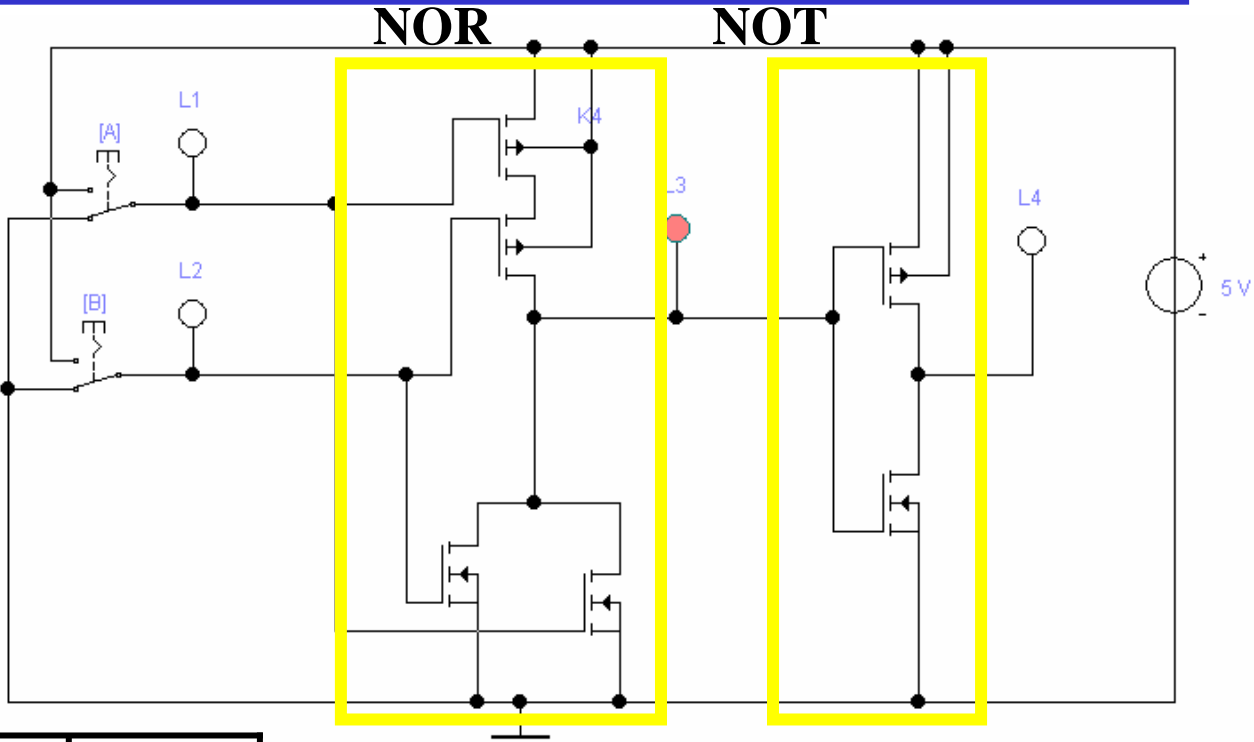
B	A	NAND	UND
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

UND-Gatter aus
NAND und NOT



Schaltzeichen

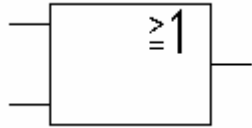
CMOS ODER-Gatter



Wertetabelle

B	A	NOR	ODER
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	1

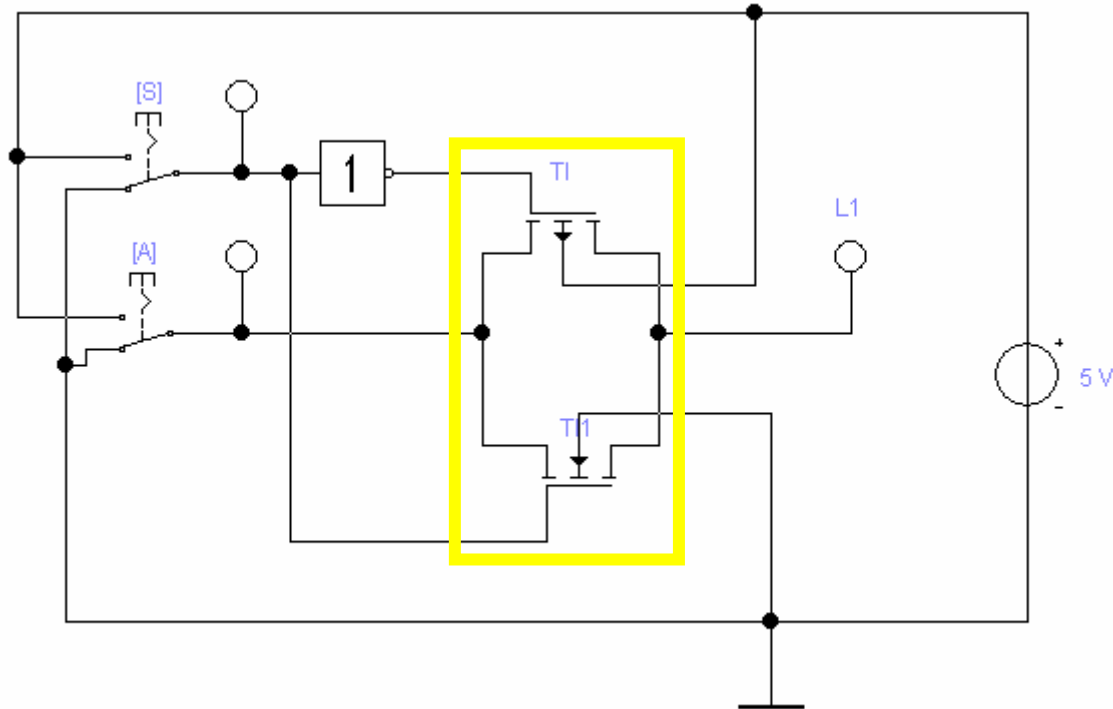
ODER-Gatter aus NOR und NOT



Schaltzeichen

Komplementärschalter (Transmission Gate)

- Parallelschaltung eines PMOS- und eines NMOS-Transistors

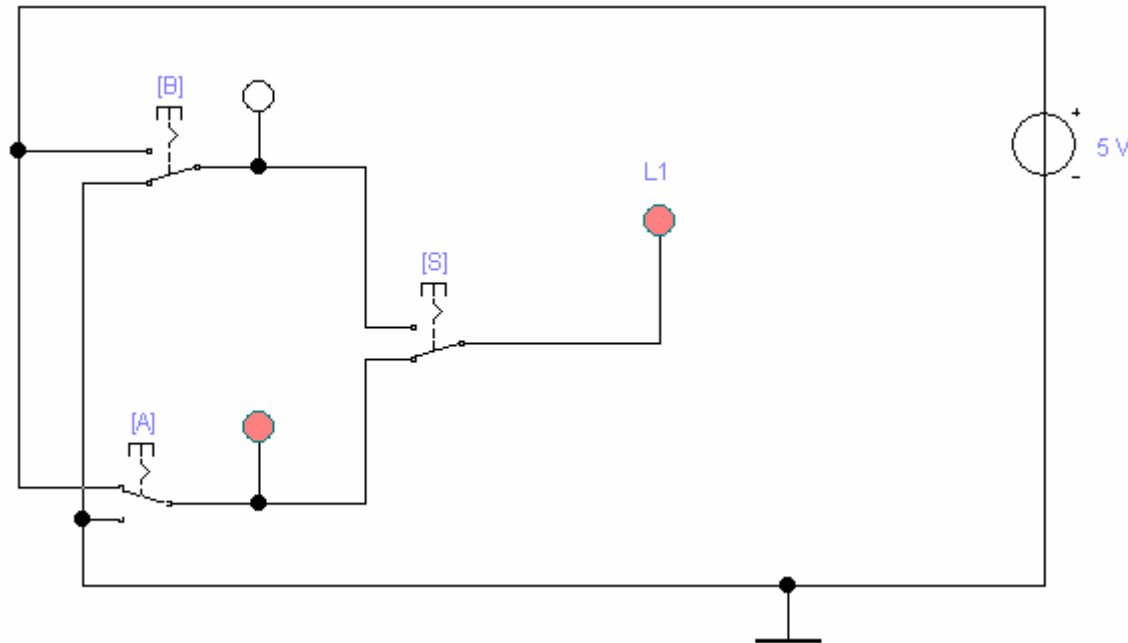


Multiplexer

- Wählt den Signalfluss durch ein Steuersignal

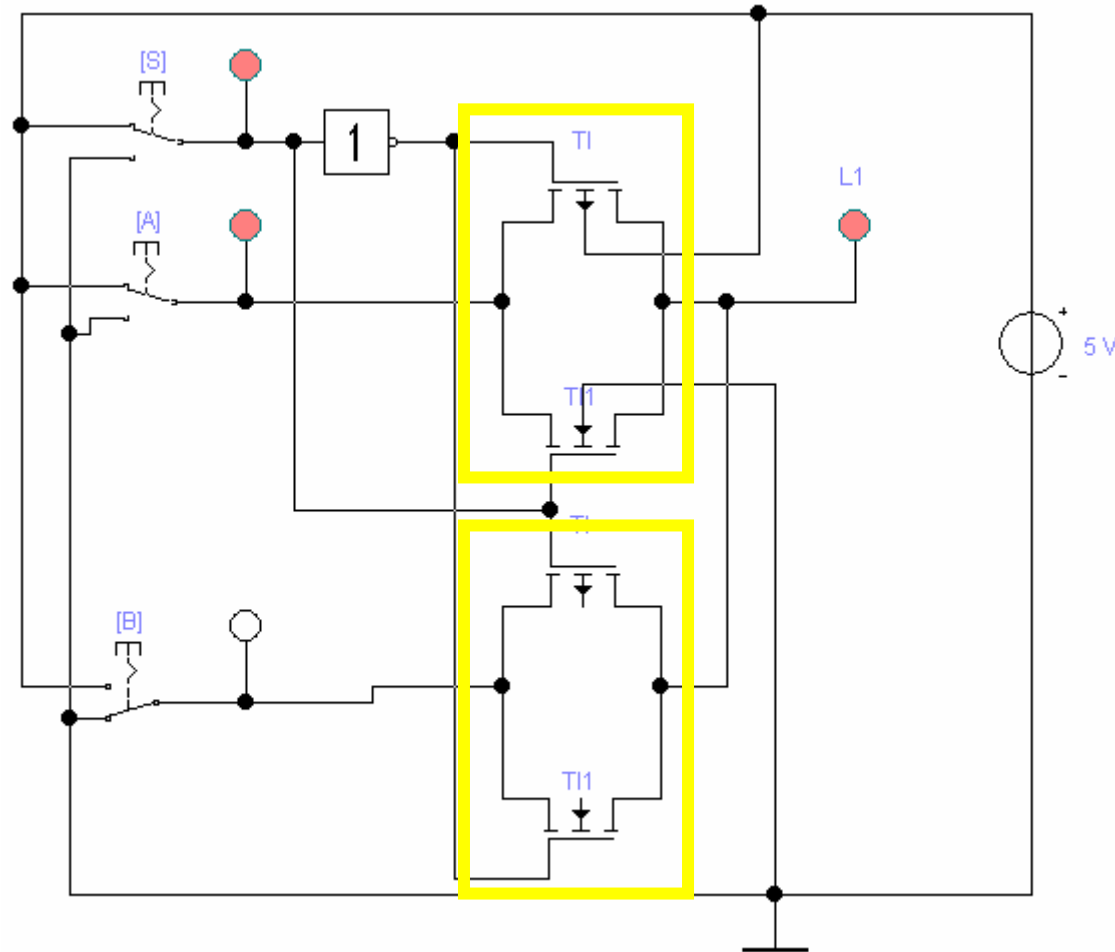
Wertetabelle

S	B	A	MUX
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1



Multiplexer

- Multiplexer können aus Komplementärschaltern aufgebaut werden

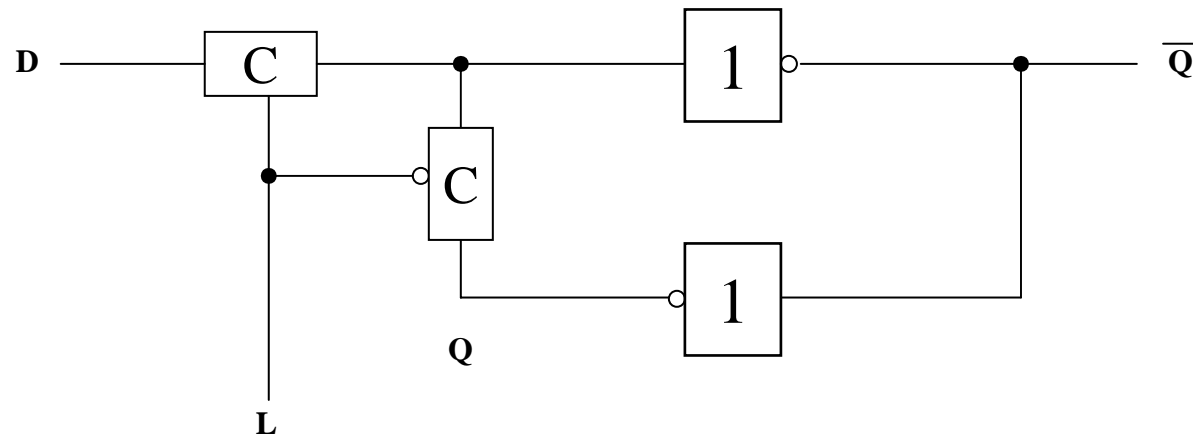


Speicher

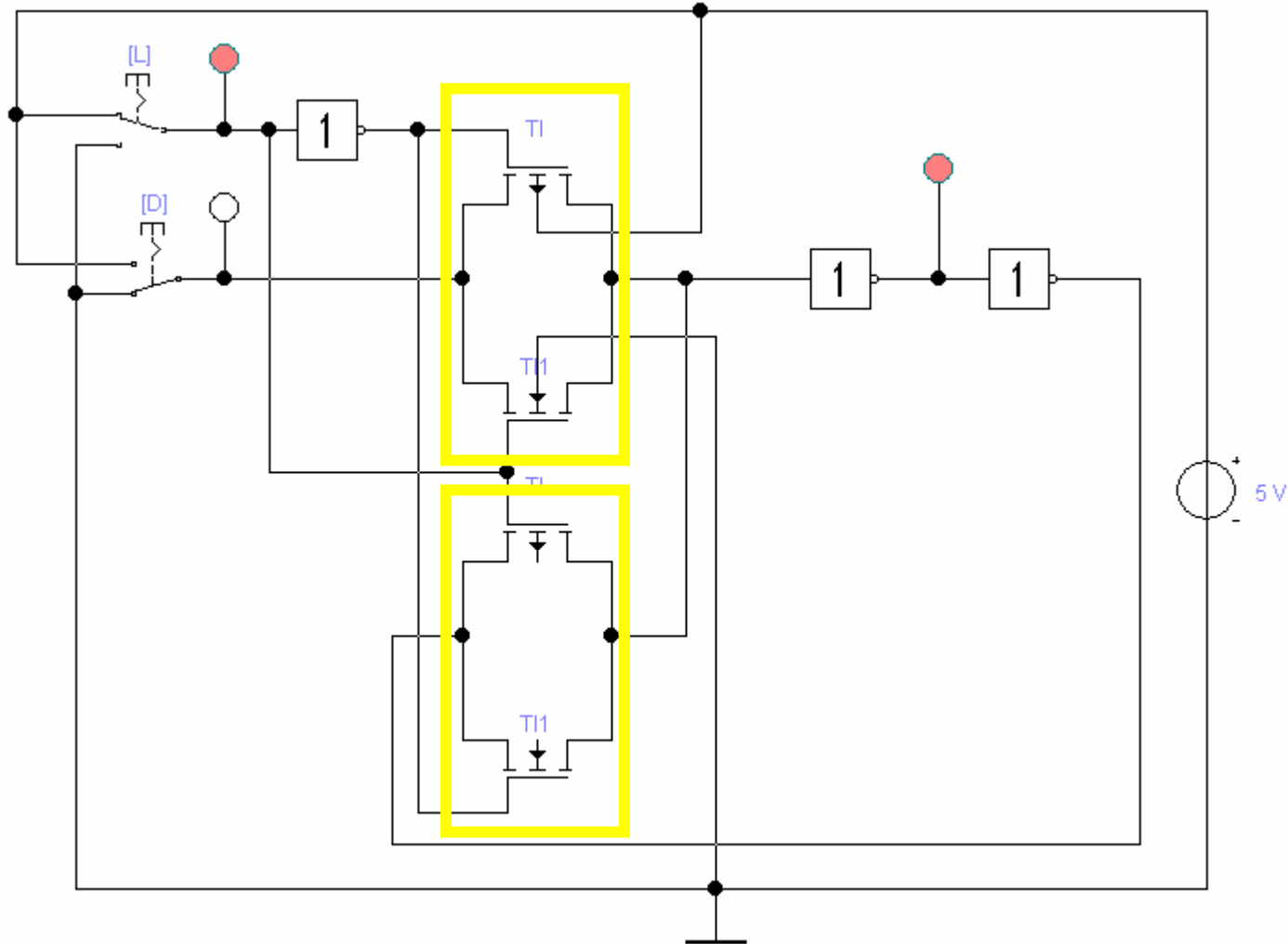
- Speicherelement kann aus den bisher behandelten CMOS-Strukturen aufgebaut werden

- ⇒ Man benötigt zwei Inverter und einen Multiplexer.
- ⇒ Die Ausgabe folgt der Eingabe, wenn $L=1$
- ⇒ Die Ausgabe speichert den letzten Wert, wenn $L=0$

- Schaltbild:



Schaltverhalten des Speichers



Größe der CMOS-Gatter

Schaltfunktion	Anzahl der Transistoren
NICHT	2
NAND	4
NOR	4
UND	6
ODER	6
Komplementärschalter	4
Multiplexer	6
Speicher	10

Komplexe Schaltfunktionen

○ Zwei Möglichkeiten

- ⇒ Aufbau durch einfache Gatter
- ⇒ Realisierung als CMOS-Schaltfunktion

○ Grundregeln des CMOS-Entwurfs

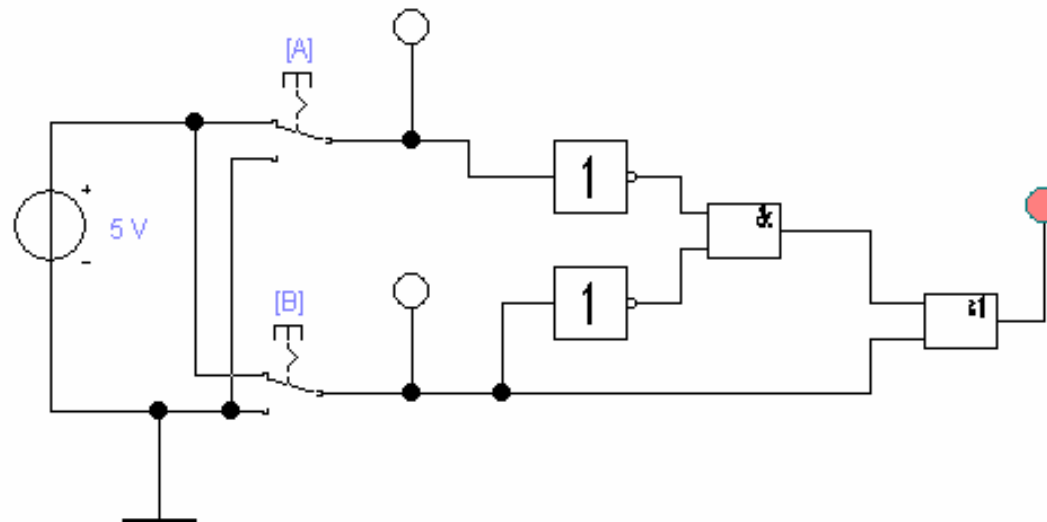
- ⇒ Zu keinem Zeitpunkt darf ein Pfad von der Spannungsversorgung zur Masse geschaltet sein
 - Alle parallelen NMOS-Transistoren müssen im P-Teil in Reihe geschaltet werden
 - Alle in Reihe geschalteten NMOS-Transistoren müssen im P-Teil parallel geschaltet werden
- ⇒ PMOS-Transistoren schalten die Spannungsversorgung
- ⇒ NMOS-Transistoren schalten die Masse

Beispiel

○ Gegeben: Die Wertetabelle

B	A	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Realisierung mit einfachen Gattern



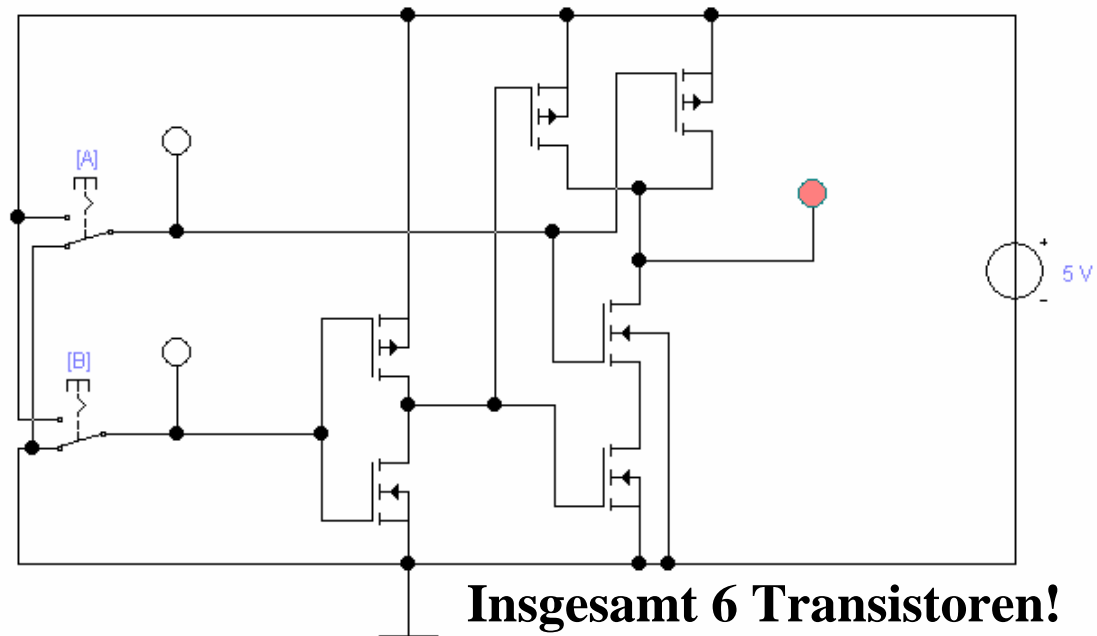
Insgesamt $2+2+6+6=16$ Transistoren!

Realisierung als CMOS Komplexgatter

○ Realisierung als CMOS-Komplexgatter

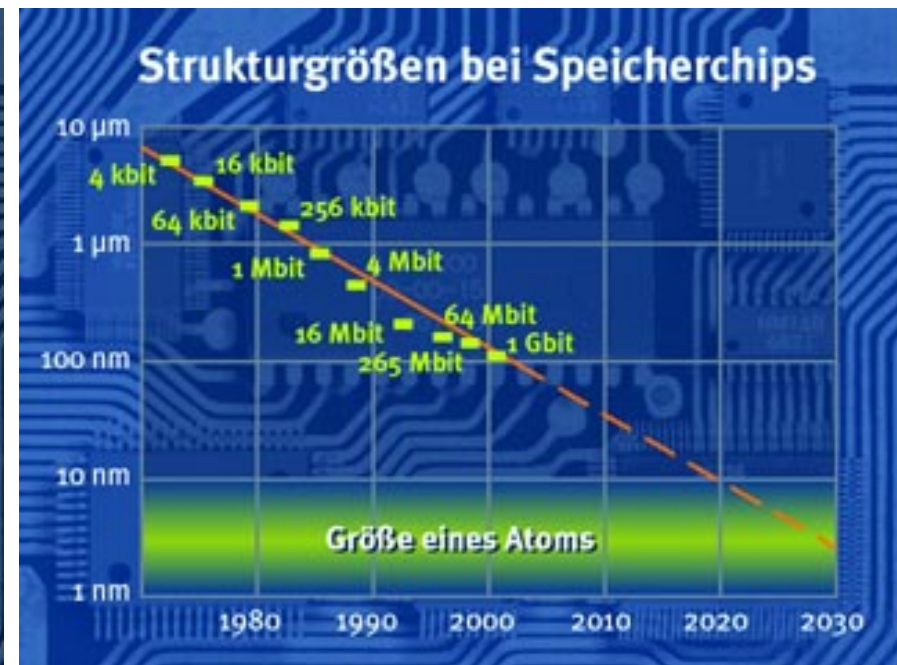
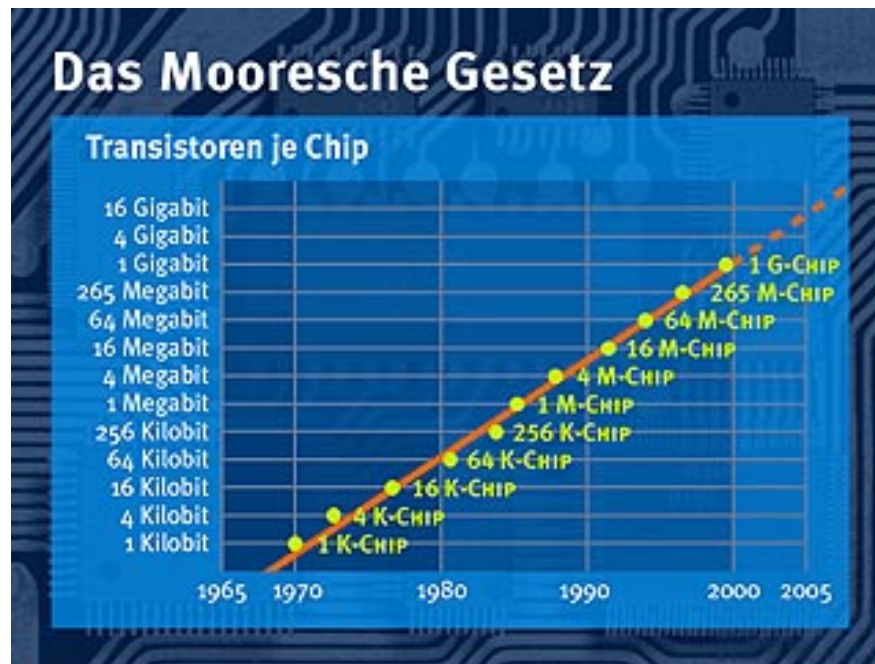
- ⇒ Entwicklung des N-Teils aus den Nullstellen der Wertetabelle
 - Schaltung hat den Wert „0“ für A auf „1“ und B auf „0“
 - Negation des Signals B zu $\neg B$
 - Reihenschaltung von A und $\neg B$
- ⇒ Entwicklung des P-Teils durch Reihen/Parallel-Wandlung aus dem N-Teil

B	A	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1



7 Physikalische Darstellung von MOS-Schaltkreisen

- Hochintegrierte Schaltkreise machen seit mehr als 30 Jahren eine rasante Entwicklung in Bezug auf verkleinerte Strukturgröße und höhere Integrationsdichte (Anzahl Transistoren pro Fläche) durch



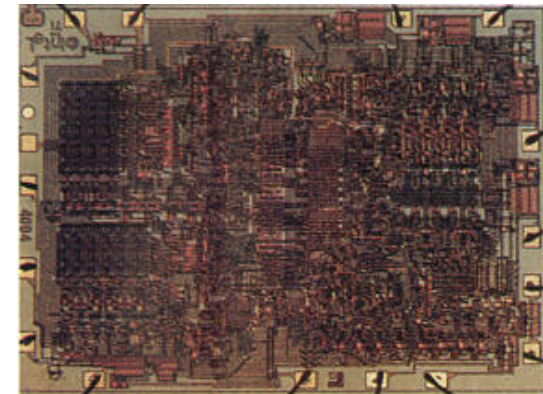
7 Physikalische Darstellung von MOS-Schaltkreisen

○ Integrationsgrade (Anzahl von Transistoren pro Chip):

- **SSI (Small Scale Integration)** ≤ 100 Transistoren
- **MSI (Medium SI)** $\sim 100 - 1000$ Transistoren
- **LSI (Large SI)** $\sim 1000 - 10^4/10^5$ Transistoren
- **VLSI (Very Large SI)** $\sim \geq 10^5/10^6$ Transistoren

Beispiele:

i) Erster kommerziell verfügbarer Mikroprozessor
Intel 4004 besaß 2257 Transistoren (1971)

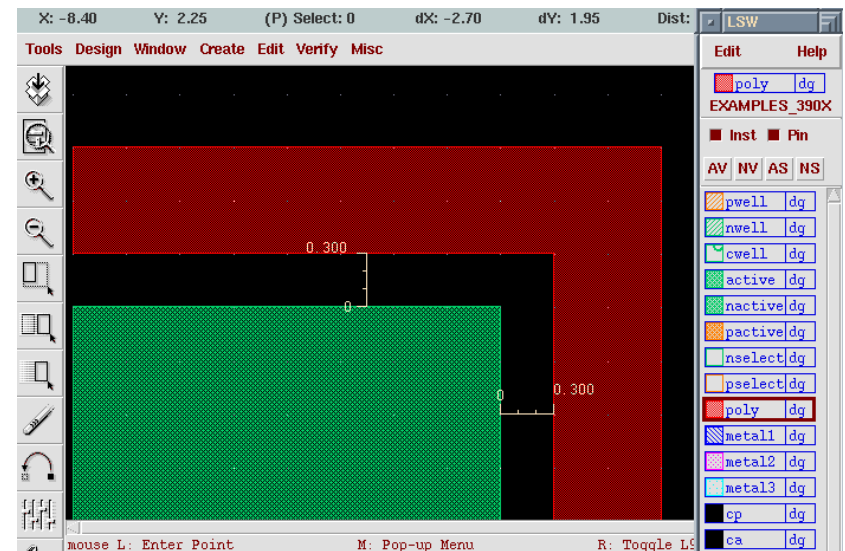
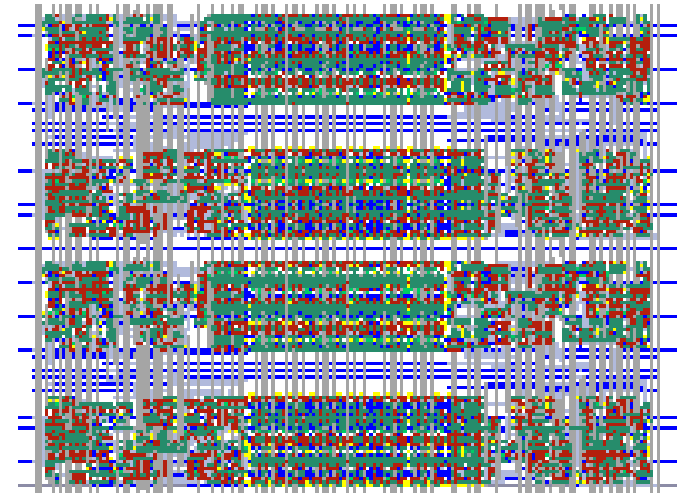


ii) Pentium 4 Extreme Edition: 169 Millionen Transistoren

7 Physikalische Darstellung von MOS-Schaltkreisen

○ Entwurfsmethoden:

- ⇒ **Full-custom:** Graphischer Layout-Editor wird verwendet um durch farbige Rechtecke die unterschiedlichen Schichten auf einem Chip festzulegen
- ⇒ **Semi-custom:** Der Entwurf eines Schaltkreises basiert auf Standardzellen (für elementare Gatter). Das Layout für den Chip wird daraus automatisch erzeugt.
- ⇒ **Silicon-Compiler:** Das funktionelle Verhalten eines Schaltkreises oder Makrobausteins wird beschrieben. Daraus werden (halb)automatisch die Schaltkreise und das Layout erzeugt.



7 Physikalische Darstellung von MOS-Schaltkreisen

○ Entwurfsregeln: Vorschriften über

- ⇒ minimale Leiterbahnbreiten
- ⇒ minimale Abstände zwischen Leiterbahnen
- ⇒ minimale Größen von Transistoren, Kontakten, I/O-Pads

- ⇒ Einhaltung der Entwurfsregeln führt mit hoher Wahrscheinlichkeit zur korrekten elektrischen Funktionsfähigkeit des Schaltkreises
- ⇒ Durch die Entwurfsregeln (vor allem die minimale Leiterbahnbreite) wird die maximale Integrationsdichte (Anzahl Transistoren pro Fläche) begrenzt

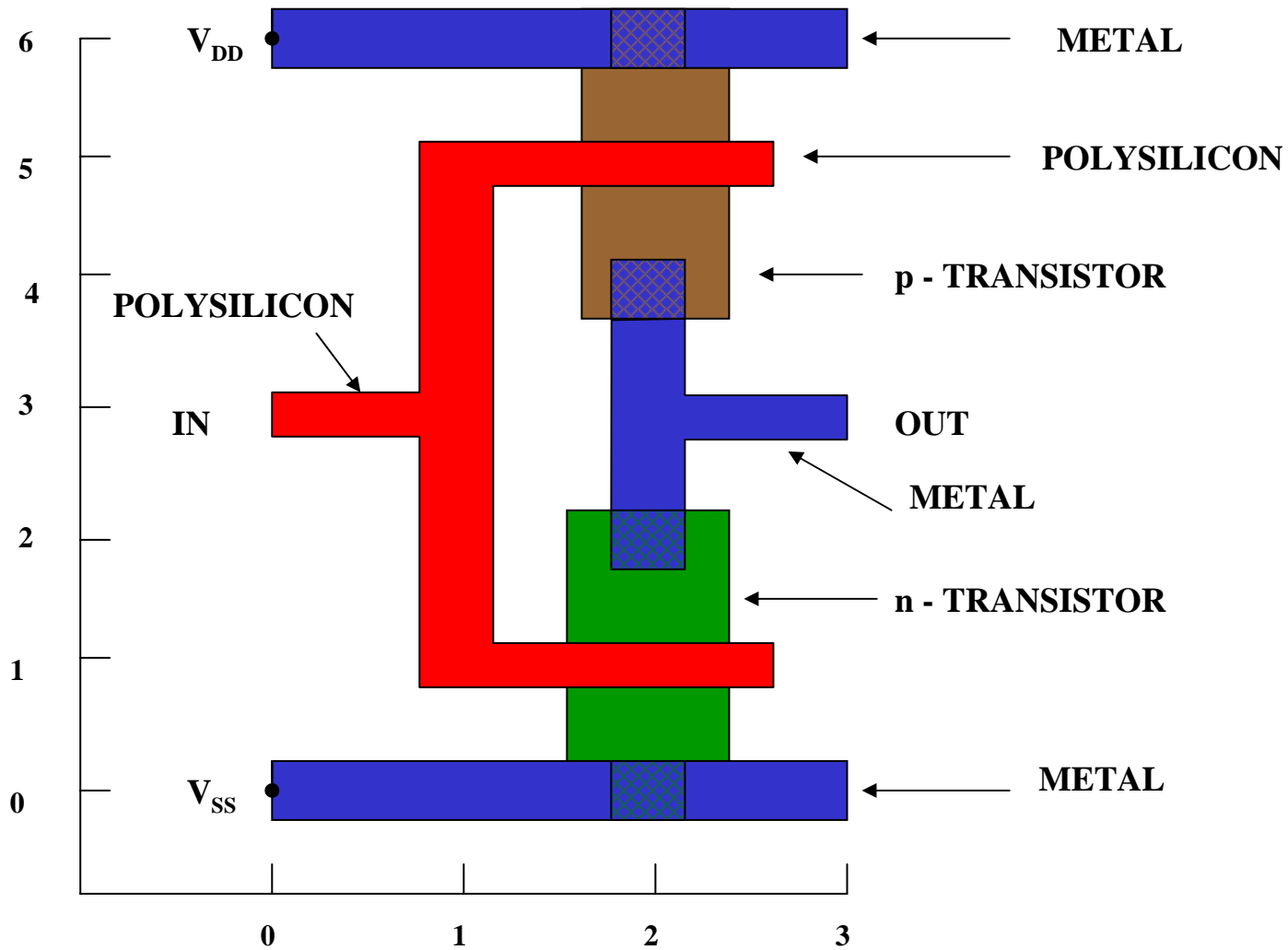
○ λ Parameter der die maximale Abweichung angibt

- ⇒ 1975: $\lambda = 6 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
- ⇒ 1997 $\lambda = 0.65 - 0.35 \mu\text{m}$
- ⇒ aktuell $\lambda = 0.09 \mu\text{m} = 90 \text{ nanometer}$

7 Physikalische Darstellung von MOS-Schaltkreisen

- Die physikalische Darstellung von MOS-Schaltkreisen wird verwendet, um damit den physikalischen Aufbau einer integrierten Schaltung zu beschreiben
 - ⇒ Daraus lassen sich dann (im Prinzip) automatisch Belichtungsmasken für die Chipherstellung erstellen.
- Einzelnen Transistoren entstehen durch Übereinanderlegen von Schichten
 - ⇒ **p-Diffusion** (positiv dotiert)
 - ⇒ **n-Diffusion** (negativ dotiert)
 - ⇒ **Polysilizium** (Gate)
 - ⇒ **Metall1** und **Metall2**
 - ⇒ **Kontakte**

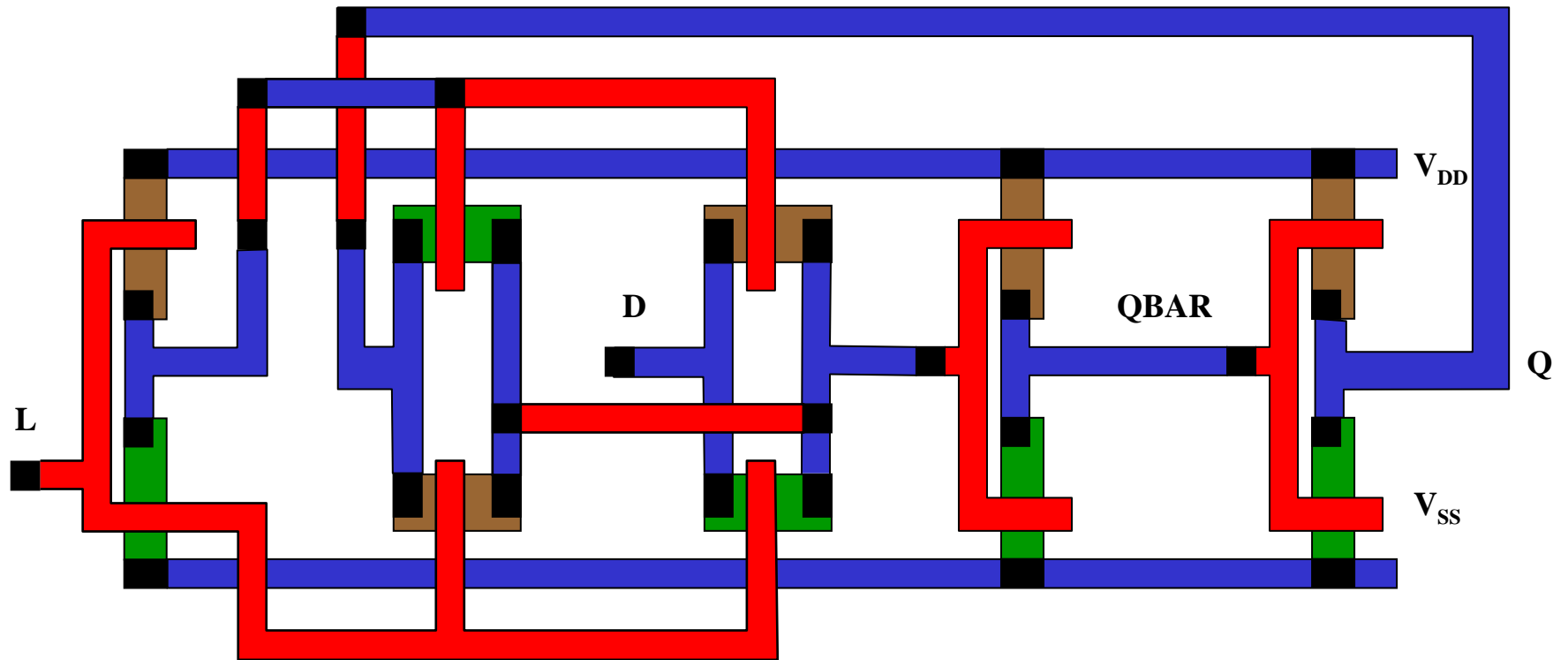
Beispiel Inverter



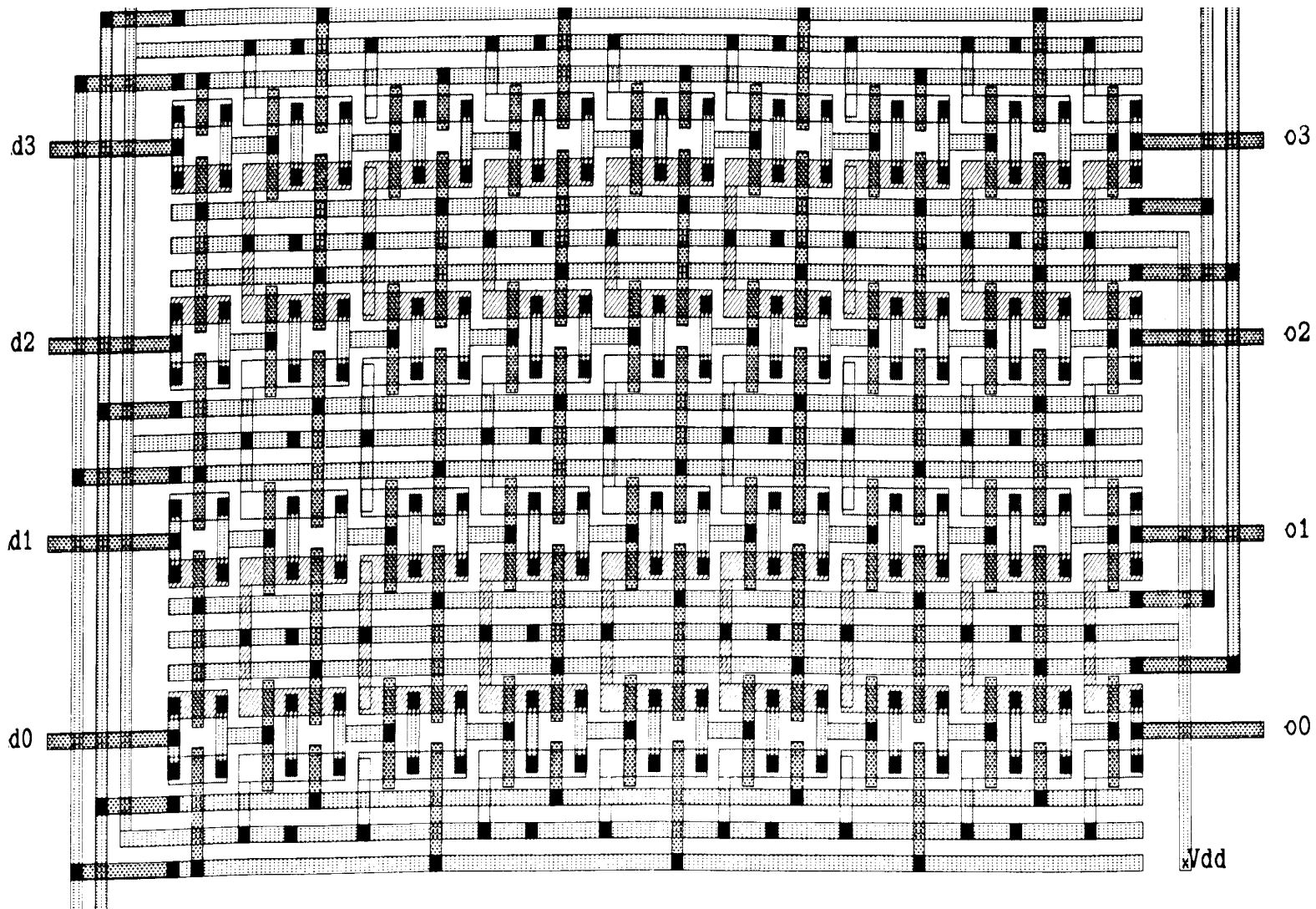
Sprachliche Beschreibung des Layouts eines Komplementärschalters

```
begin tg
t1: device n (2,1) or=east
t2: device p (2,5) or=east
      wire alum (0,0) (4,0)
      wire alum (0,6) (4,6)
      wire poly (2,-1) (2,1)
      wire poly (2,7) (2,5)
      wire alum (1,1) (1,5)
      wire alum (3,1) (3,5)
      wire alum (0,3) (1,3)
      wire alum (3,3) (4,3)
      contact md (1,1)
      contact md (3,1)
      contact md (1,5)
      contact md (3,5)
end
```

Beispiel Flipflop



Beispiel Schieberegister



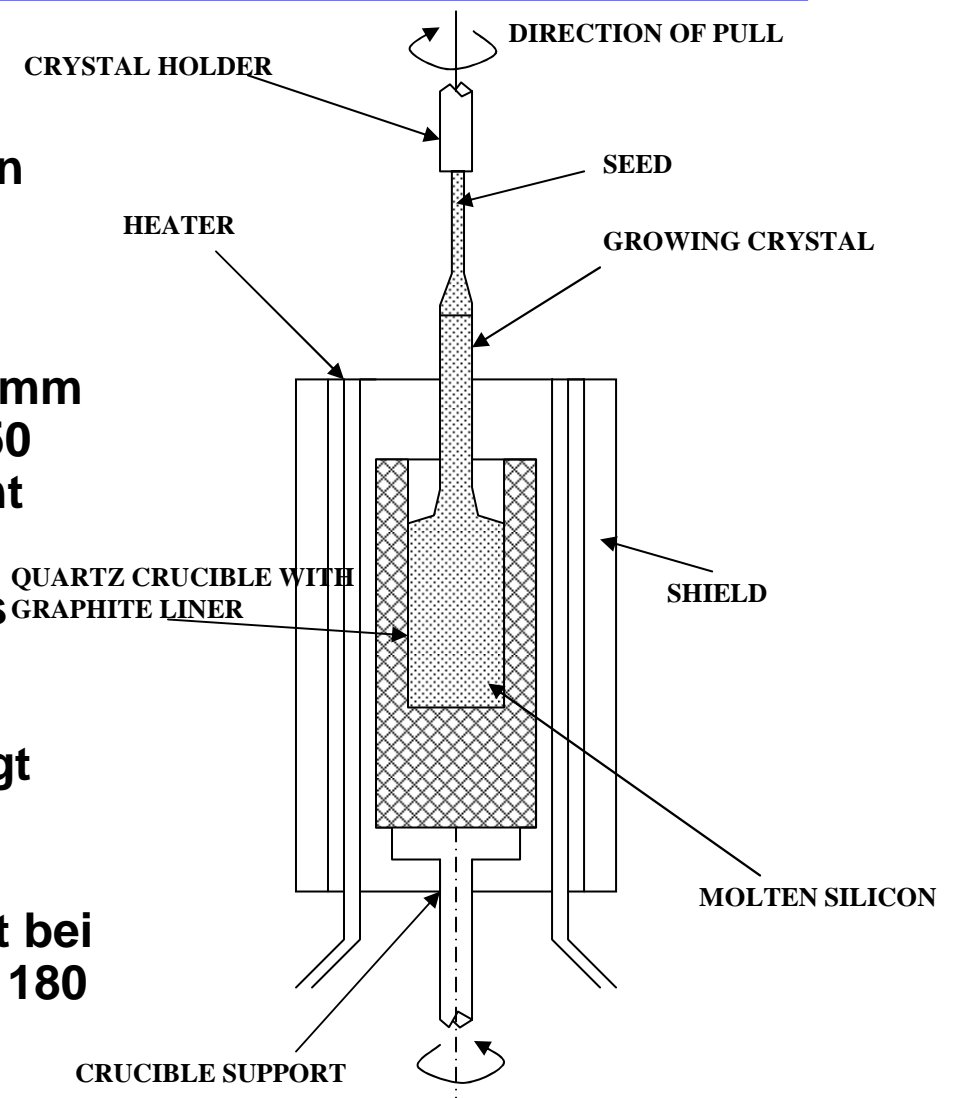
8 Der CMOS-Fertigungsprozeß

8.1 Herstellung von Wafern

In diesem Abschnitt folgt eine Übersicht, wie CMOS-Schaltungen gefertigt werden.

Ausgangprodukt sind **monokristalline Siliziumscheiben** deren Dicke zwischen 0.25 und 1 mm und deren Durchmesser 75 bis 150 mm beträgt. Diese Scheiben nennt man **Wafer**

- Monokristallin bedeutet, dass das Silizium in einer möglichst reinen Kristallstruktur erstarrt. Der Schmelzpunkt von Silizium beträgt ca. 1425 °C
- Heutzutage wird meist die Czochralski-Methode angewendet bei der die Wachstumsrate ca. 30 bis 180 mm/Stunde beträgt



8 Der CMOS-Fertigungsprozeß



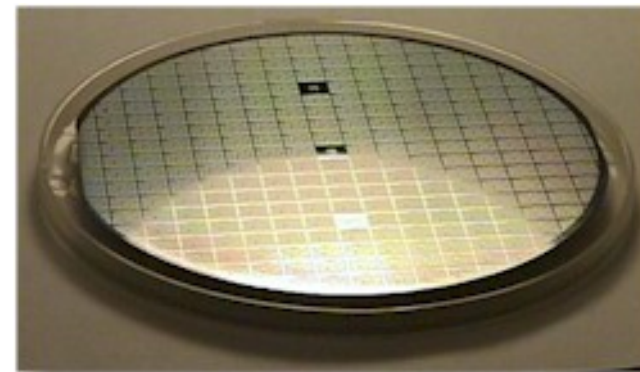
Czochralski-Methode



Siliziumbarren



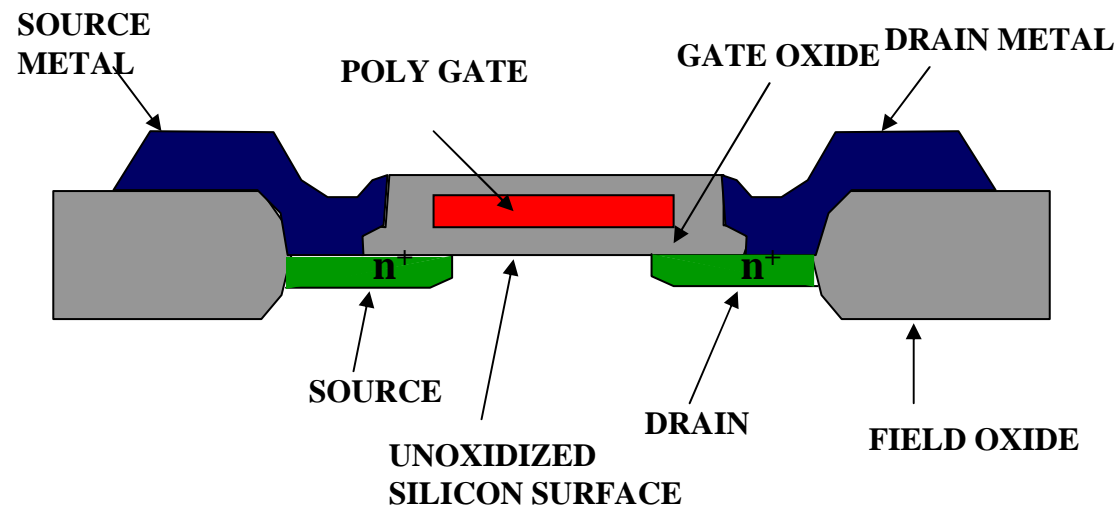
Einkristall



Wafer

Oxydation

- Siliziumoxyd (SiO_2) ist ein guter Isolator. Es wird erzeugt, indem der Wafer einer oxydierenden Umgebung ausgesetzt wird
 - ⇒ Wasserdampf bei 900°C bis 1000°C (schnelle Oxydierung)
 - ⇒ Sauerstoff bei 1200°C (langsame Oxydierung)
- SiO_2 besitzt etwa das doppelte Volumen von Silizium und es wächst sowohl vertikal als auch horizontal



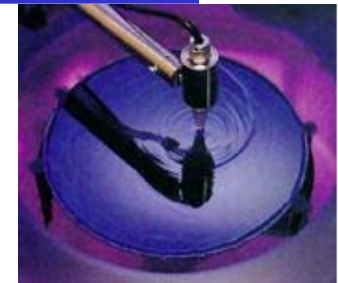
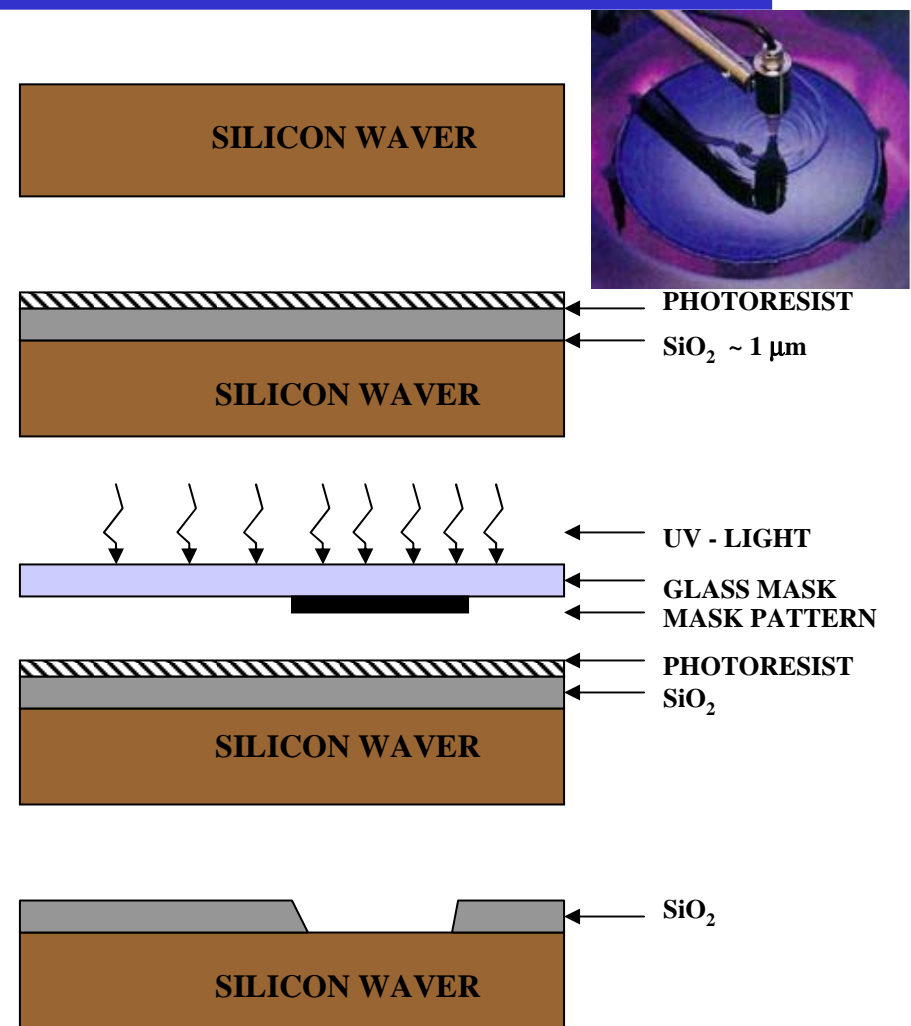
Selektive Diffusion

- **Selektive Dotierung** ist das Erzeugen verschieden dotierter Siliziumschichten.

- Flächen müssen dabei
 - ⇒ beliebige Formen annehmen können
 - ⇒ genau plaziert sein
 - ⇒ genau skaliert sein

- SiO_2 verhindert den Dotierungsvorgang. Es kann später durch Säure entfernt werden, die das Silizium nicht angreift.

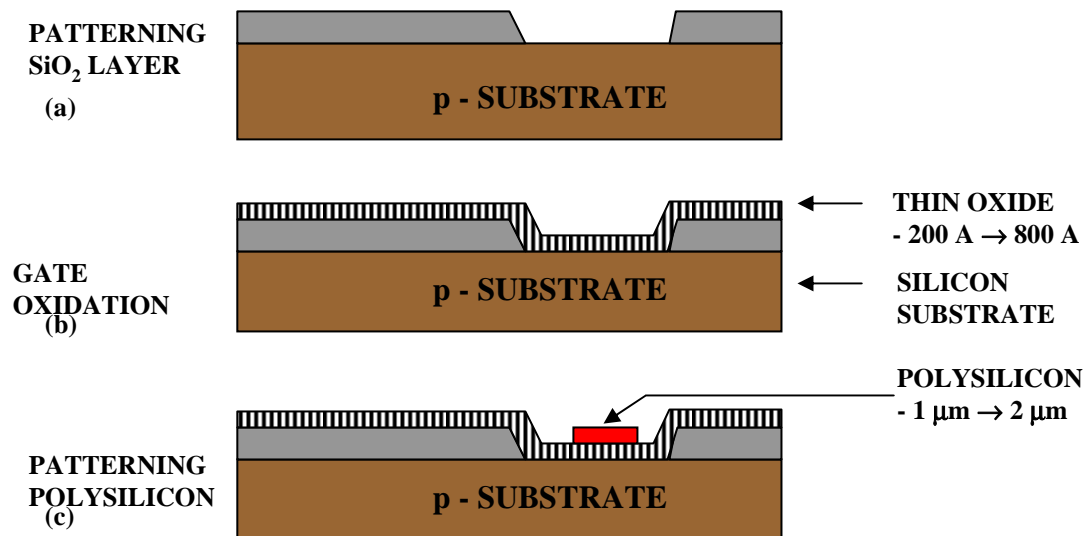
- **Prinzip der selektiven Dotierung:**
 - ⇒ Oxydieren der Siliziumoberfläche
 - ⇒ Beschichten mit einem lichtempfindlichen Lack
 - ⇒ Belichten mit UV-Licht über eine Maske
 - ⇒ Entfernen des nicht belichteten Photolacks und des darunterliegenden Siliziumoxyds



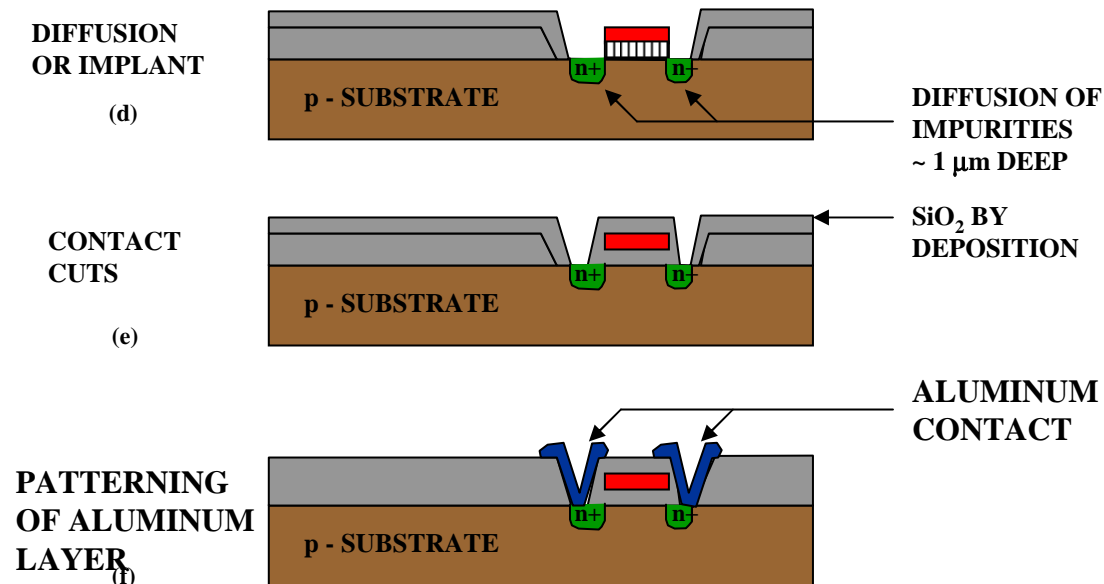
Hinweis: auch der umgekehrte Prozess die belichteten Stellen des Lacks zu entfernen ist möglich

8.2 Entstehung eines NMOS Transistors

- Zunächst wird der Wafer mit einer dicken SiO_2 -Schicht überdeckt
- An den Stellen, an denen Transistoren entstehen sollen, werden diese freigelegt (a)
- Die gesamte Fläche wird mit einer dünnen, sehr einheitlichen SiO_2 -Schicht überdeckt (b)
- Der Wafer wird mit einem Photolack überzogen und an den Stellen, an denen Gates entstehen sollen, freigelegt. Polykristallines Silizium wird aufgedampft (c)

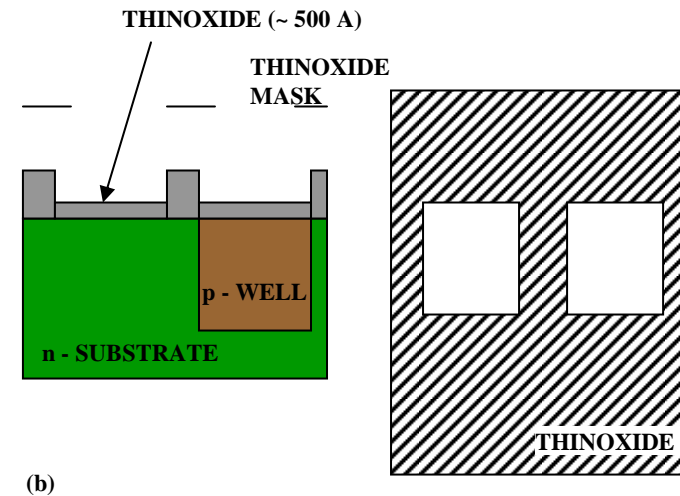
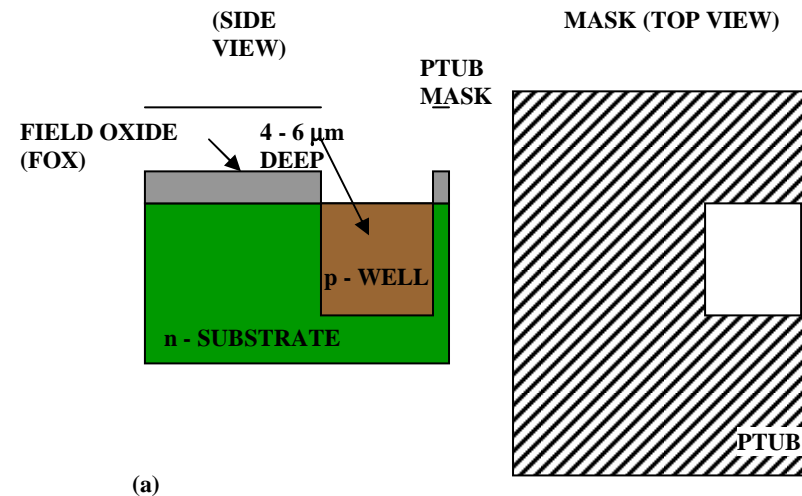


- Mit den gleichen Arbeitsschritten werden die Flächen für die negative Dotierung freigelegt. Die freigelegten Flächen werden negativ dotiert (d). Der Wafer wird erneut mit einer SiO₂-Schicht überdeckt
- Die Kontaktstellen werden durch Ätzung freigelegt.
- Die Metallbahnen zur Verbindung werden aufgedampft.

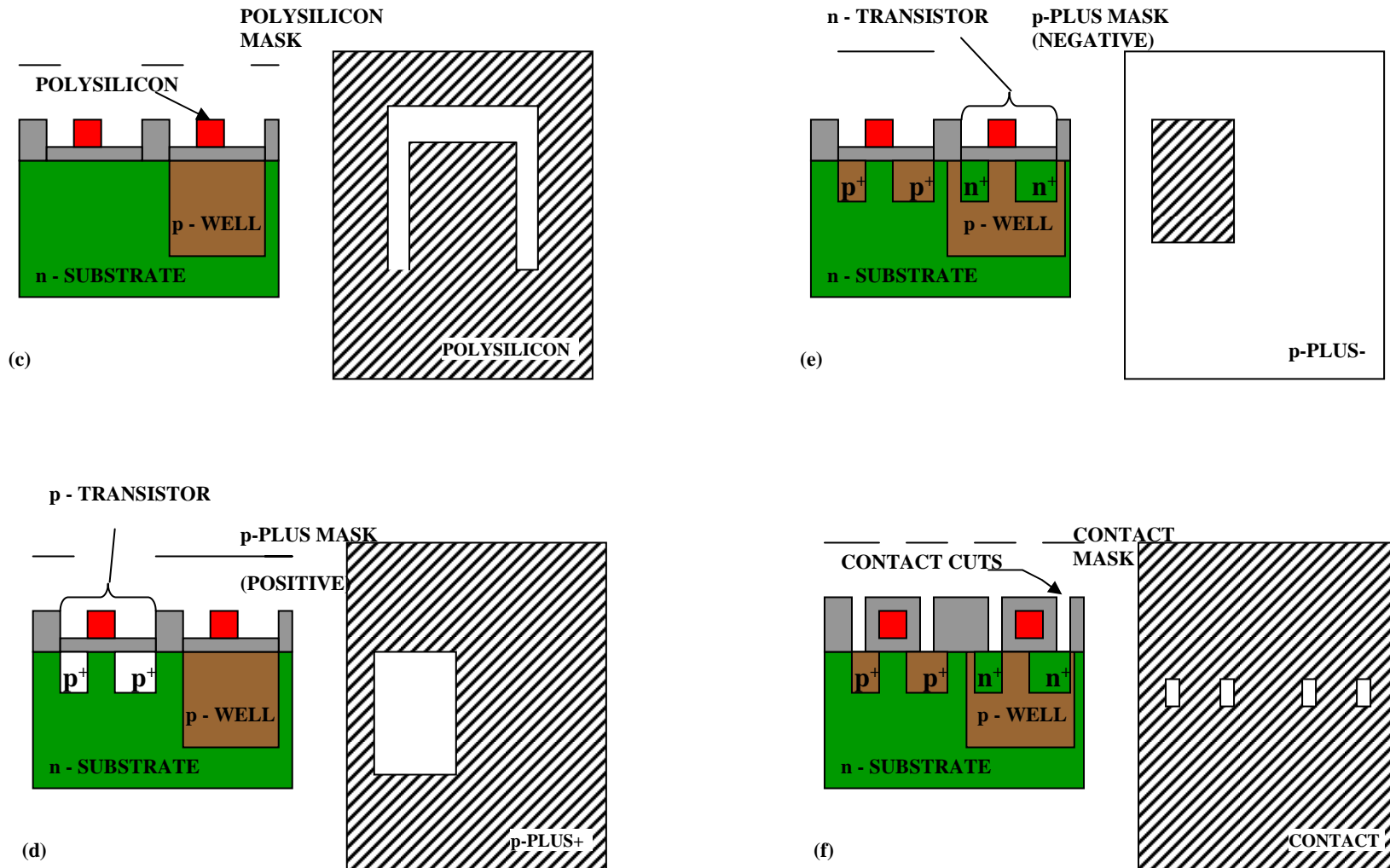


8.3 Entstehung eines CMOS-Inverters

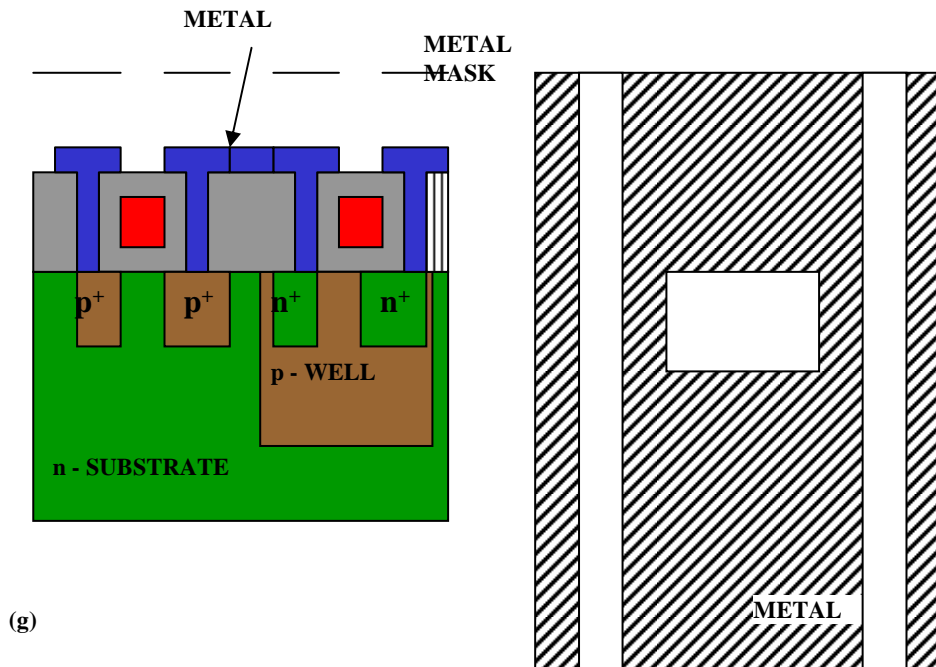
- Beim CMOS-Prozeß müssen negativ dotierte Flächen für nMOS-Transistoren geschaffen werden (p-Well, p-Wannen).



Entstehung eines CMOS-Inverters

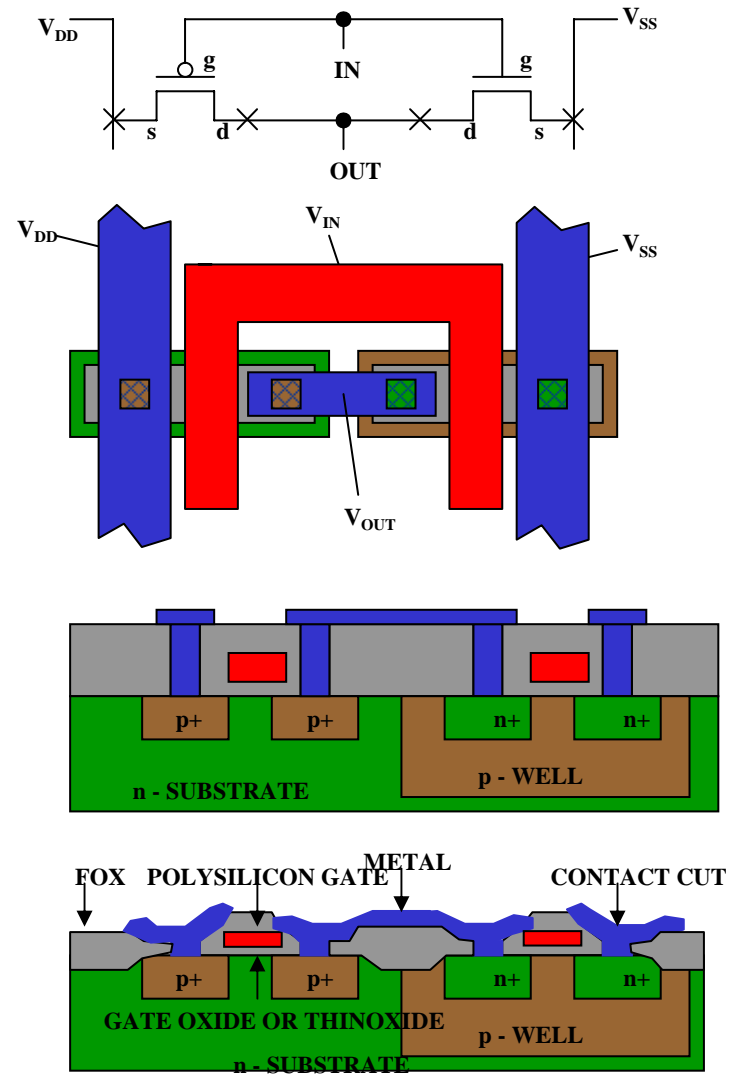


Entstehung eines CMOS-Inverters

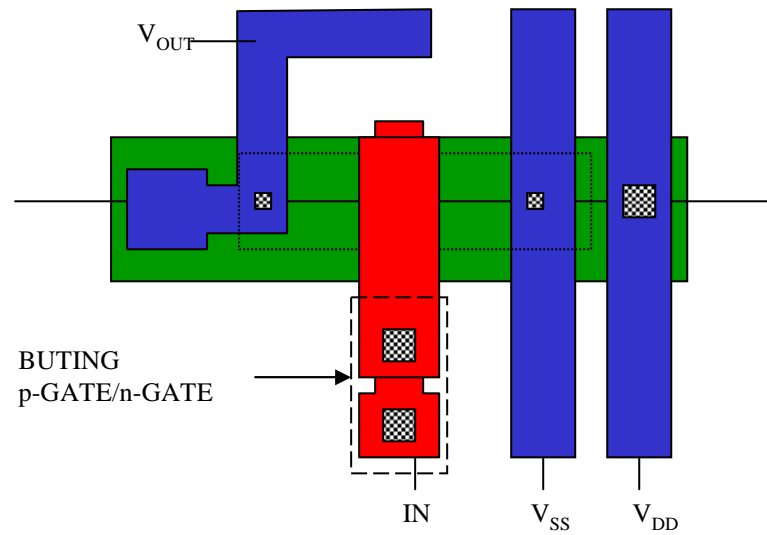
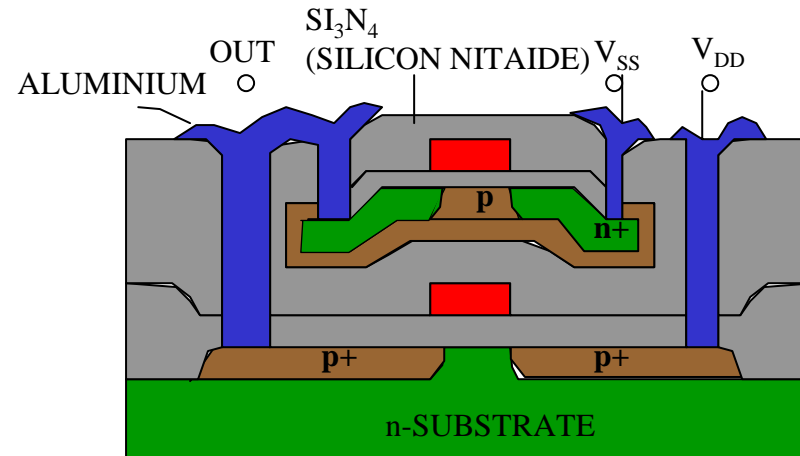


(g)

Zusammenhang zwischen Schaltplan und Realisierung



Moderne CMOS-Techniken: ein 3D-CMOS-Inverter



9 Schaltnetze

- **Entwurf und Realisierung digitaler Schaltnetze**
 - ⇒ **Formale Grundlagen**
 - ⇒ **Realisierung**
 - ⇒ **Entwurf**
 - ⇒ **Laufzeiteffekte**

9.1 Formale Grundlagen

○ George Boole (1815-1864)

⇒ Algebra der Logik (Boolesche Algebra)

**Definition: Eine Boolesche Algebra ist eine Menge $V = \{a, b, c, \dots\}$, auf der zwei zweistellige Operationen $+$ und \cdot so definiert sind, dass durch ihre Anwendung auf Elemente aus V wieder Elemente aus V entstehen (Abgeschlossenheit).
Es müssen die Huntingtonschen Axiome (HA1-HA4) gelten.**

$+$ heißt Boolesche Addition

\cdot heißt Boolesche Multiplikation

Huntingtonsche Axiome

○ Kommutativgesetze (HA1):

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

○ Distributivgesetze (HA2):

$$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$$

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

○ Neutrale Elemente (HA3):

Es existieren zwei Elemente $1, 0 \in V$, so dass gilt:

$$a \cdot 1 = a \quad (1 \text{ wird Einselement genannt})$$

$$a + 0 = a \quad (0 \text{ wird Nullelement genannt})$$

○ Inverse Elemente (HA4):

Für alle $a \in V$ gibt es ein \bar{a} , so dass gilt:

$$a \cdot \bar{a} = 0$$

$$a + \bar{a} = 1$$

Dualitätsprinzip

Satz: (Dualitätsprinzip):

Zu jeder aus (HA1) - (HA4) herleitbaren Formel existiert eine "duale" Formel, die ebenfalls gilt. Sie entsteht durch Vertauschung von „ \cdot “ mit „ $+$ “ und von 1 mit 0.

Beweis:

Die einzelnen Aussagen der Axiome (HA1) - (HA4) sind dual zueinander. Daher gibt es zu jeder Herleitung einer Formel F auch die duale Herleitung, deren Ergebnis die zu F duale Formel ist.

Schreibweise: Im folgenden sei \bar{a} gleich a'

Weitere Sätze

Satz:

$$\forall a \in M: a \cdot 0 = 0$$

$$\forall a \in M: a + 1 = 1$$

Beweis:

Es genügt zu zeigen: $a+1 = 1$.

Nach dem Dualitätsprinzip ist dann auch $a \cdot 0 = 0$ bewiesen.

$$\begin{aligned} 1 &= a' + a \\ &= (1 \cdot a') + a \\ &= (1 + a) \cdot (a' + a) \\ &= (1 + a) \cdot 1 \\ &= (a + 1) \end{aligned}$$

Weitere Sätze

Bemerkung:

Die Gesetze von Axiom (HA3) und dem vorherigen Satz bezeichnet man auch als **0-1-Gesetze**.

$$(N\cdot): \forall a \in M: a \cdot 1 = a, \quad a \cdot 0 = 0$$

$$(N+): \forall a \in M: a + 1 = 1, \quad a + 0 = a$$

Weitere Gesetze

- **Idempotenzgesetze:**

$$(I\cdot): \forall a \in M: a \cdot a = a$$

$$(I+): \forall a \in M: a + a = a$$

- **Assoziativgesetze:**

$$(A\cdot): \forall a, b, c \in M: a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

$$(A+): \forall a, b, c \in M: a + (b + c) = (a + b) + c$$

Weitere Sätze

- **De Morgansche Regeln:**

$$(M\cdot): \quad \forall a, b \in M: \quad (a \cdot b)' = a' + b'$$

$$(M+): \quad \forall a, b \in M: \quad (a + b)' = a' \cdot b'$$

- **Absorptionsgesetze:**

$$(Ab\cdot): \quad \forall a, b \in M: \quad a \cdot (a + b) = a$$

$$(Ab+): \quad \forall a, b \in M: \quad a + (a \cdot b) = a$$

- **Doppeltes Boolesches Komplement:**

$$(KK): \quad \forall a \in M: \quad a'' = a$$

- **Komplementarität der neutralen Elemente:**

$$(K0): \quad 0' = 1$$

$$(K1): \quad 1' = 0$$

(Folgerung: Eindeutigkeit der neutralen Elemente)

Weitere Sätze

Wir vereinbaren folgende **Vorrangregeln**
(zur Abkürzung der Schreibweise)

- $()$ vor $'$ vor \cdot vor $+$
- Bei Hintereinanderausführung gleicher Verknüpfungen wird von links nach rechts abgearbeitet
- \cdot kann weggelassen werden, wenn keine Verwechslung mit anderen Variablen möglich sind, d.h. $ab = a \cdot b$

Beispiel:

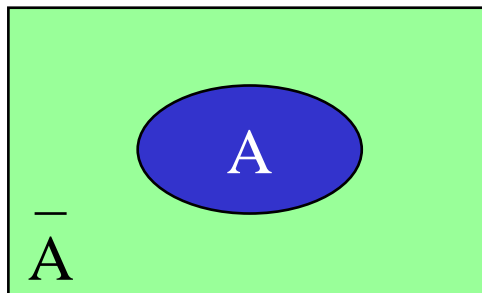
$$a + (b \cdot c) = a + b \cdot c = a + bc$$

$$(a \cdot b') + (c \cdot d)' = ab' + (cd)'$$

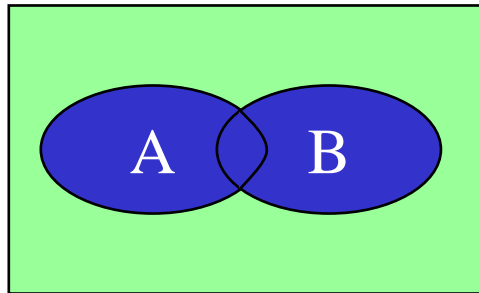
$$(a + b) \cdot (a + c) = (a + b)(a + c)$$

Beispiel: Mengenalgebra

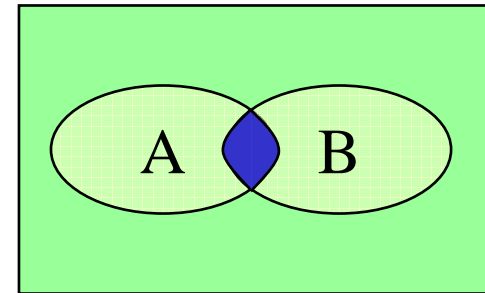
Boolesche Algebra	Mengenalgebra	
V	$P(T)$	Potenzmenge
$+$	\cup	Vereinigungsmenge
\cdot	\cap	Schnittmenge
0	\emptyset	leere Menge
1	T	Grundmenge
\bar{a}	\bar{A}	Komplement



Komplement



$A \cup B$



$A \cap B$

Beispiel: Mengenalgebra

○ Grundmenge

$$T = \{\text{Keyboard}, \text{Mouse}, \text{Laptop}\}$$

○ Potenzmenge

$$P(T) = \{\emptyset, \{\text{Keyboard}\}, \{\text{Mouse}\}, \{\text{Laptop}\}, \{\text{Keyboard}, \text{Mouse}\}, \{\text{Keyboard}, \text{Laptop}\}, \{\text{Mouse}, \text{Laptop}\}, \{\text{Keyboard}, \text{Mouse}, \text{Laptop}\}\}$$

○ Für alle $A, B, C \in P(T)$ gilt:

⇒ **Abgeschlossenheit**

$$A \cup B \in P(T)$$

$$A \cap B \in P(T)$$

⇒ **Kommutativgesetze**

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

⇒ **Distributivgesetze**

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

⇒ **Neutrale Elemente**

$$A \cap T = A$$

$$A \cup \emptyset = A$$

⇒ **Inverse Elemente**

$$A \cap A^c \equiv \emptyset$$

$$A \cup A^c \equiv T$$

Schaltalgebra

- **Boolesche Algebra bei der die folgende Zuordnungstabelle gilt:**

Boolesche Algebra	Schaltalgebra	
V	$B = \{0, 1\}$	Boolesche Grundmenge
$+$	\vee	Oder
\cdot	\wedge	Und
0	0	neutrales Element
1	1	Einselement
\overline{a}	$\overline{x_i}$	Negation

- **Andere Schreibweisen**

- ⇒ **Oder:** $x_1 + x_2, x_1 \mid x_2$
- ⇒ **Und:** $x_1 \bullet x_2, x_1 \ast x_2, x_1 \cdot x_2, x_1 \& x_2, x_1 x_2$
- ⇒ **Negation:** $/x_1, 'x_1, \neg x_1$

Funktionstabellen

- Aus den Huntington'schen Axiomen lassen sich die Funktionstabellen der in der Algebra definierten Verknüpfungen ableiten

Oder

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Und

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Nicht

x_1	\bar{x}_1
0	1
1	0

Boolescher Ausdruck

Definition: (Boolescher Term, Boolescher Ausdruck)

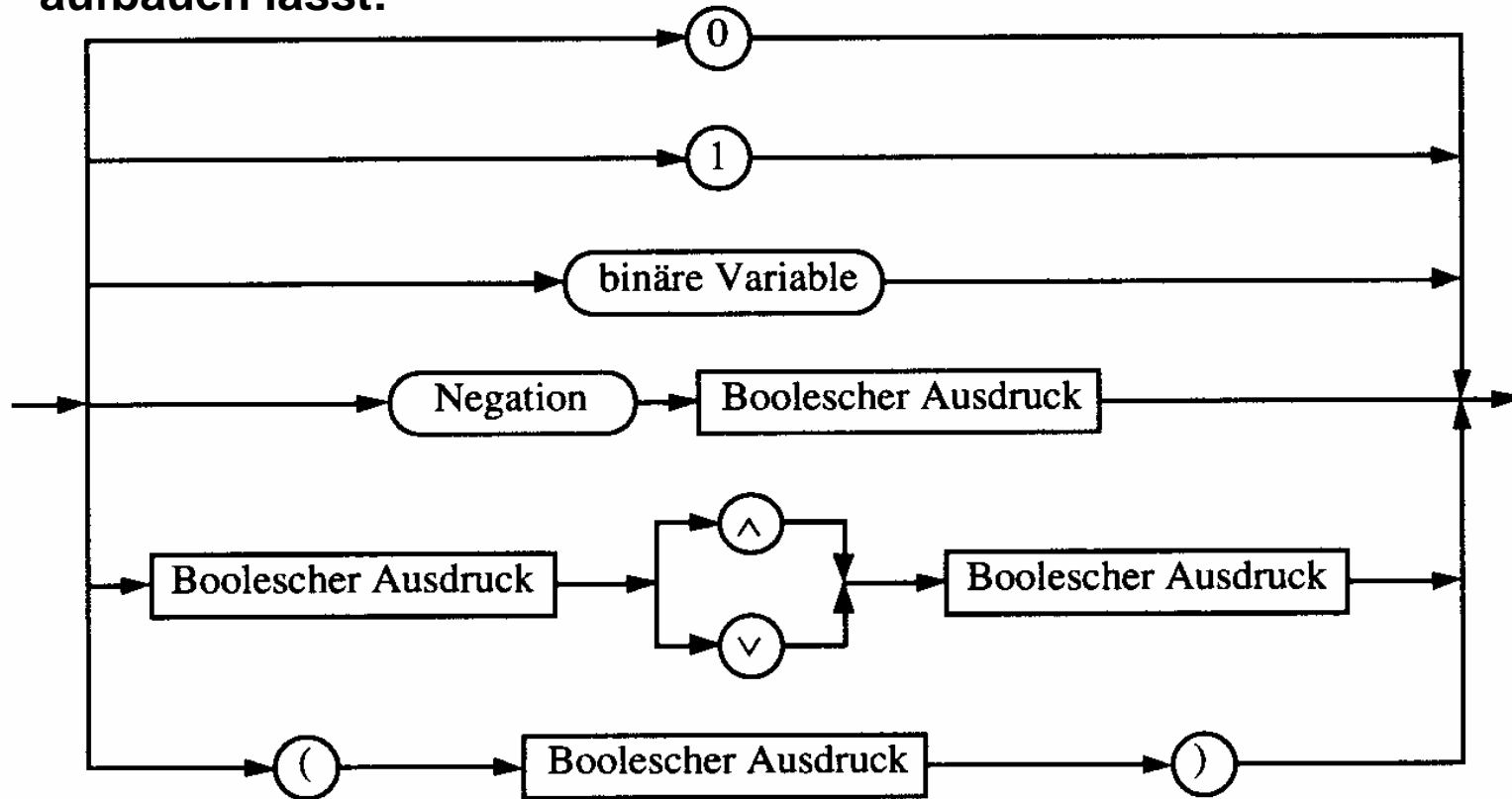
Sei $V = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ eine Menge Boolescher Variablen,

$S = \{0, 1, \wedge, \vee, ', (,)\}$ eine Menge von Symbolen und $V \cap S = \emptyset$.

- (1) Die Konstanten 0 und 1 und jede Variable a_i ist ein Boolescher Term.
- (2) Sind A und B Boolesche Terme, so auch A' , $(A \wedge B)$, und $(A \vee B)$.
- (3) Nur Zeichenreihen, die sich mit (1) und (2) in endlich viele Schritten konstruieren lassen, sowie deren „Abkürzungen“ sind Boolesche Terme

Boolescher Ausdruck

- Zeichenfolge, die aus binären Variablen, den Operatoren \wedge , \vee und Klammern besteht und sich aus folgenden syntaktischen Regeln aufbauen lässt:



Beachte: Es gibt bei einer Definition durch diese Darstellung einen kleinen Unterschied zur vorherigen Definition

Boolescher Ausdruck

- **Boolesche Ausdrücke sind nur eine syntaktische Konstruktion**
 - ⇒ Bedeutung erhält ein Boolescher Ausdruck erst, wenn den Konstanten 0 und 1 die Wahrheitswerte „falsch“ oder „wahr“ zugeordnet werden
- **Interpretation**
 - ⇒ Belegung der binären Variablen eines Booleschen Ausdrucks mit Wahrheitswerten liefert eine Aussage, die entweder „wahr“ oder „falsch“ sein kann
- **Tautologie**
 - ⇒ Boolescher Ausdruck, bei dem alle Belegungen der binären Variablen den Wahrheitswert „wahr“ liefern
 - ⇒ $(x_1 \vee x_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2)$
 - ⇒ Anwendung: Verifikation von Schaltungen

Boolesche Funktion

Def. 9.2: Es sei ein n -Tupel von binären Variablen (x_1, x_2, \dots, x_n) gegeben. Eine n -stellige Boolesche Funktion ordnet jeder Belegung der Variablen x_1, x_2, \dots, x_n mit den Wahrheitswerten „wahr“ oder „falsch“ genau einen Wahrheitswert zu.

$$f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\} \quad \text{oder} \quad f : B^n \rightarrow B$$

Satz 9.1: Es gibt genau 2^n verschiedene Belegungen der Variablen einer n -stelligen Booleschen Funktion. Die Anzahl verschiedener n -stelliger Boolescher Funktionen beträgt $2^{(2^n)}$

Bew: Über Funktionstabelle

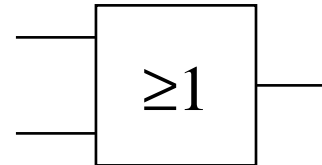
Übersicht der 2-stelligen Booleschen Funktionen

Benennung der Verknüpfung	Funktionswert		Schreibweise mit den Zeichen $\wedge \vee -$	Bemerkung
	y	$= f(x_1, x_2)$		
	x_1	$= 0 1 0 1$		
	x_2	$= 0 0 1 1$		
Null	y_0	$= 0 0 0 0$	0	Null
UND-Verknüpfung	y_1	$= 0 0 0 1$	$x_1 \wedge x_2$	x_1 UND x_2
Inhibition	y_2	$= 0 0 1 0$	$\bar{x}_1 \wedge x_2$	
Transfer	y_3	$= 0 0 1 1$	x_2	
Inhibition	y_4	$= 0 1 0 0$	$x_1 \wedge \bar{x}_2$	
Transfer	y_5	$= 0 1 0 1$	x_1	
Antivalenz	y_6	$= 0 1 1 0$	$(x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2)$	Exklusiv-ODER
ODER-Verknüpfung	y_7	$= 0 1 1 1$	$x_1 \vee x_2$	x_1 ODER x_2
NOR-Verknüpfung	y_8	$= 1 0 0 0$	$\overline{x_1 \vee x_2}$	NICHT-ODER
Äquivalenz	y_9	$= 1 0 0 1$	$(x_1 \wedge x_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2)$	
Komplement	y_{10}	$= 1 0 1 0$	\bar{x}_1	
Implikation	y_{11}	$= 1 0 1 1$	$\bar{x}_1 \vee x_2$	
Komplement	y_{12}	$= 1 1 0 0$	\bar{x}_2	
Implikation	y_{13}	$= 1 1 0 1$	$x_1 \vee \bar{x}_2$	
NAND-Verknüpfung	y_{14}	$= 1 1 1 0$	$\overline{x_1 \wedge x_2}$	NICHT-UND
Eins	y_{15}	$= 1 1 1 1$	1	Eins

Darstellung einiger zweistelliger Funktionen

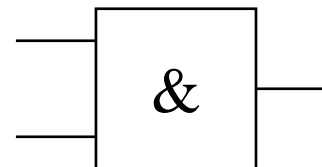
ODER

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



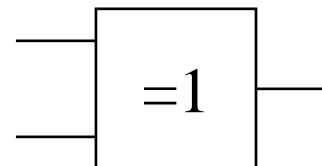
UND

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Exklusiv-Oder

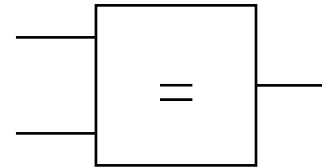
x_1	x_2	$x_1 \oplus x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



Darstellung einiger zweistelliger Funktionen

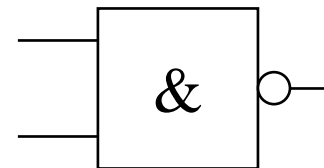
Äquivalenz

x_1	x_2	$x_1 \equiv x_2$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



NAND

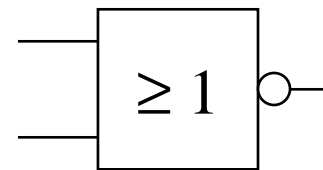
x_1	x_2	$x_1 \overline{\wedge} x_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



$$\text{NAND}(a, b) = \neg(a \wedge b) =: a | b$$

NOR

x_1	x_2	$x_1 \overline{\vee} x_2$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



$$\text{NOR}(a, b) = \neg(a \vee b) =: a \downarrow b.$$

Operatorensysteme

Def. 9.3: Eine Menge von Operatoren (Operatorensystem) heißt **vollständig** für eine Menge F von Funktionen, wenn sich jede Funktion in F durch die Operatoren darstellen lässt

Klar ist bereits, dass $\{\wedge, \vee, \neg\}$ ein vollständiges Operatorensystem für zweistellige Boolesche Funktionen ist.

Satz: $\{\wedge, \neg\}$ und $\{\vee, \neg\}$ sind vollständige Operatorensysteme für zweistellige Boolesche Funktionen.

Beweis:

Rückführung von $\{\wedge, \vee, \neg\}$ auf $\{\wedge, \neg\}$:

„ \vee “:
$$a \vee b = \neg(\neg(a \vee b)) = \neg((\neg a \wedge \neg b))$$

Entsprechend zeigt man, dass $\{\vee, \neg\}$ ein vollständiges Operatorensystem ist.

Operatorensysteme

Satz: $\{\downarrow\}$ und $\{\mid\}$ sind vollständige Operatorensysteme für zweistellige Boolesche Funktionen.

Beweis:

(i) Rückführung von $\{\vee, \neg\}$ auf $\{\downarrow\}$:

„ \neg “: $a = a \vee a \Rightarrow \neg a = \neg(a \vee a) = a \downarrow a = \text{NOR}(a, a)$

„ \vee “:
$$\begin{aligned} a \vee b &= (a \vee b) \wedge (a \vee b) = \neg(\neg((a \vee b) \wedge (a \vee b))) \\ &= \neg((\neg(a \vee b)) \vee (\neg(a \vee b))) = \neg((a \downarrow b) \vee (a \downarrow b)) \\ &= (a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow b) \\ &= \text{NOR}(\text{NOR}(a, b), \text{NOR}(a, b)) \end{aligned}$$

Operatorensysteme

(ii) Rückführung von $\{\vee, \neg\}$ auf $\{\mid\}$:

„ \neg “: $a = a \wedge a \Rightarrow \neg a = \neg(a \wedge a) = a \mid a = \text{NAND}(a, a)$

„ \vee “: $a \vee b = (a \wedge a) \vee (b \wedge b) = \neg(\neg((a \wedge a) \vee (b \wedge b)))$
 $= \neg((\neg(a \vee a)) \wedge (\neg(b \vee b))) = \neg((a \mid a) \wedge (b \mid b))$
 $= (a \mid b) \mid (a \mid b)$
 $= \text{NAND}(\text{NAND}(a, a), \text{NAND}(b, b))$

Operatorensysteme

Beispiele für vollständige Mengen von Operatoren für zweistellige Boolesche Funktionen:

Operatorensystem	Negation	Konjunktion	Disjunktion
$(\wedge, \vee, \bar{})$	\bar{x}_1	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$
$(\wedge, \bar{})$	\bar{x}_1	$x_1 \wedge x_2$	$\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2$
$(\vee, \bar{})$	\bar{x}_1	$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$	$x_1 \vee x_2$
(\wedge)	$x_1 \wedge x_1$	$(x_1 \wedge x_2) \wedge (x_1 \wedge x_2)$	$(x_1 \wedge x_1) \wedge (x_2 \wedge x_2)$
(\vee)	$x_1 \vee x_1$	$(x_1 \vee x_1) \vee (x_2 \vee x_2)$	$(x_1 \vee x_2) \vee (x_1 \vee x_2)$
(\wedge, \oplus)	$x_1 \oplus 1$	$x_1 \wedge x_2$	$(x_1 \wedge x_2) \oplus (x_1 \oplus x_2)$
(\vee, \equiv)	$x_1 \equiv 0$	$(x_1 \vee x_2) \equiv x_1 \equiv x_2$	$x_1 \vee x_2$

Dabei ist \equiv die Äquivalenzfunktion

Auswertung

- Zum Wahrheitswert einer Aussage gelangt man durch rekursives Auswerten der Booleschen Funktionen in einem Ausdruck
- Beispiel: Ist die folgende Funktion eine Tautologie?

$$f(x_1, x_2) = (x_1 \wedge x_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2) \equiv (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2)$$

9.2 Normalformen

- **Eine Funktion kann durch verschiedene Boolesche Ausdrücke beschrieben werden**
 - ⇒ Auch bei Beschränkung auf ein minimales vollständiges Operatorensystem ergeben sich noch mehrere Darstellungsmöglichkeiten
- **Normalformen bilden eine Standarddarstellung in einem vollständigen Operatorensystem**
 - ⇒ Disjunktive Normalform
 - ⇒ Konjunktive Normalform
- **Es gibt weitere Normalformen, die in dieser Vorlesung nicht behandelt werden**
 - ⇒ Reed-Muller-Form
 - ⇒ Äquivalenzpolynom

Literal und Produktterm

Def. 9.4: Ein Literal L_i ist entweder eine Variable x_i oder ihre Negation \bar{x}_i . $L_i \in \{x_i, \bar{x}_i\}$

Def. 9.5: Ein Produktterm $K(x_1, \dots, x_m)$ ist die Konjunktion von Literalen oder den Konstanten 0 oder 1:

$$\bigwedge_{i=1}^m L_i = L_1 \wedge \dots \wedge L_m$$

○ Jeder Produktterm $K(x_1, \dots, x_m)$ kann so dargestellt werden, dass eine Variable x in höchstens einem Literal vorkommt.

⇒ Falls $L_j = x$ und $L_k = x$ ist, gilt $L_j \wedge L_k = x$

⇒ Falls $L_j = \bar{x}$ und $L_k = \bar{x}$ ist, gilt $L_j \wedge L_k = \bar{x}$

⇒ Falls $L_j = x$ und $L_k = \bar{x}$ ist, gilt $L_j \wedge L_k = 0$

Implikant und Minterm

Def. 9.6: Ein Produktterm $K(x_1, \dots, x_m)$ heißt Implikant einer Booleschen Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$, wenn aus $K(x_1, \dots, x_m)=1$ für eine Belegung $x_1, \dots, x_m \in B^n$ folgt, dass $f(x_1, \dots, x_n)=1$.

Def. 9.7: Ein Implikant $K(x_1, \dots, x_n)$ heißt Minterm (m), wenn ein Literal jeder Variablen x_i der Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ genau einmal in K vorkommt.

- Implikanten beschreiben ein oder mehrere 1-Stellen der Funktion
 - ⇒ Implikanten können sich überdecken (d.h. gleiche 1-Stellen besitzen)
- Ein Minterm ist genau bei einer Belegung der Variablen gleich 1
 - ⇒ Ein Minterm „trägt zu genau einer 1-Stelle der Funktion bei“
 - ⇒ Minterme einer Funktion überdecken sich nicht

Mintermtabelle

Satz 9.2: Zu einer Booleschen Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ mit n Literalen gibt es maximal 2^n verschiedene Minterme m_i .

Bew: Durch Aufzählung aller Kombinationen und Induktion über n .

- Man definiert eine Reihenfolge aller Minterme über den Index i

Beispiel:

i_{10}	i_2	Minterm m_i
0	000	$\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_0$
1	001	$\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_0$
2	010	$\bar{x}_2 \wedge x_1 \wedge \bar{x}_0$
3	011	$\bar{x}_2 \wedge x_1 \wedge x_0$
4	100	$x_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_0$
5	101	$x_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_0$
6	110	$x_2 \wedge x_1 \wedge \bar{x}_0$
7	111	$x_2 \wedge x_1 \wedge x_0$

Disjunktive Normalform

Def. 9.8: Es sei eine Boolesche Funktion $f(x_1, \dots, x_n): B^n \rightarrow B$ gegeben. Ein Boolescher Ausdruck heißt disjunktive Normalform (DNF) der Funktion f , wenn er aus einer disjunktiven Verknüpfung von Mintermen K_i besteht.

$$f(x_1, \dots, x_n) = K_0 \vee K_1 \vee \dots \vee K_k \text{ mit } 0 \leq k \leq 2^n - 1$$

$$= \bigvee_0^{2^n - 1} \alpha_i \wedge m_i \text{ mit } \alpha_i \in \{0, 1\}$$

○ α_i heißt **Mintermkoeffizient**

⇒ $\alpha_i = 1$, wenn der Minterm m_i zu f gehört,

⇒ $\alpha_i = 0$, sonst

○ **Beispiele**

$f(x_2, x_1, x_0) = x_2 x_1 x_0 \vee x_2 \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_2 x_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0$ **ist eine DNF**

$f(x_2, x_1, x_0) = x_2 x_1 x_0 \vee x_2 \bar{x}_1 \vee x_1 (x_2 x_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_0)$ **ist keine DNF**

Disjunktion und Maxterm

Def. 9.9: Es sei $D(x_1, \dots, x_m)$ eine Disjunktion von Literalen, wobei die Konstanten 0 und 1 auftreten dürfen. $D(x_1, \dots, x_m)$ heißt Implikat einer Booleschen Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$, wenn aus $D(x_1, \dots, x_m)=0$ für eine Belegung $x_1, \dots, x_n \in B^n$ folgt, dass $f(x_1, \dots, x_n)=0$.

Def. 9.10: Ein Implikat $D(x_1, \dots, x_n)$ heißt Maxterm (M), wenn ein Literal jeder Variablen x_i der Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ genau einmal in D vorkommt.

- Implikate beschreiben ein oder mehrere Nullstellen der Funktion
 - ⇒ mehrere Implikaten können sich überdecken

- Ein Maxterm ist genau bei einer Belegung der Variablen gleich 0
 - ⇒ Ein Maxterm „trägt zu genau einer Nullstelle der Funktion bei“
 - ⇒ Die Maxterme einer Funktion können sich in den 1-Stellen überdecken

Min- und Maxtermtabelle

Satz 9.3: Zu einer Booleschen Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ mit n Literalen gibt es maximal 2^n verschiedene Maxterme M_i .

Bew: Durch Aufzählung aller Kombinationen und Induktion über n

- Man definiert eine Reihenfolge aller Maxterme über den Index i analog zu den Mintermen

i_{10}	i_2	Minterm m_i	Maxterm M_i
0	000	$\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_0$	$x_2 \vee x_1 \vee x_0$
1	001	$\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_0$	$x_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0$
2	010	$\bar{x}_2 \wedge x_1 \wedge \bar{x}_0$	$x_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0$
3	011	$\bar{x}_2 \wedge x_1 \wedge x_0$	$x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0$
4	100	$x_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_0$	$\bar{x}_2 \vee x_1 \vee x_0$
5	101	$x_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_0$	$\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0$
6	110	$x_2 \wedge x_1 \wedge \bar{x}_0$	$\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0$
7	111	$x_2 \wedge x_1 \wedge x_0$	$\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0$

Konjunktive Normalform

Def. 9.11: Es sei eine Boolesche Funktion $f(x_1, \dots, x_n): B^n \rightarrow B$ gegeben. Ein Boolescher Ausdruck heißt **Konjunktive Normalform (KNF)** der Funktion f , wenn er aus einer konjunktiven Verknüpfung von Maxtermen D_i besteht.

$$f(x_1, \dots, x_n) = D_0 \wedge D_1 \wedge \dots \wedge D_k \text{ mit } 0 \leq k \leq 2^n - 1$$
$$= \bigwedge_0^{2^n - 1} (\beta_i \vee M_i) \text{ mit } \beta_i \in \{0, 1\}$$

○ β_i heißt **Maxtermkoeffizient**

⇒ $\beta_i = 0$, wenn der Maxterm M_i zu f gehört,

⇒ $\beta_i = 1$, sonst

○ **Beispiel**

$f(x_2, x_1, x_0) = (x_2 \vee x_1 \vee x_0) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0)$ ist eine **KNF**

KNF-DNF Umwandlung

Satz 9.4: Für jede Boolesche Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ gilt $\alpha_i = \beta_i$.

Bew: (Skizze) 2 Fälle

⇒ **Fall 1:** $\alpha_i = 1$

⇒ m_i gehört zur DNF der Funktion f

⇒ M_i gehört nicht zur KNF der Funktion f

⇒ $\beta_i = 1$

⇒ **Fall 2:** $\alpha_i = 0$

⇒ m_i gehört nicht zur DNF der Funktion f

⇒ M_i gehört zur KNF der Funktion f

⇒ $\beta_i = 0$

Zusammenfassung der wichtigsten Begriffe

- **Literal:** Boolesche Variable oder deren Negation
- **Produktterm:** UND-Verknüpfung von Literalen
- **Implikant:** Produktterm, der eine oder mehrere „1“-Stellen einer Booleschen Funktion beschreibt (impliziert)
- **Implikat:** Disjunktion (ODER-Verknüpfung) von Literalen, die ein oder mehrere „0“-Stellen einer Booleschen Funktion beschreibt
- **Minterm:** Implikant, der genau eine „1“-Stelle einer booleschen Funktion beschreibt
- **Maxterm:** Implikat, das genau eine „0“-Stelle einer Booleschen Funktion beschreibt
- **Normalform:** Darstellung einer Booleschen Funktion durch Minterme (DNF) oder Maxterme (KNF)

9.3 Der Shannonsche Entwicklungssatz

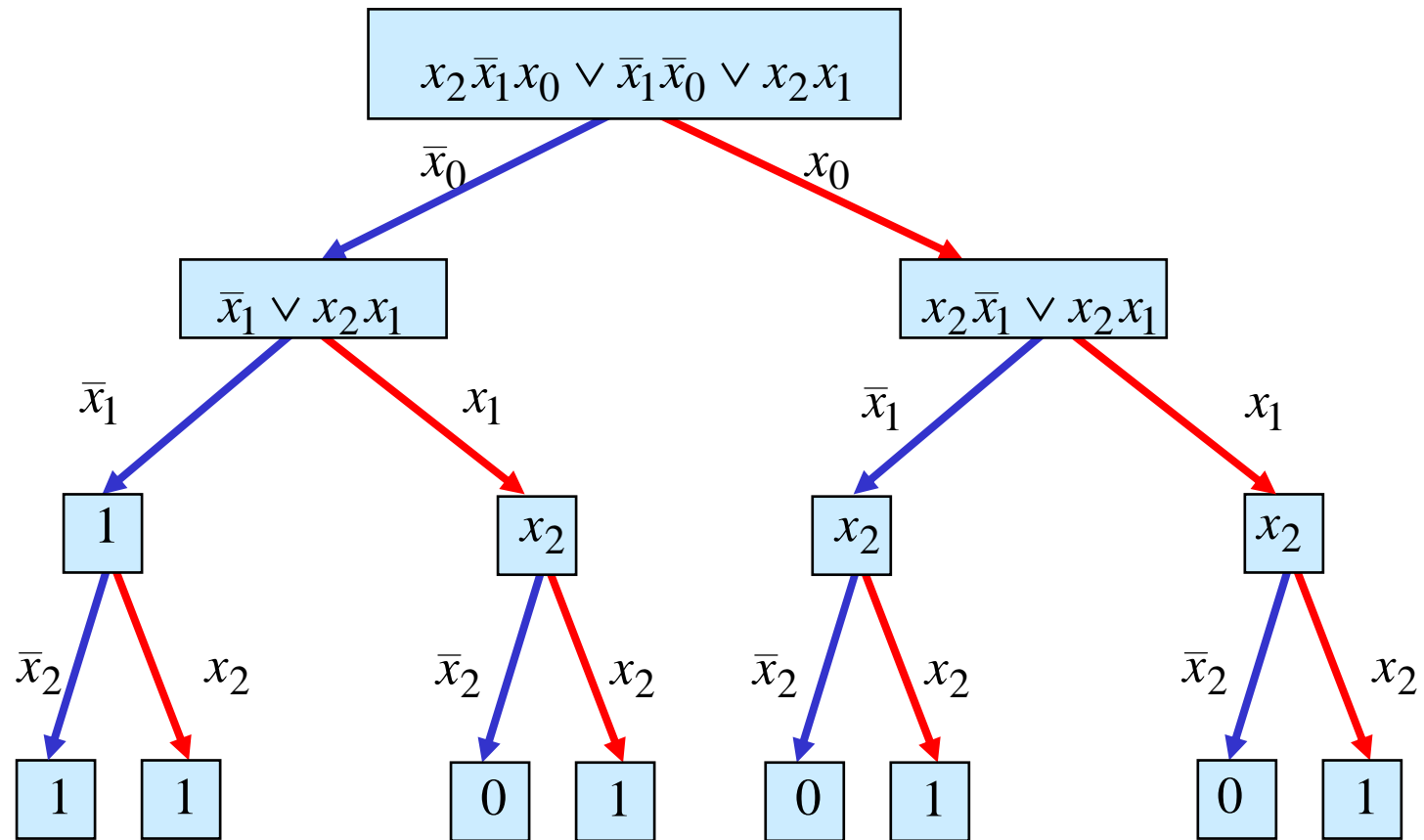
- DNF und KNF können durch einfache logische Umformungen in gewöhnliche disjunktive und konjunktive Formen gebracht werden
 - ⇒ DF und KF
- Zur Berechnung der Normalformen ist der Shannonsche Entwicklungssatz hilfreich

Satz 9.5: Für jede Boolesche Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ gilt

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_i \wedge f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)) \vee (\bar{x}_i \wedge f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n))$$

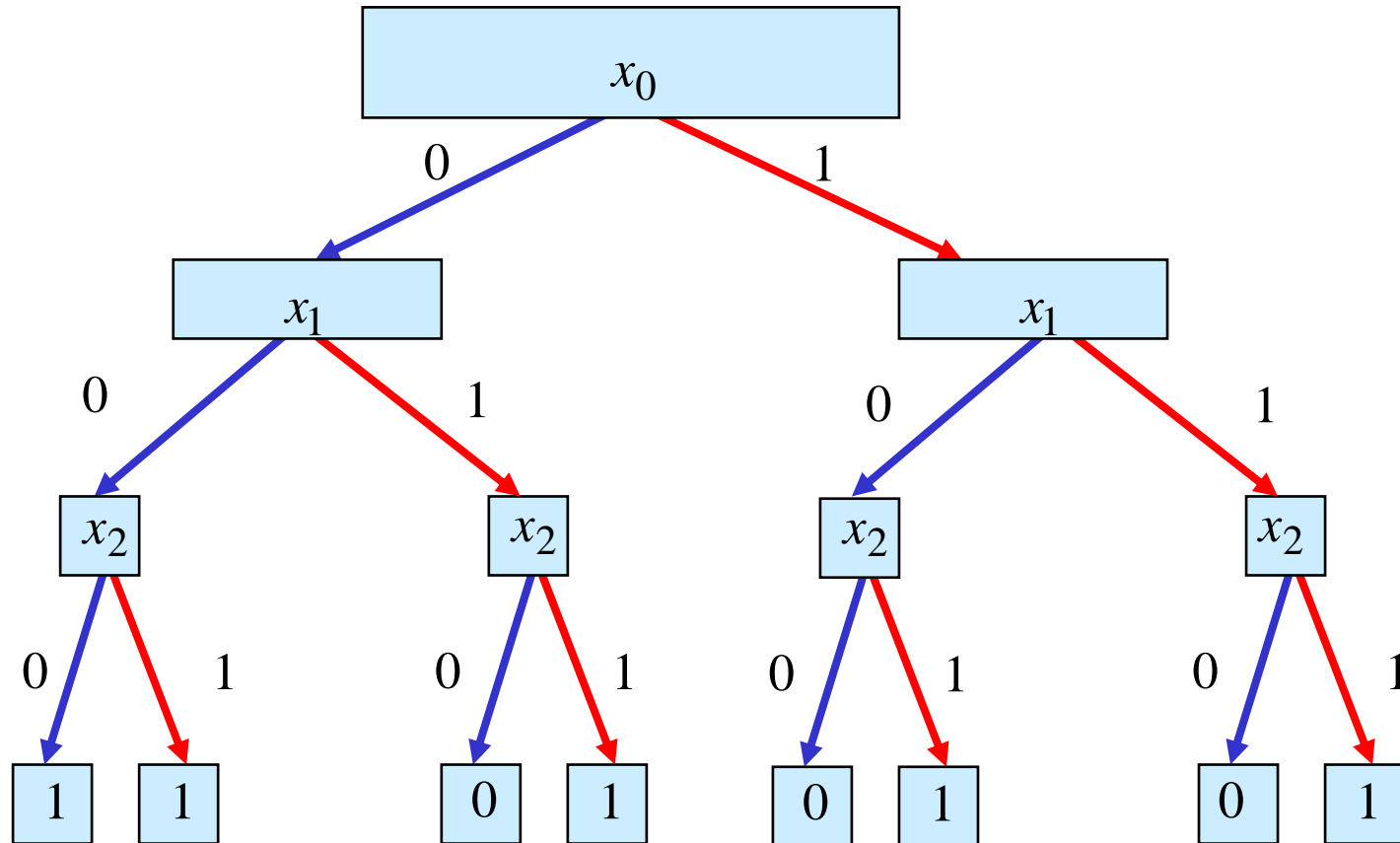
- **Beispiel:**
$$\begin{aligned} f(x_2, x_1, x_0) &= x_2 \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee x_2 x_1 \\ &= x_0 (x_2 \bar{x}_1 \vee x_2 x_1) \vee \bar{x}_0 (\bar{x}_1 \vee x_2 x_1) \\ &= x_2 \bar{x}_1 x_0 \vee x_2 x_1 x_0 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee x_2 x_1 \bar{x}_0 \\ &= x_2 (\bar{x}_1 x_0 \vee x_1 x_0 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee x_1 \bar{x}_0) \vee \bar{x}_2 (\bar{x}_1 \bar{x}_0) \\ &= x_2 x_1 x_0 \vee x_2 \bar{x}_1 x_0 \vee x_2 x_1 \bar{x}_0 \vee x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \end{aligned}$$

Baumdarstellung



Binary Decision Diagram (BDD)

- **Binary Decision Diagram (BDD):** Andere Interpretation der Shannon-Entwicklung

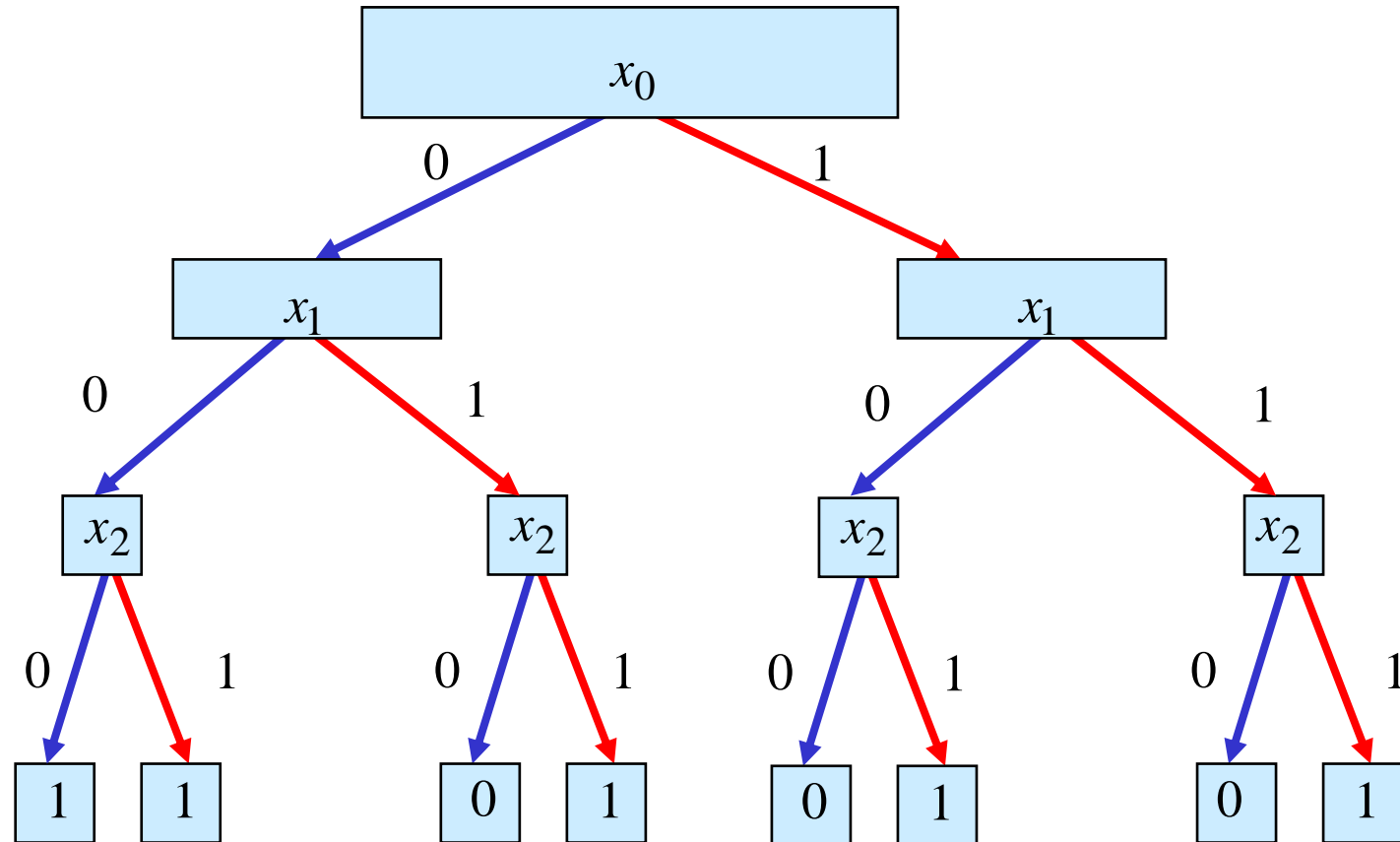


Reduzierte Baumdarstellungen

- Da die Variablen in allen Pfaden in der gleichen Reihenfolge auftauchen, spricht man auch von einem **ordered BDD (OBDD)**
- Ein BDD benötigt $2^n - 1$ innere Knoten bei n Variablen
- Regeln zur **Vereinfachung**:
 - ⇒ Knoten, deren Nachfolger gleich sind, können eliminiert werden (**Regel 1**)
 - ⇒ Teile des Baumes, die genau so noch einmal vorkommen, können gemeinsam genutzt werden (**Regel 2**)
- Es entsteht ein bezüglich einer gegebenen Ordnung der Variablen eindeutiges reduziertes OBDD
 - ⇒ **reduced ordered BDD (ROBDD)**

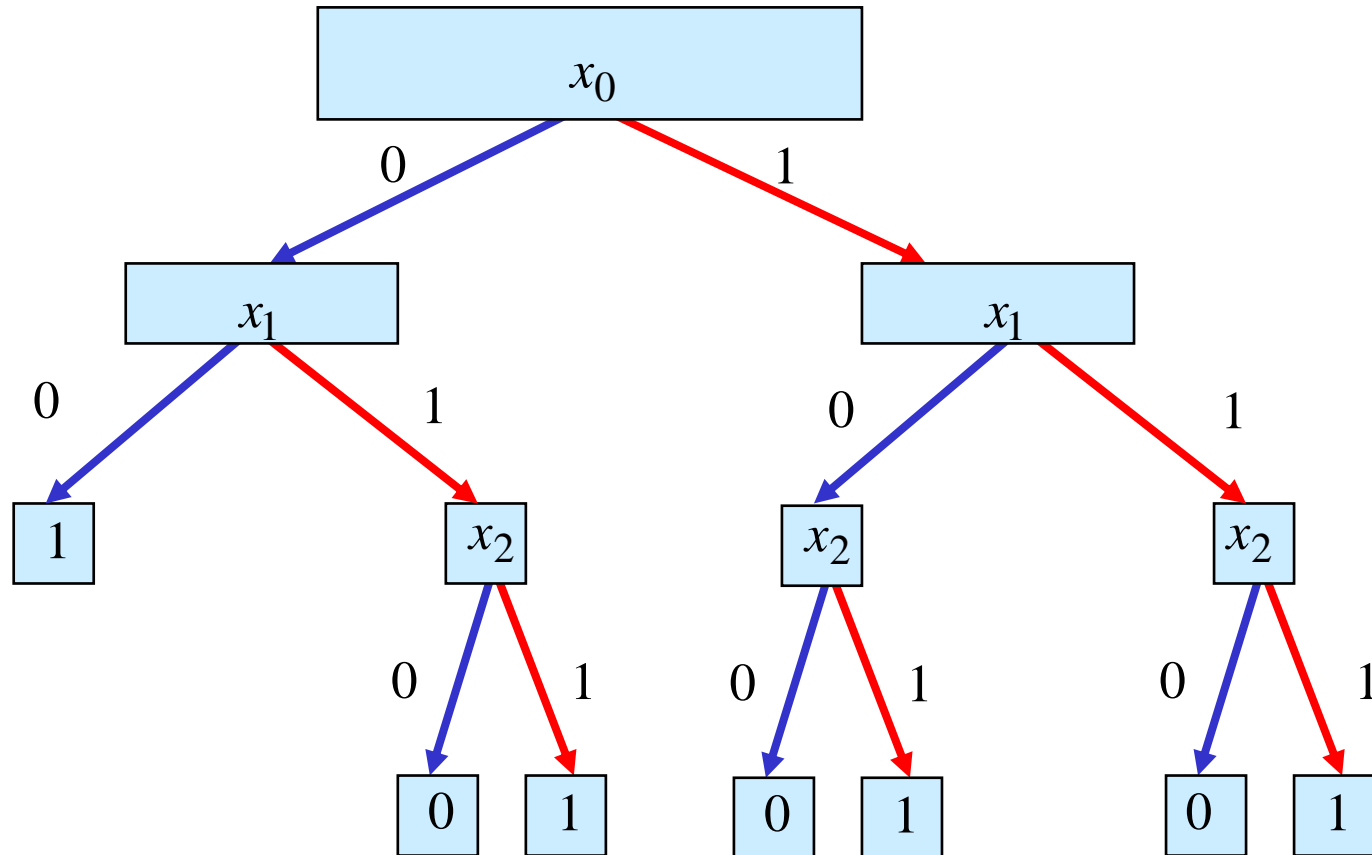
Reduced Ordered BDD (ROBDD)

Ausgangsgraph



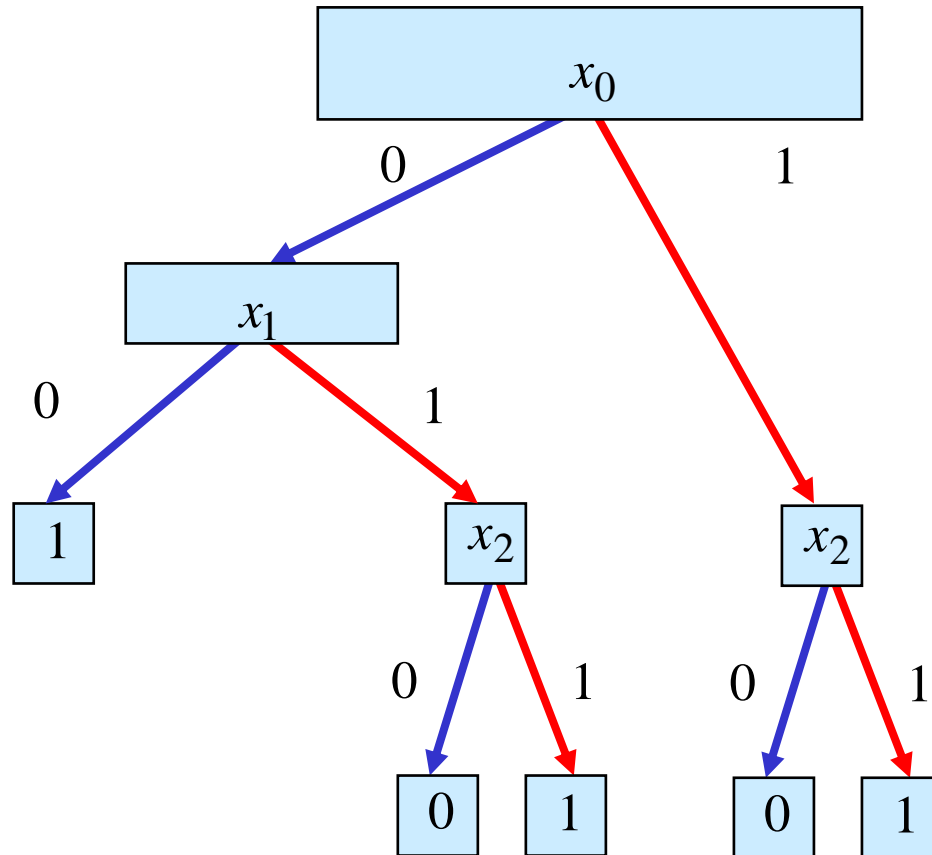
Reduced Ordered BDD (ROBDD)

Regel 1



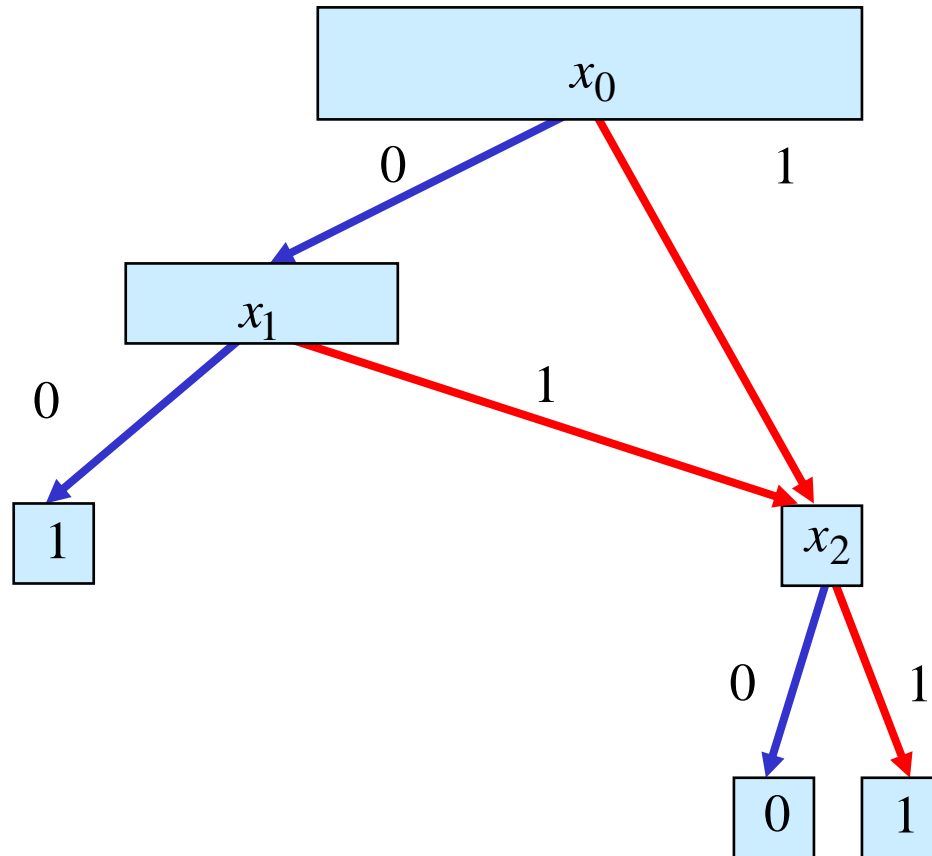
Reduced Ordered BDD (ROBDD)

Regel 1



Reduced Ordered BDD (ROBDD)

Regel 2



Ordered BDD (OBDD)

Formale Definition: Ein OBDD ist ein Digraph $G(V, E)$ mit genau einem Wurzelknoten (Knoten ohne Vorgänger). Jeder Nichtterminalknoten v hat als Attribut einen Index $\text{index}(v)$ in $\{1, 2, \dots, n\}$, der auf eine Eingangsvariable der Menge $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ verweist, und zwei unmittelbare Nachfolger $\text{low}(v)$, $\text{high}(v)$ in V . Ein Terminalknoten (Knoten ohne Nachfolger) hat als Attribut einen Wert $\text{value}(v)$ in $\{0, 1\}$.

Für ein beliebiges Paar von Nichtterminalknoten der Form $\{v, \text{low}(v)\}$ bzw. $\{v, \text{high}(v)\}$ gilt:

$$\text{index}(v) < \text{index}(\text{low}(v)) \text{ bzw. } \text{index}(v) < \text{index}(\text{high}(v))$$

Ein OBDD mit Wurzelknoten v definiert eine Boolesche Funktion f^v rekursiv durch:

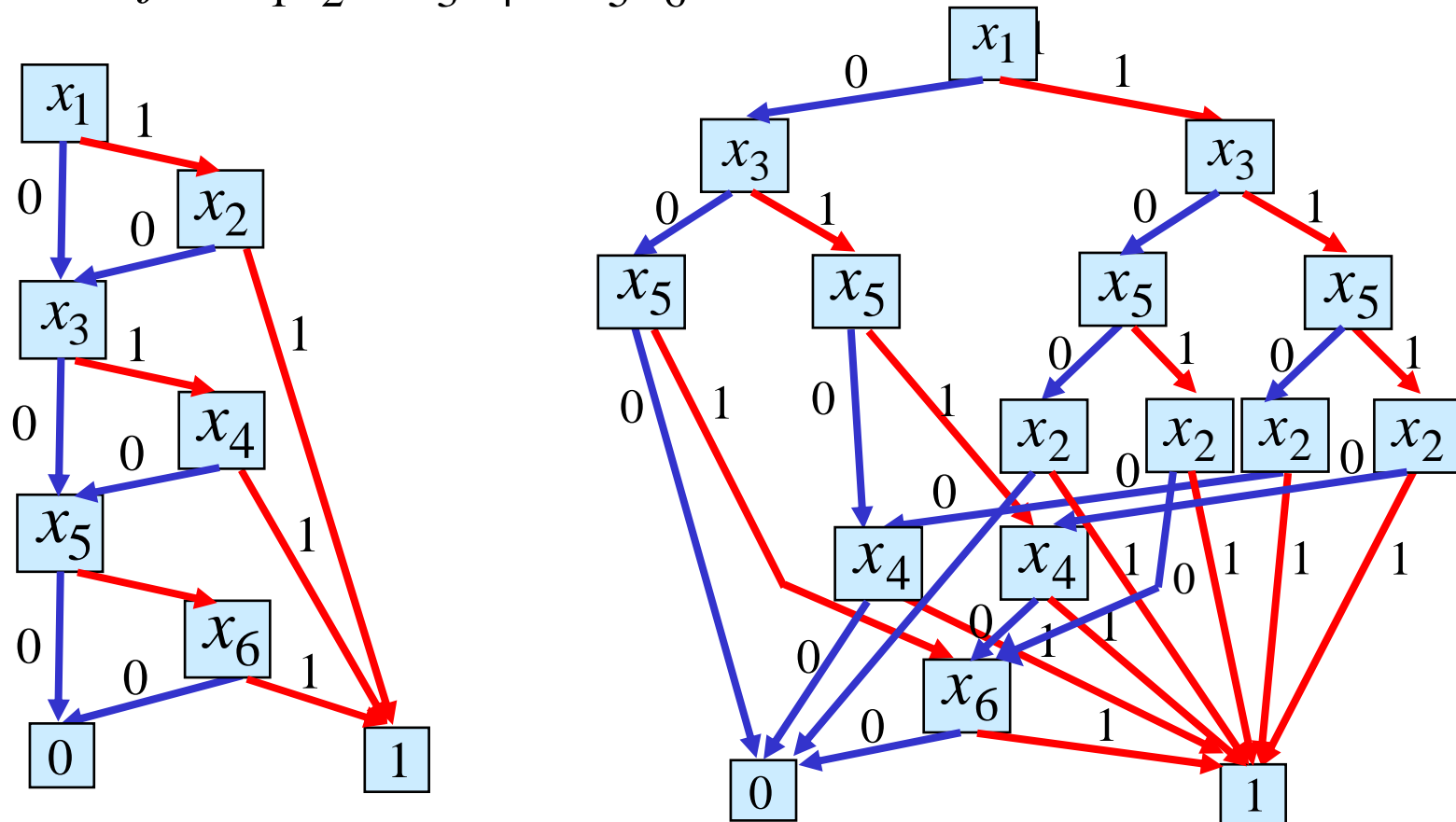
- i) wenn v ein Terminalknoten mit $\text{value}(v) = 1$ ist, dann $f^v = 1$.
- ii) wenn v ein Terminalknoten mit $\text{value}(v) = 0$ ist, dann $f^v = 0$.
- iii) wenn v ein Nichtterminalknoten ist und $\text{index}(v) = i$, dann

$$f^v = \overline{x_i} \times f^{\text{low}(v)} + x_i \times f^{\text{high}(v)}$$

Reduced Ordered BDD (ROBDD)

Die Anzahl der Knoten eines ROBDDs hängt stark von der Reihenfolge der Variablen ab

Beispiel: $f = x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6$



Reduced Ordered BDD (ROBDD)

Es gilt: Das Finden einer Reihenfolge, welche die Anzahl der Knoten des ROBDDs einer Booleschen Funktion minimiert ist schwierig (es ist NP-vollständig).

Es gilt: Es gibt sogenannte **bösartige** Boolesche Funktion für die keine Reihenfolge der Variablen zu einem ROBDD mit wenigen Knoten (d.h. polynomiell in der Anzahl der Variablen vielen Knoten) führt.

Beispiel: Für die im folgenden definierte Hidden Weighted Bit Funktion (HWB) gilt, dass jede Variablenordnung zu einem ROBDD mit mindestens $\Omega(1,14^n)$ Knoten führt.

Für $x = (x_1, \dots, x_n)$ sei $wt(x)$ die Anzahl der Einsen in x

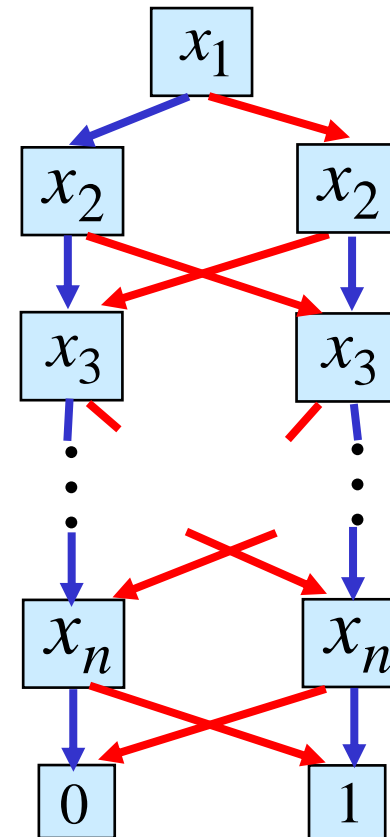
$$HWB(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } wt(x) = 0 \\ X_{wt(x)} & \text{sonst} \end{cases}$$

Reduced Ordered BDD (ROBDD)

Es gilt: Es gibt so genannte **gutartige** Boolesche Funktion für die jede Reihenfolge der Variablen zu einem kleinen ROBDD (d.h. mit polynomiell vielen Knoten) führt.

Beispiel:

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$$



Reduced Ordered BDD (ROBDD)

Mögliche Anwendung von ROBDDs: Prüfen zweier Boolescher Funktionen f_1 und f_2 auf Gleichheit

1. Konstruiere bezüglich einer gemeinsamen Variablenordnung die zugehörigen ROBDDs.

2. Prüfe, ob die beiden ROBDDs gleich sind. Genauer: Es muss geprüft werden, ob die ROBDDs isomorph im folgenden Sinn sind:

Zwei ROBDDs mit Knotenmengen V_1 und V_2 sind **isomorph, wenn es eine Abbildung $\psi : V_1 \rightarrow V_2$ gibt mit:**

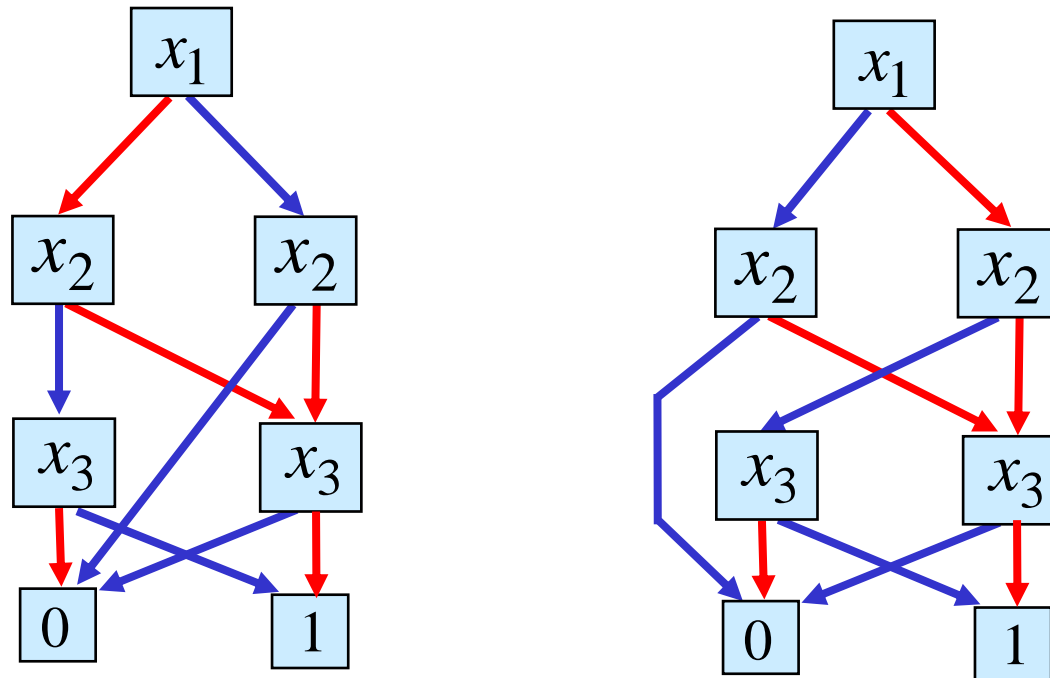
i) $\text{label}(v) = \text{label}(\psi(v))$ Dabei ist $\text{label}(v)$ die Variable von v

ii) $\psi(\text{low}(v)) = \text{low}(\psi(v))$, $\psi(\text{high}(v)) = \text{high}(\psi(v))$

dabei sind $\text{low}(v)$ und $\text{high}(v)$ der 0- bzw. 1-Nachfolgerknoten (falls v innerer Knoten ist)

Reduced Ordered BDD (ROBDD)

○ Beispiel:

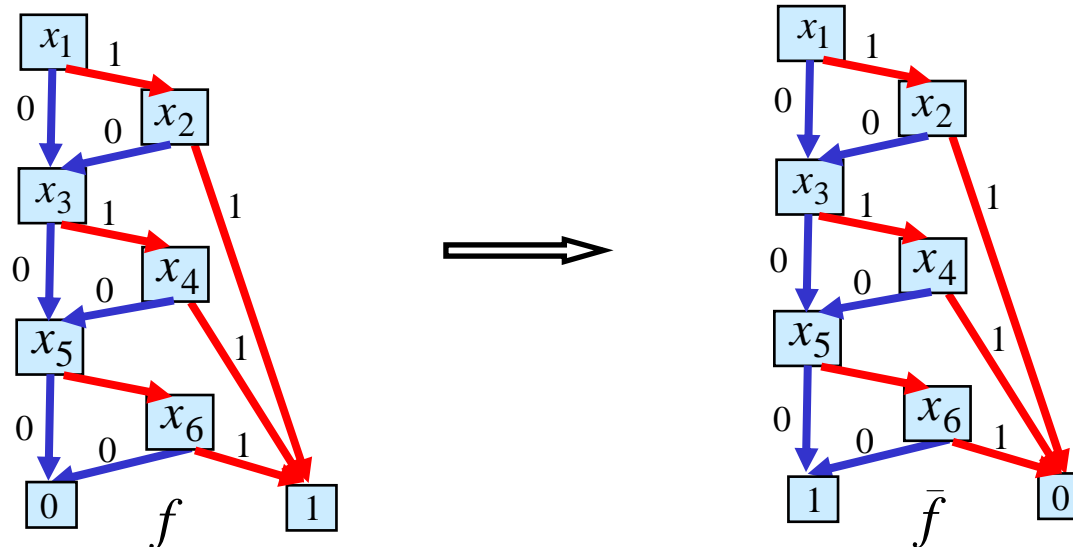


Operationen auf OBDDs

- Manche Operationen auf Booleschen Funktionen lassen sich auf OBDDs sehr effizient durchführen

- Beispiel 1: **Negation**

Das ROBDD der Funktion \bar{f} erhält man aus dem ROBDD der Funktion f indem man die beiden Knoten mit 0 und 1 vertauscht



In disjunktiver Form ist die Negation von f erheblich aufwendiger

$$f = x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 \implies \bar{f} = \bar{x}_1x_2 + x_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1\bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_5\bar{x}_6$$

Operationen auf OBDDs

- **Beispiel 2: Verknüpfung** zweier Boolescher Funktionen f und g mit Booleschem Operator \circ (z.B. $\wedge, \vee, \rightarrow, \dots$)

$f \circ g : B^n \rightarrow B$ ist definiert durch

$$f \circ g(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) \circ g(x_1, \dots, x_n)$$

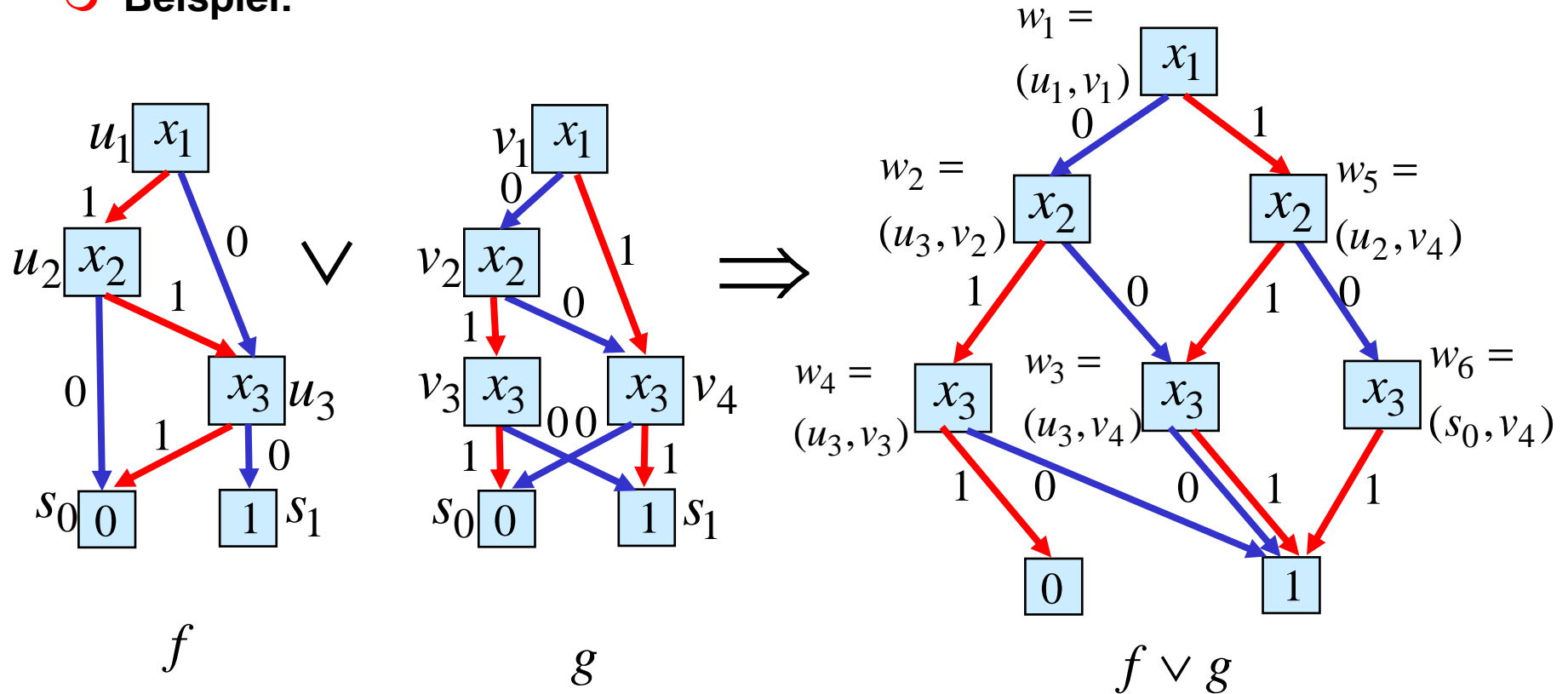
Konstruiere aus OBDD für f und g mit gemeinsamer Variablenordnung ein OBDD für $f \circ g$

Basis für rekursiven Algorithmus ist die Shannonzerlegung:

$$\begin{aligned} f \circ g &= x_i (f \circ g)_{x_i} \vee \bar{x}_i (f \circ g)_{\bar{x}_i} \\ &= x_i (f_{x_i} \circ g_{x_i}) \vee \bar{x}_i (f_{\bar{x}_i} \circ g_{\bar{x}_i}) \end{aligned}$$

Operationen auf OBDDs

○ Beispiel:



Zur Verwaltung der Namen für die neuen Knoten w_i kann man eine Tabelle verwenden (s. folgende Folie)

Operationen auf OBDDs

- Tabelle zur Verwaltung der Namen für die Knoten des OBDDs für die Funktion $f \vee g$

	v_1	v_2	v_3	v_4	s_0	s_1
u_1	w_1					
u_2				w_5		
u_3		w_2	w_4	w_3		
s_0				w_6		
s_1						

Operationen auf OBDDs

- Eingabe: OBDDs B, B' für f, g bzgl. Variablenordnung π , binäre Operation \circ
Ausgabe: OBDD für $f \circ g$

APPLY(B, B', \circ)

IF (B und B' sind Blätter) **THEN**

RETURN ($B \circ B'$)

IF ((B, B') in Tabelle) **THEN**

RETURN(Tabelle(B, B'))

Sei x die erste Variable in π , von der B oder B' abhängen

Konstruiere OBDD B_{ret} mit neuem Knoten v als Wurzel und

label(v) = x

low(v) = **APPLY**($B_{x=0}, B'_{x=0}, \circ$)

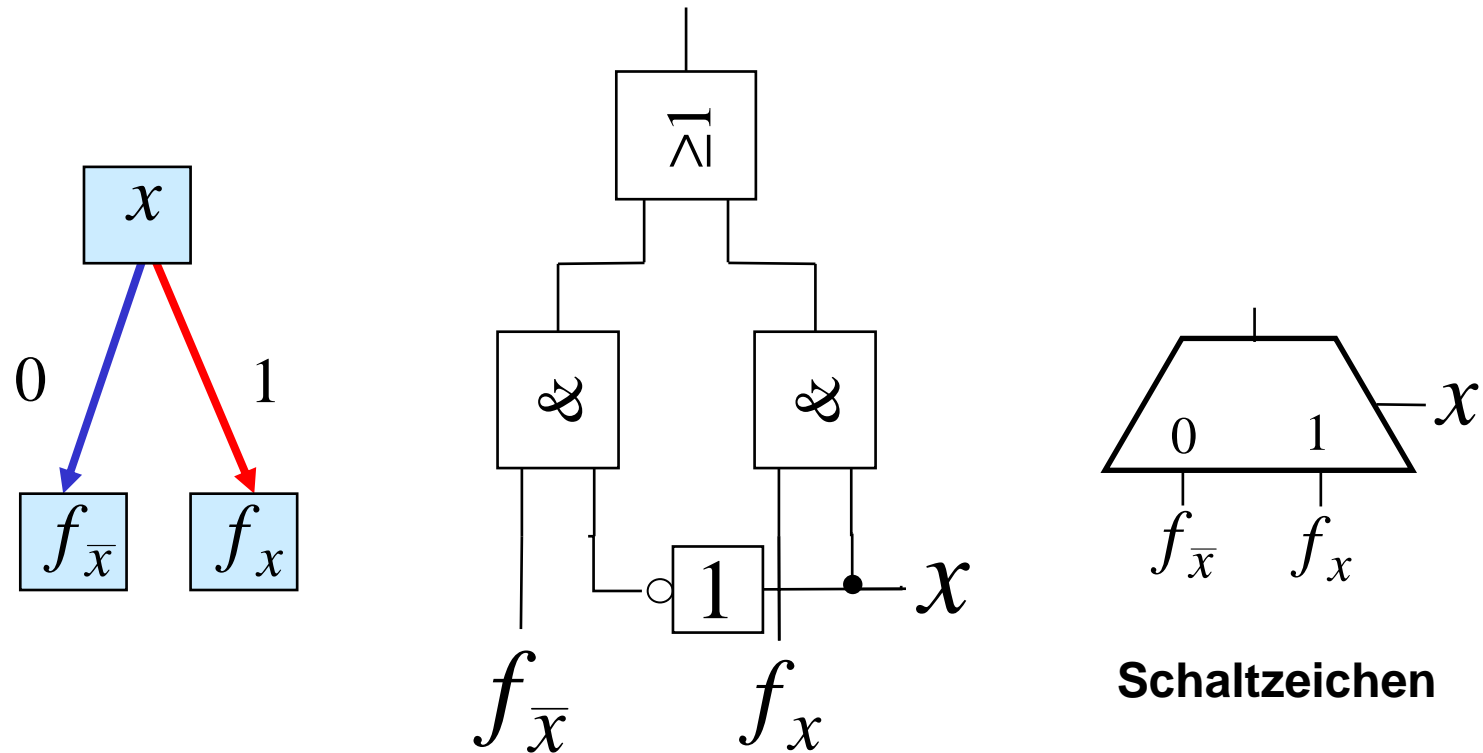
high(v) = **APPLY**($B_{x=1}, B'_{x=1}, \circ$)

Füge (B, B', B_{ret}) in Tabelle ein

RETURN(B_{ret})

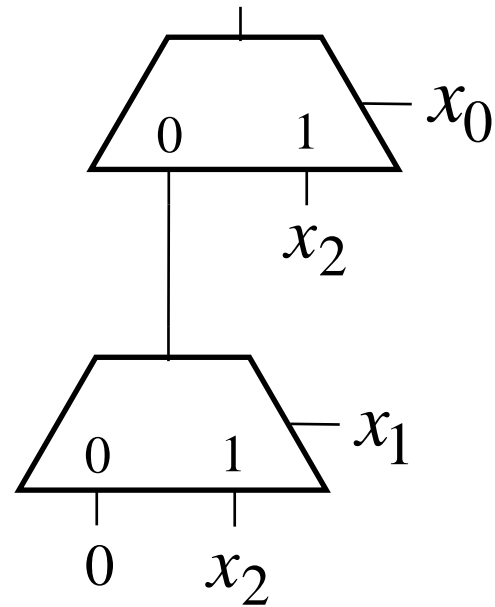
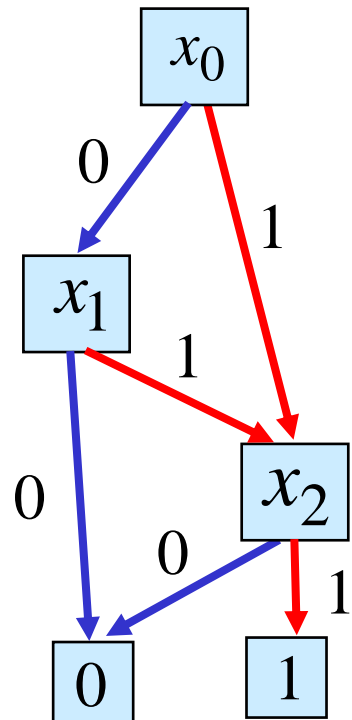
Realisierung von OBDDs

- OBDDs lassen sich mit Hilfe von 2:1 Multiplexern realisieren



Realisierung von OBDDs

- **Regel:** Realisiere jeden Knoten durch einen 2:1 Multiplexer, außer den Knoten die Blattknoten oder Variablen entsprechen



DNF/KNF-Konversion

- **Statt der Min- und Maxterme kann man auch deren Indizes angeben**

⇒ $f = \text{MINt}(0,3,4,7)$

⇒ $f = \text{MAXt}(1,2,5,6)$

- **Für die Umwandlung der DNF einer Funktion f in die entsprechende KNF folgt direkt aus Satz 9.4:**
 - ⇒ **Die Indizes der Minterme, die nicht in der Funktionsdarstellung der DNF der Funktion verwendet werden, sind Indizes der Maxterme der KNF der Funktion**

DNF/KNF-Konversion

i_{10}	$x_2 x_1 x_0$	Minterme	Maxterme
0	000	$\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_0$	
1	001		$x_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0$
2	010		$x_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0$
3	011	$\bar{x}_2 \wedge x_1 \wedge x_0$	
4	100	$x_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_0$	
5	101		$\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0$
6	110		$\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0$
7	111	$x_2 \wedge x_1 \wedge x_0$	

DNF : $f(x_2, x_1, x_0) = \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_2 x_1 x_0 \vee x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee x_2 x_1 x_0$

KNF : $f(x_2, x_1, x_0) = (x_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0)$

NAND-NOR-Konversion

- Sowohl das NAND- als auch das NOR-System sind vollständige Operatorensysteme
 - ⇒ alle Booleschen Funktionen lassen sich mit diesen Operatoren darstellen
 - ⇒ da sowohl NAND- als auch NOR-Gatter besonders einfach realisiert werden können, haben diese Darstellungen eine besondere Bedeutung im Schaltkreisentwurf
- NAND-Konversion aus der DNF:

$$\begin{aligned} f(x_2, x_1, x_0) &= x_2 x_1 \bar{x}_0 \vee x_2 \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_2 x_1 x_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \\ &= \overline{\overline{x_2 x_1 \bar{x}_0 \vee x_2 \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_2 x_1 x_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0}} \\ &= \overline{\overline{x_2 x_1 \bar{x}_0} \wedge \overline{x_2 \bar{x}_1 x_0} \wedge \overline{\bar{x}_2 x_1 x_0} \wedge \overline{\bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0}} \\ &= \mathbf{NAND}_4(\mathbf{NAND}_3(x_2 x_1 \bar{x}_0), \mathbf{NAND}_3(x_2 \bar{x}_1 x_0), \\ &\quad \mathbf{NAND}_3(\bar{x}_2 x_1 x_0), \mathbf{NAND}_3(\bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0)) \end{aligned}$$

NAND-NOR-Konversion

○ NOR-Konversion aus der KNF:

$$\begin{aligned} f(x_2, x_1, x_0) &= x_2 x_1 \bar{x}_0 \vee x_2 \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_2 x_1 x_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 && \text{(DNF)} \\ &= (x_2 \vee x_1 \vee x_0)(x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0)(\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0) && \text{(KNF)} \\ &= \overline{(x_2 \vee x_1 \vee x_0)(x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0)(\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0)} \\ &= \overline{(x_2 \vee x_1 \vee x_0) \vee (x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0) \vee (\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0) \vee (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0)} \\ &= \mathbf{NOR}_4(\mathbf{NOR}_3(x_2, x_1, x_0), \mathbf{NOR}_3(x_2, \bar{x}_1, \bar{x}_0), \\ &\quad \mathbf{NOR}_3(\bar{x}_2, x_1, \bar{x}_0), \mathbf{NOR}_3(\bar{x}_2, \bar{x}_1, \bar{x}_0)) \end{aligned}$$

9.4 Minimalformen

- **Boolesche Ausdrücke für eine Boolesche Funktion f in einer kürzestmöglichen Darstellung**
 - ⇒ technische Realisierung mit möglichst geringen Kosten
- **Disjunktive und konjunktive Minimalformen**
 - ⇒ Disjunktion von Implikanten (DMF)
 - ⇒ Konjunktion von Implikaten (KMF)
- **Die DMF und KMF sind nicht eindeutig**

$$f(x_1, x_0) = \bar{x}_1 x_0 \vee x_1 \bar{x}_0$$

DMF

$$g(x_1, x_0) = \bar{x}_1 x_0 \vee x_1 x_0$$

keine DMF

$$= x_0$$

DMF

$$h(x_2, x_1, x_0) = (x_1 \vee \bar{x}_0) \wedge (x_2 \vee x_0)$$

KMF

$$k(x_2, x_1, x_0) = \bar{x}_0 \wedge (x_2 \vee \bar{x}_0) \wedge (x_2 \vee x_1)$$

keine KMF

$$= \bar{x}_0 \wedge (x_2 \vee x_1)$$

KMF

Minimalformen

- **Das Finden einer Minimalform ist nicht trivial**
 - ⇒ **besonders bei Funktionen mit vielen Variablen**
 - ⇒ **oft nur suboptimale Lösungen**
 - ⇒ **Einsatz von Heuristiken**

- **Allgemeines zweischrittiges Vorgehen:**
 - ⇒ **Finden einer Menge von Implikanten bzw. Implikate mit einer möglichst geringen Anzahl von Literalen**
 - ⇒ **Auswahl aus dieser Menge, so dass deren Disjunktion bzw. Konjunktion die gesuchte Funktion erhält**

Ökonomische Kriterien für den Entwurf von Schaltnetzen

- **Geringe Kosten für den Entwurf (Entwurfsaufwand)**
 - ⇒ Lohnkosten
 - ⇒ Rechnerbenutzung, Softwarelizenzen
- **Geringe Kosten für die Realisierung (Realisierungsaufwand)**
 - ⇒ Bauelemente, Gehäuseformen
 - ⇒ Kühlung
- **Geringe Kosten für die Inbetriebnahme**
 - ⇒ Kosten für den Test
 - ⇒ Fertigstellung programmierbarer Bauelemente
- **Geringe Kosten für den Betrieb**
 - ⇒ Wartung
 - ⇒ Energie

Entwurfsziele

- **Manche Kriterien stehen im Widerspruch**
 - ⇒ zuverlässigere Schaltungen erfordern einen höheren Realisierungsaufwand
 - ⇒ Verringerung des Realisierungsaufwand erfordert eine Erhöhung der Entwurfskosten

- **Ziel des Entwurfs ist das Finden des günstigsten Kompromisses**
 - ⇒ Korrektheit der Realisierung
 - ⇒ Einhaltung der technologischen Grenzen
 - ⇒ ökonomische Kriterien

☞ **Wir betrachten in dieser Vorlesung nur die Minimierung des Realisierungsaufwands**

10 Minimierungsverfahren

- **Finden von Minimalformen Boolescher Funktionen**
 - ⇒ ohne Betrachtung der Zieltechnologie
 - ⇒ mit Betrachtung der Zieltechnologie

- **Drei Minimierungsansätze**
 - ⇒ algebraische Verfahren
 - ⇒ graphische Verfahren
 - ⇒ tabellarische Verfahren

- **Man unterscheidet**
 - ⇒ exakte Minimierungsverfahren (z.B. Quine McCluskey), deren Ergebnis das (globale) Minimum einer Schaltungsdarstellung ist
 - ⇒ heuristische Minimierungsverfahren auf der Basis von iterativen Minimierungsschritten (liefern oft nur ein lokales Minimum)

Darstellung Boolescher Funktionen durch Funktionstabellen

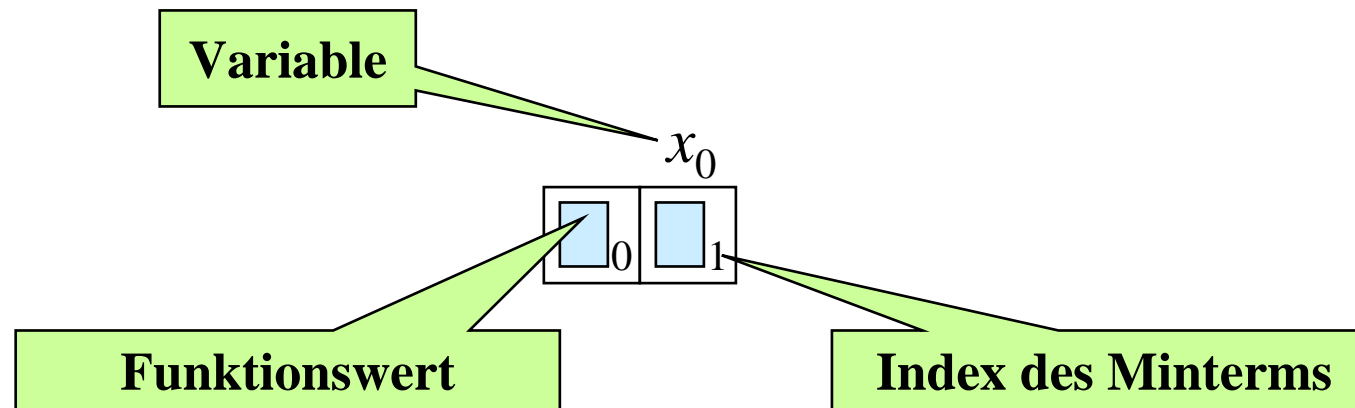
- Darstellung des Verhaltens einer Booleschen Funktion mit Hilfe einer vollständigen Funktionstabelle
 - ⇒ Jeder Belegung der Booleschen Variablen wird ein Funktionswert zugeordnet
 - ⇒ $f(x_2, x_1, x_0) \rightarrow y$, mit $x_i, y \in \{0,1\}$

Index	x_2	x_1	x_0	y
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

$$f(x_2, x_1, x_0) = x_1 \bar{x}_0 \vee x_2 x_1 \vee x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0$$

10.1 KV-Diagramme

- **KV-Diagramme** ermöglichen Boolesche Funktionen übersichtlich darzustellen
 - ⇒ bis zu 6 Variablen praktisch einsetzbar
- nach Karnaugh und Veitch
- Ausgangspunkt ist ein Rechteck mit 2 Feldern



KV-Diagramme

○ Beispiele

$$\begin{array}{|c|c|}
 \hline
 & x_0 \\
 \hline
 0_0 & 1_1 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$f(x_0) = x_0$$

$$\begin{array}{|c|c|}
 \hline
 & x_0 \\
 \hline
 1_0 & 0_1 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$f(x_0) = \bar{x}_0$$

○ Erweiterung durch Spiegelung

⇒ für jede zusätzliche Variable verdoppelt sich die Zahl der Felder

$$\begin{array}{|c|c|}
 \hline
 & x_0 \\
 \hline
 0 & 1 \\
 \hline
 2 & 3 \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l} \\ \\ x_1 \end{array}$$

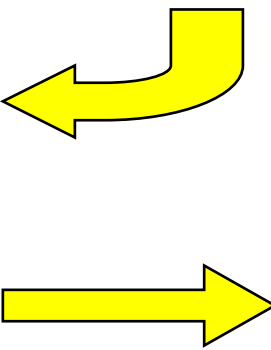
$$\begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 & & \bar{x}_0 & \\
 \hline
 0 & 1 & 5 & 4 \\
 \hline
 2 & 3 & 7 & 6 \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l} \\ \\ x_1 \\ \\ \bar{x}_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 & & \bar{x}_0 & \\
 \hline
 0 & 1 & 5 & 4 \\
 \hline
 2 & 3 & 7 & 6 \\
 \hline
 10 & 11 & 15 & 14 \\
 \hline
 8 & 9 & 13 & 12 \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l} \\ \\ | \\ x_3 \\ | \\ \\ \bar{x}_2 \\ \\ | \\ x_1 \\ | \end{array}$$

Eigenschaften von KV-Diagrammen

- Jedes Feld enthält einen Funktionswert
 - ⇒ Minterm der Funktion
 - ⇒ eindeutige Variablenzuordnung
- Oft werden x_1 und x_2 vertauscht
 - ⇒ lediglich eine andere Numerierung der Felder
 - ⇒ kein Einfluss auf das Minimierungsverfahren
- Aufstellen der KV-Diagramme über die Funktionstabelle:

Index	x_2	x_1	x_0	y
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

$$f(x_2, x_1, x_0) = x_1 \bar{x}_0 \vee x_2 x_1 \vee x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0$$


\bar{x}_0			
0_0	0_1	0_5	1_4
1_2	0_3	1_7	1_6
\bar{x}_2			

x_1

KV-Diagramme über die KNF

- Argumentation über die Nullstellen der Funktion
 - ⇒ Jede Nullstelle entspricht einem Maxterm
- Beispiel

$$f(x_2, x_1, x_0) = x_1 \bar{x}_0 \vee x_2 x_1 \vee x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0$$

\bar{x}_0			
0_0	0_1	0_5	1_4
1_2	0_3	1_7	1_6
\bar{x}_2			

x_1

$$f(x_2, x_1, x_0) = (x_2 \vee x_1 \vee x_0) \wedge (x_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0)$$

Minimalformen aus KV-Diagrammen

- Zusammenfassen von Mintermen zu Implikanten
- Beispiel:

$$\begin{array}{c}
 \overline{x_0} \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 1_0 & 0_1 & 1_5 & 1_4 \\
 \hline
 1_2 & 0_3 & 1_7 & 1_6 \\
 \hline
 \end{array} \\
 \overline{x_2} \\
 x_1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \overline{x_0} \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 1_0 & 0_1 & \boxed{1_5} & 1_4 \\
 \hline
 1_2 & 0_3 & 1_7 & 1_6 \\
 \hline
 \end{array} \\
 \overline{x_2} \\
 x_1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \overline{x_0} \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 1_0 & 0_1 & 1_5 & 1_4 \\
 \hline
 1_2 & 0_3 & \boxed{1_7} & \boxed{1_6} \\
 \hline
 \end{array} \\
 \overline{x_2} \\
 x_1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \overline{x_0} \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 \boxed{1_0} & 0_1 & 1_5 & \boxed{1_4} \\
 \hline
 \boxed{1_2} & 0_3 & 1_7 & \boxed{1_6} \\
 \hline
 \end{array} \\
 \overline{x_2} \\
 x_1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \overline{x_0} \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 \boxed{1_0} & \boxed{0_1} & 1_5 & 1_4 \\
 \hline
 1_2 & 0_3 & 1_7 & 1_6 \\
 \hline
 \end{array} \\
 \overline{x_2} \\
 x_1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \overline{x_0} \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 1_0 & 0_1 & \boxed{1_5} & \boxed{1_4} \\
 \hline
 1_2 & 0_3 & \boxed{1_7} & \boxed{1_6} \\
 \hline
 \end{array} \\
 \overline{x_2} \\
 x_1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \overline{x_0} \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 \boxed{1_0} & \boxed{0_1} & 1_5 & 1_4 \\
 \hline
 \boxed{1_2} & 0_3 & 1_7 & \boxed{1_6} \\
 \hline
 \end{array} \\
 \overline{x_2} \\
 x_1
 \end{array}$$

Implikant k-ter Ordnung

Def. 10.1: Es sei eine Boolesche Funktion $f(x_0, \dots, x_{n-1}): B^n \rightarrow B$ gegeben. Ein Implikant k-ter Ordnung umfaßt 2^k Felder eines KV-Diagramms.

○ **Man erhält**

⇒ Implikanten 0-ter Ordnung

⇒ Implikanten 1-ter Ordnung

⇒ Implikanten 2-ter Ordnung

⇒ usw.

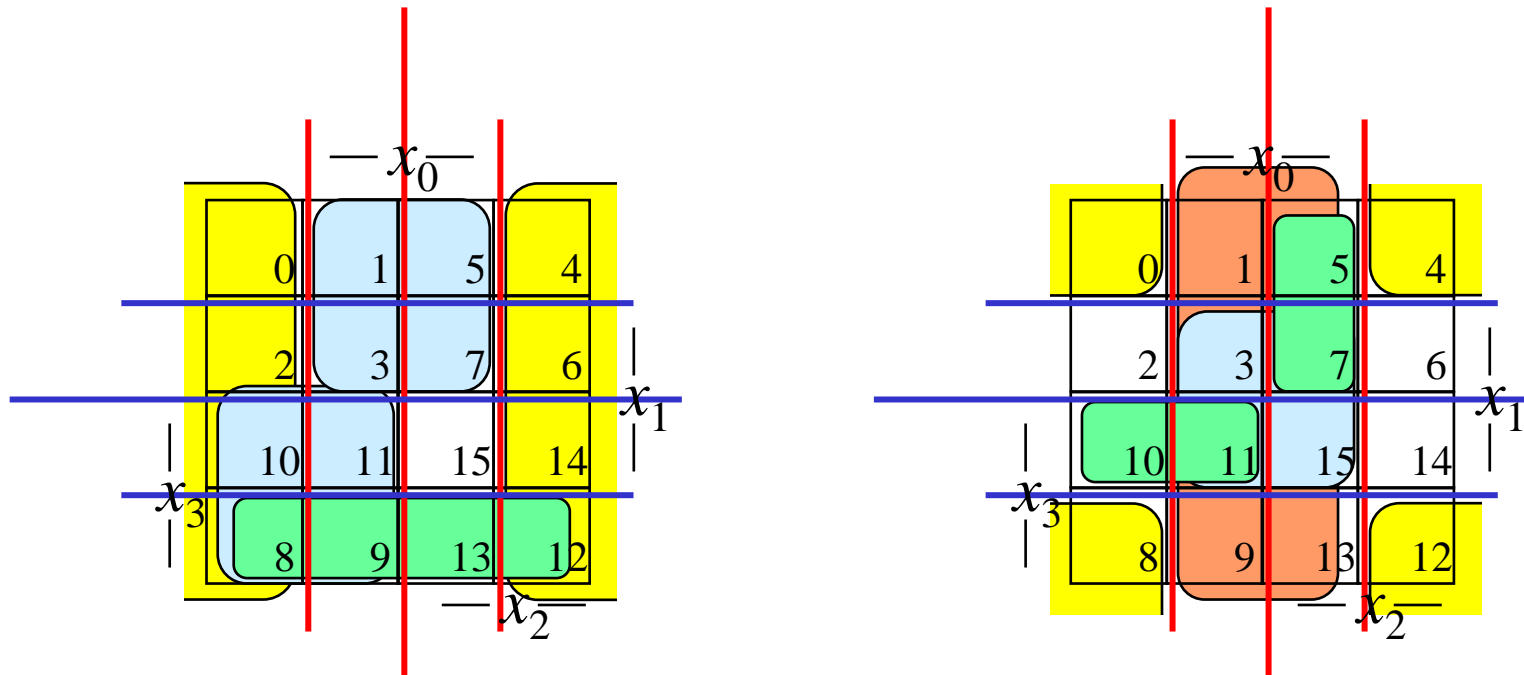
Minterme

**Zusammenfassung zweier
Minterme**

**Zusammenfassung zweier
Implikanten 1-ter
Ordnung**

Finden möglicher Zusammenfassungen

- Finden von 1-Blöcken, die symmetrisch zu denjenigen Achsen, an denen eine Variable von 0 auf 1 wechselt
- Jede Funktion lässt sich als disjunktive Verknüpfung solcher Implikanten darstellen
- Beispiele



Primimplikant

Def. 10.2: Es sei eine Boolesche Funktion $f(x_0, \dots, x_{n-1}): B^n \rightarrow B$ gegeben. Ein Implikant p heißt Primimplikant, wenn es keinen Implikanten q gibt, der p impliziert.

- Ein Primimplikant p ist von größtmöglicher Ordnung
 - ⇒ Primimplikanten sind einfach aus einem KV-Diagramm herauszulesen
 - ⇒ man sucht die größtmöglichen Implikanten

$$f(x_2, x_1, x_0) = x_2 x_1 \bar{x}_0 \vee x_2 x_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 x_0$$

	\bar{x}_0			
	0_0	1_1	1_5	0_4
	0_2	0_3	1_7	1_6
	\bar{x}_2			x_1
Minterme				

	\bar{x}_0			
	0_0	1_1	1_5	0_4
	0_2	0_3	1_7	1_6
	\bar{x}_2			x_1
Primimplikanten				

Überdeckung

Satz 10.1: Zu jeder Booleschen Funktion f gibt es eine minimale Überdeckung aus Primimplikanten

Beweis:

Betrachte eine minimale Überdeckung der Funktion, welche eine kleinstmögliche Anzahl von Implikanten enthält.

Angenommen die Überdeckung besitzt Implikanten, die kein Primimplikant sind.

- ⇒ Jeder solche Implikant k kann durch einen Primimplikant p ersetzt werden, der k enthält**
- ⇒ Das Ergebnis ist eine Überdeckung der Funktion f aus Primimplikanten mit der gleichen Anzahl von Termen**
- ⇒ Die Überdeckung ist minimal**

○ Einschränkung des Suchraums

- ⇒ man braucht nur die Primimplikanten für die Minimierung betrachten**

Kernprimimplikant

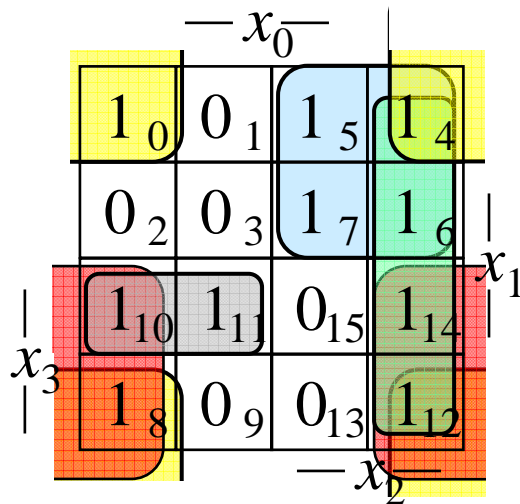
Def. 10.3: Es sei eine Boolesche Funktion $f(x_0, \dots, x_{n-1}): B^n \rightarrow B$ gegeben. Ein Implikant p heißt Kernprimimplikant, wenn er einen Minterm überdeckt, der von keinem anderen Primimplikant überdeckt wird.

- Man nennt solche Primimplikanten auch essentielle Primimplikanten
 - ⇒ Ein Kernprimimplikant muss auf jeden Fall in der disjunktiven Minimalform vorkommen
- Ziel der Minimierung:
 - ⇒ Überdecken der Funktion durch Kernprimimplikanten und möglichst wenigen zusätzlichen Primimplikanten
- Zwei Schritte
 1. Finde alle Primimplikanten
 2. Suche eine Überdeckung der Funktion mit möglichst wenigen Primimplikanten

Beispiel

$$\begin{aligned}
 f(x_3, x_2, x_1, x_0) &= \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 x_0 \vee \\
 &\quad \bar{x}_3 x_2 x_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_3 x_2 x_1 x_0 \vee x_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee \\
 &\quad x_3 \bar{x}_2 x_1 \bar{x}_0 \vee x_3 \bar{x}_2 x_1 x_0 \vee x_3 x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee x_3 x_2 x_1 \bar{x}_0 \\
 &= \text{MINt}(0, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14)
 \end{aligned}$$

DNF

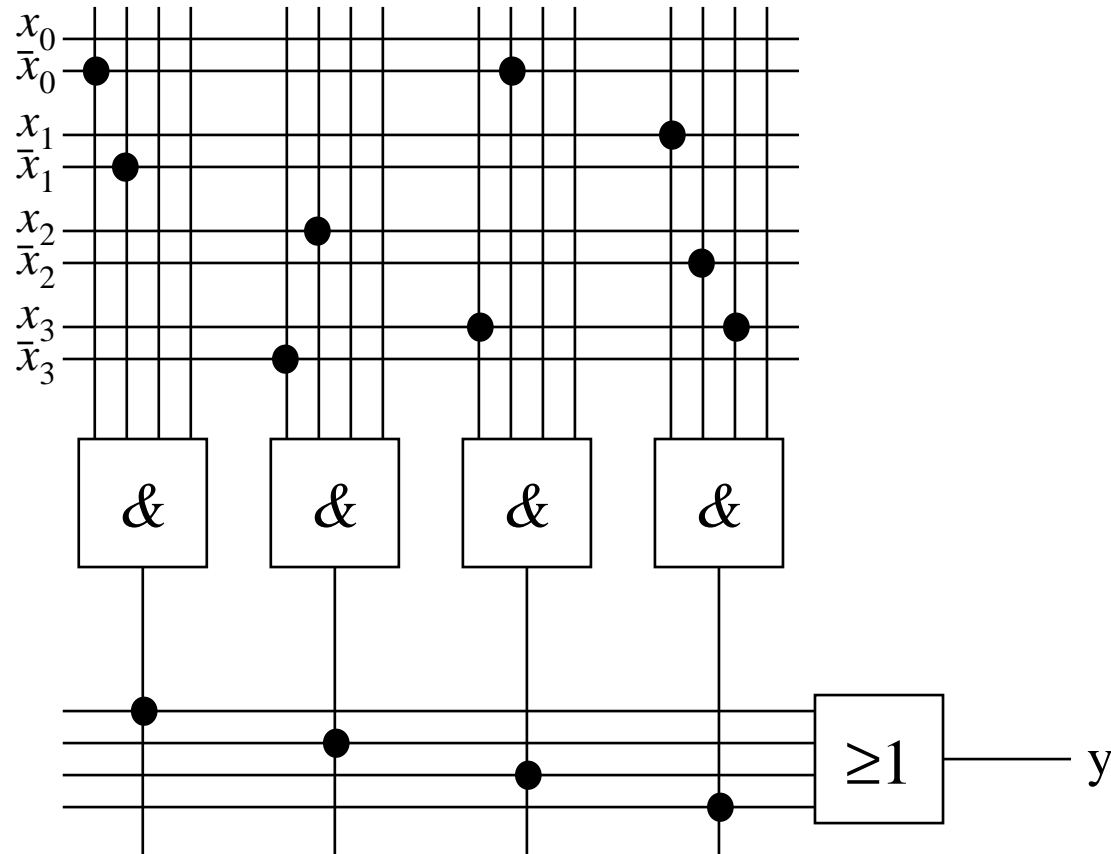


- e $\bar{x}_1 \bar{x}_0$ (0,4,8,12)
- e $\bar{x}_3 x_2$ (4,5,6,7)
- e $x_2 \bar{x}_0$ (4,6,12,14)
- e $x_3 \bar{x}_0$ (8,10,12,14)
- e $x_3 \bar{x}_2 x_1$ (10,11)

$$\begin{aligned}
 f(x_3, x_2, x_1, x_0) &= \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_3 x_2 \vee x_3 \bar{x}_0 \vee x_3 \bar{x}_2 x_1 \\
 &= \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_3 x_2 \vee x_2 \bar{x}_0 \vee x_3 \bar{x}_2 x_1
 \end{aligned}$$

DMF

Realisierung als „Programmable Logic Array (PLA)



$$f(x_3, x_2, x_1, x_0) = \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_3 x_2 \vee x_3 \bar{x}_0 \vee x_3 \bar{x}_2 x_1$$

10.2 Bündelminimierung

- Funktionen mit mehreren Ausgängen werden gemeinsam minimiert
- gemeinsame Implikanten sollten mehrfach genutzt werden
- Beispiel: Transformation eines Codes



○ Transformationstabelle

System1			System2	
c	b	a	x	y
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	1	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	0	1

x:

$\overline{x_0}$				
1 ₀	0 ₁	1 ₅	1 ₄	x ₁
0 ₂	0 ₃	0 ₇	0 ₆	
$\overline{x_2}$				

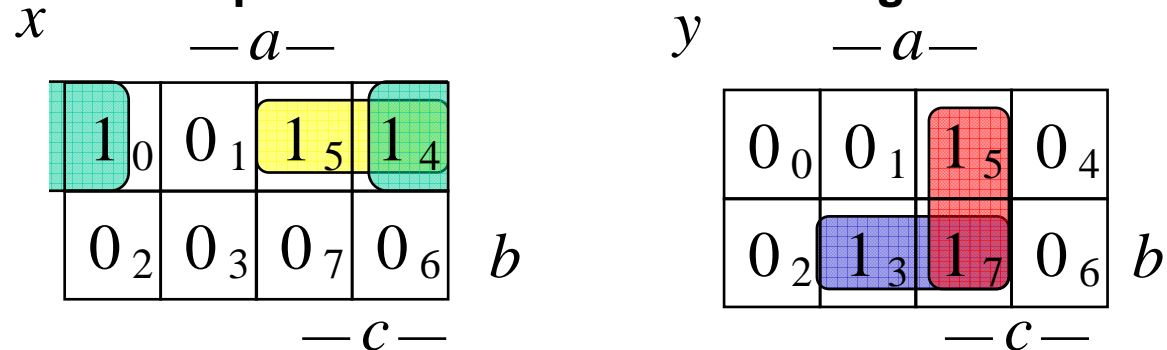
y:

$\overline{x_0}$				
0 ₀	0 ₁	1 ₅	0 ₄	x ₁
0 ₂	1 ₃	1 ₇	0 ₆	
$\overline{x_2}$				

Bündelminimierung

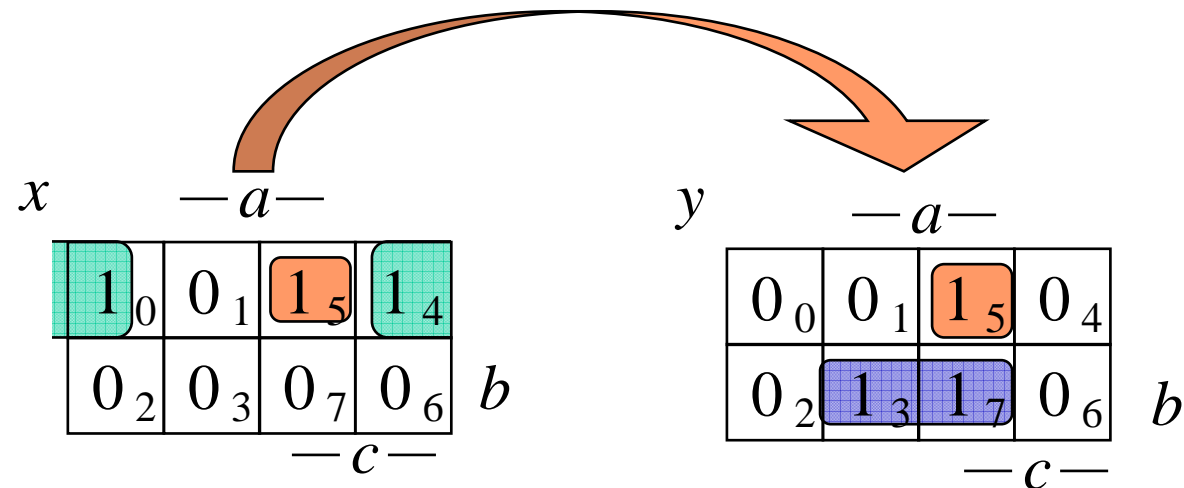
○ Getrennte Minimierung

⇒ insgesamt 4 Implikanten für die Realisierung

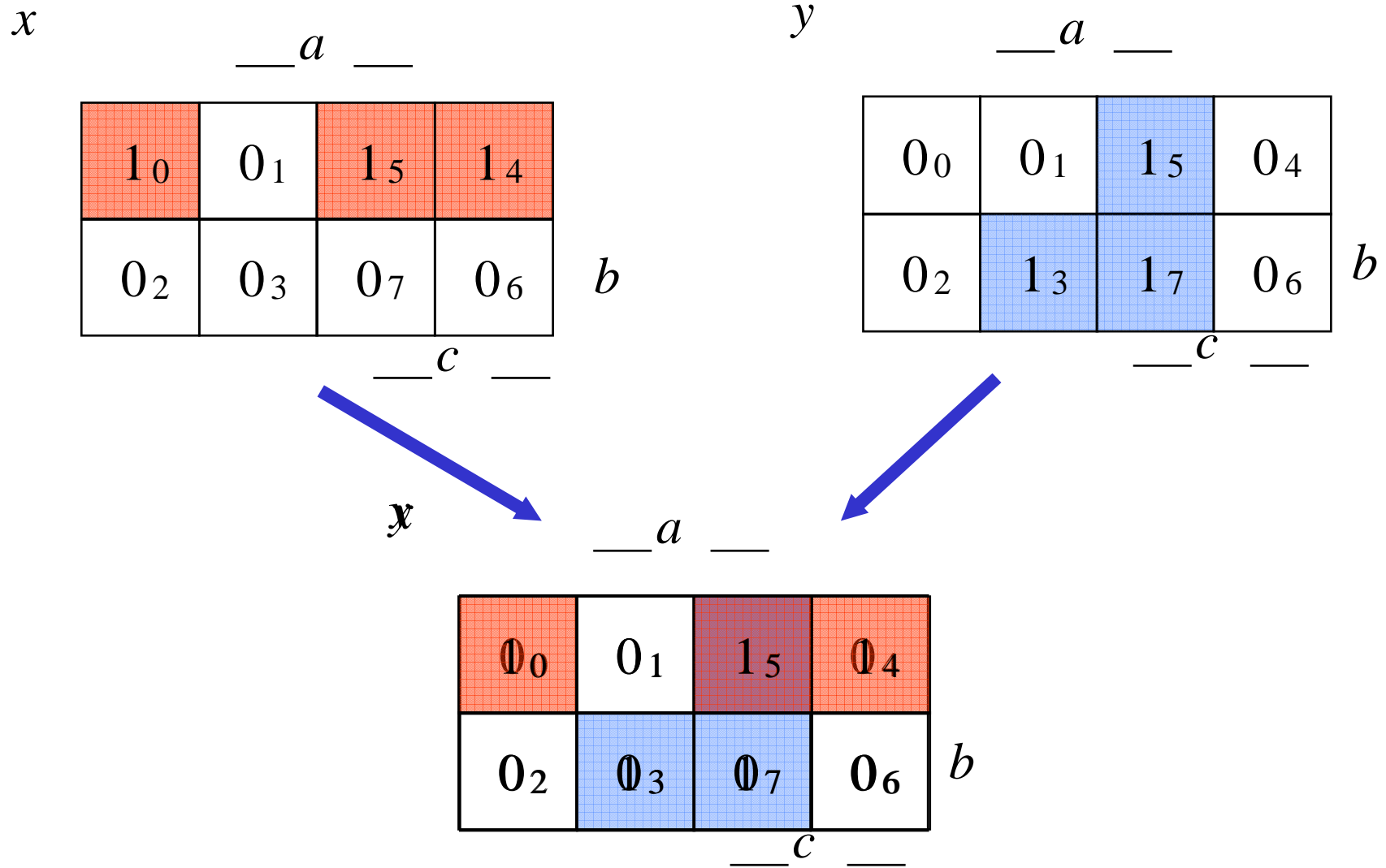


○ Bündelminimierung

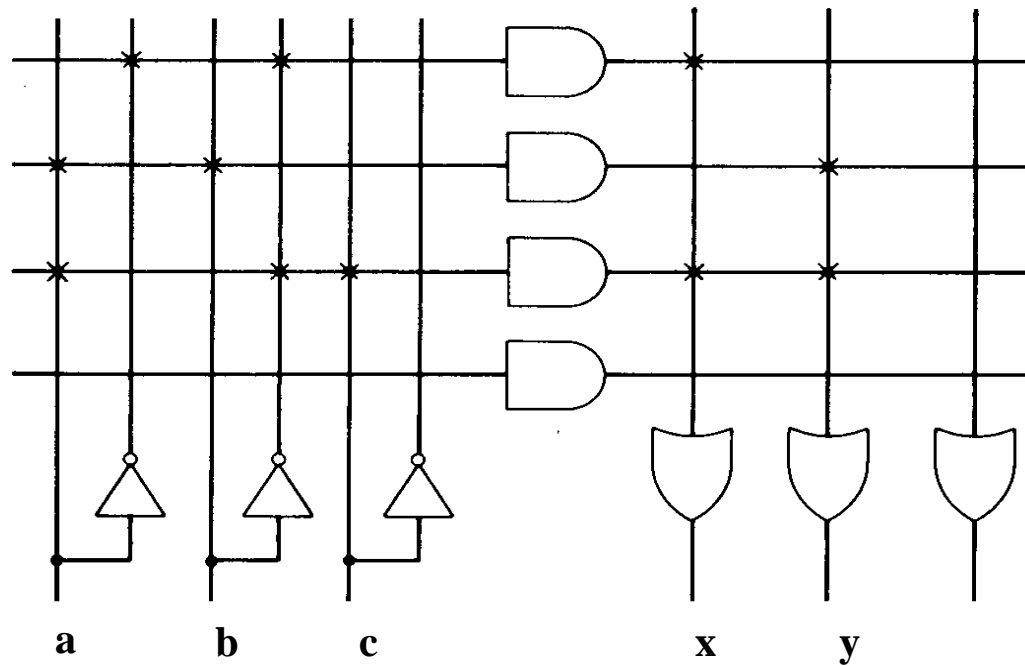
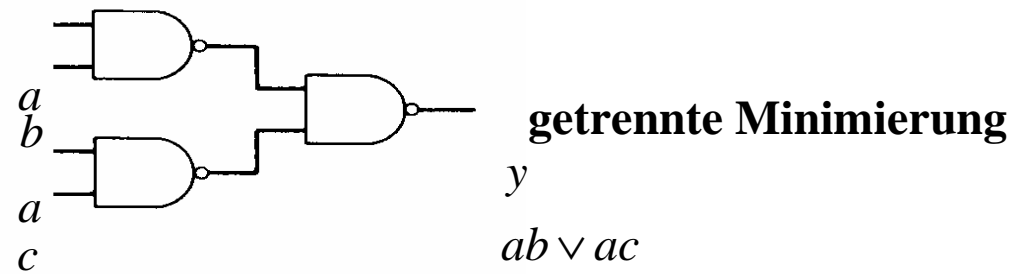
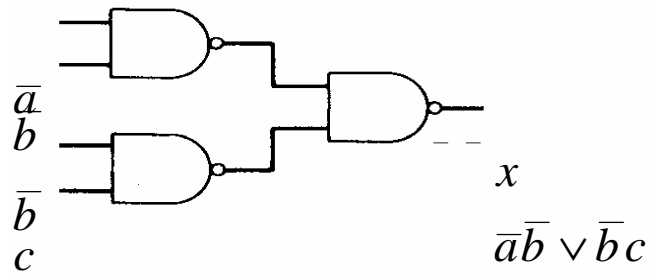
⇒ insgesamt 3 Implikanten für die Realisierung



Bündelminimierung



Bündelminimierung



Bündelminimierung

$$x = \bar{a}\bar{b} \vee ab\bar{c}$$

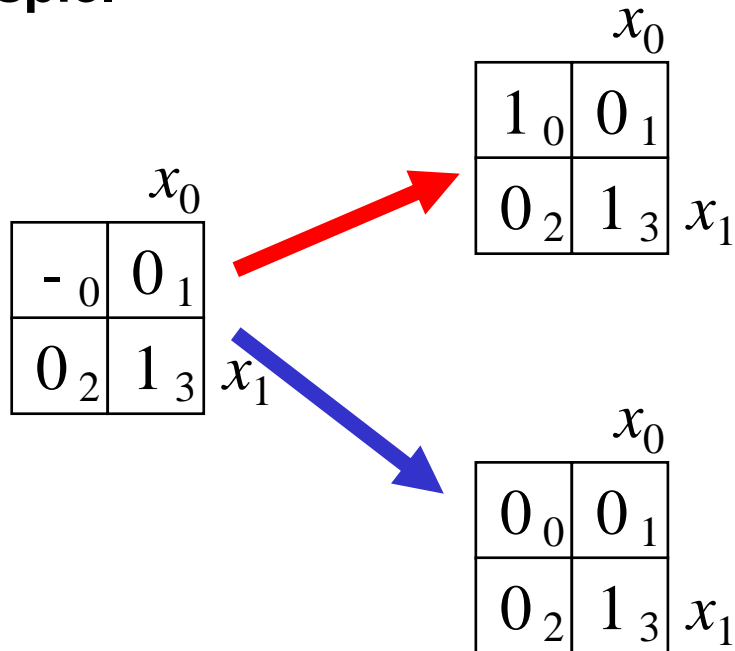
$$y = ab \vee a\bar{b}c$$

2.3 Unvollständig definierte Funktionen

- Bisher war für alle Variablenbelegungen ein Funktionswert festgelegt
 - ⇒ in praktischen Fällen kommt es sehr häufig vor, dass die Funktionswerte für bestimmte Variablenbelegungen **frei wählbar** sind
- Solche Funktionen heißen **unvollständig** oder **partiell definierte Funktionen**
 - ⇒ die nicht verwendeten Variablenbelegungen heißen auch **Don't-care-Belegungen**
 - ⇒ in KV-Diagrammen werden diese Felder mit einem „-“ gekennzeichnet
- **wichtiges Potential für die Minimierung!**
 - ⇒ um eine DMF zu erhalten, müssen diese mit „0“ oder „1“ belegt werden

Minimierung unvollständiger Boolescher Funktionen

○ Beispiel



$$f(x_1, x_0) = x_1x_0 \vee \bar{x}_1\bar{x}_0$$

$$f(x_1, x_0) = x_1x_0$$

Minimierung unvollständiger Boolescher Funktionen

				$\overline{x_0}$							
				1 ₀	0 ₁	- 5	0 ₄				
				- 2	0 ₃	- 7	0 ₆				
				0 ₁₀	1 ₁₁	0 ₁₅	0 ₁₄				
				- 8	1 ₉	1 ₁₃	1 ₁₂				
				$\overline{x_2}$							
		x_3									
				x_1							

				$\overline{x_0}$							
				1 ₀	0 ₁	0 ₅	0 ₄				
				0 ₂	0 ₃	0 ₇	0 ₆				
				0 ₁₀	1 ₁₁	0 ₁₅	0 ₁₄				
				1 ₈	1 ₉	1 ₁₃	1 ₁₂				
				$\overline{x_2}$							
		x_3									
				x_1							

$$f = x_3 \bar{x}_1 \vee x_3 \bar{x}_2 x_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0$$

				$\overline{x_0}$							
				1 ₀	0 ₁	0 ₅	0 ₄				
				1 ₂	0 ₃	0 ₇	0 ₆				
				0 ₁₀	1 ₁₁	0 ₁₅	0 ₁₄				
				1 ₈	1 ₉	1 ₁₃	1 ₁₂				
				$\overline{x_2}$							
		x_3									
				x_1							

$$f = x_3 \bar{x}_1 \vee x_3 \bar{x}_2 x_0 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_0$$

2.4 Das Verfahren nach Quine-McCluskey

- **KV-Diagramme mit mehr als 6 Variablen werden sehr groß und unübersichtlich**
 - ⇒ dieses Problem wurde zuerst von Quine und McCluskey erkannt und gelöst
 - ⇒ Verfahren nach Quine-McCluskey ist Tabellenbasiert
 - ⇒ es führt auf eine DMF (disjunktive minimale Form)

- **Ausgangspunkt ist die Funktionstabelle der Funktion**
 - ⇒ nur die Minterme werden berücksichtigt

- **Der Suchraum wird gemäß Satz 1.1 eingeschränkt:**
 - ⇒ zu jeder Booleschen Funktion f gibt es eine minimale Überdeckung aus Primimplikanten

- **Verfahren nach Quine McCluskey in 2 Schritten:**
 1. Schritt: berechne alle Primimplikanten
 2. Schritt: suche eine minimale Überdeckung aller Minterme

Beispiel: Die vollständige Funktionstabelle

Nr.	e	d	c	b	a	y
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0
2	0	0	0	1	0	1
3	0	0	0	1	1	0
4	0	0	1	0	0	1
5	0	0	1	0	1	1
6	0	0	1	1	0	1
7	0	0	1	1	1	0
8	0	1	0	0	0	0
9	0	1	0	0	1	0
10	0	1	0	1	0	1
11	0	1	0	1	1	0
12	0	1	1	0	0	1
13	0	1	1	0	1	1
14	0	1	1	1	0	1
15	0	1	1	1	1	0

Nr.	e	d	c	b	a	y
16	1	0	0	0	0	0
17	1	0	0	0	1	0
18	1	0	0	1	0	1
19	1	0	0	1	1	0
20	1	0	1	0	0	0
21	1	0	1	0	1	0
22	1	0	1	1	0	1
23	1	0	1	1	1	0
24	1	1	0	0	0	0
25	1	1	0	0	1	0
26	1	1	0	1	0	1
27	1	1	0	1	1	0
28	1	1	1	0	0	0
29	1	1	1	0	1	0
30	1	1	1	1	0	1
31	1	1	1	1	1	0

1. Schritt: Berechnung aller Primimplikanten

○ Schreibweise

- ⇒ **1** steht für eine nicht negierte Variable
- ⇒ **0** steht für eine negierte Variable
- ⇒ **-** steht für eine nicht auftretende Variable

○ Man betrachtet nur die Minterme (1-Stellen der Funktion)

○ Die Minterme werden geordnet

- ⇒ Gruppen mit der gleichen Anzahl von Einsen
- ⇒ innerhalb der Gruppen: aufsteigende Reihenfolge
- ⇒ man erhält die **1. Quinesche Tabelle, 0. Ordnung**

○ Minterme benachbarter Gruppen die sich nur in einer Variable unterscheiden werden gesucht

- ⇒ diese können durch Streichen der Variable zusammengefaßt werden
- ⇒ man erhält die **1. Quineschen Tabellen höherer Ordnung**

Beispiel: 1. Quinesche Tabelle

Nr.	e	d	c	b	a
2	0	0	0	1	0
4	0	0	1	0	0
5	0	0	1	0	1
6	0	0	1	1	0
10	0	1	0	1	0
12	0	1	1	0	0
18	1	0	0	1	0
13	0	1	1	0	1
14	0	1	1	1	0
22	1	0	1	1	0
26	1	1	0	1	0
30	1	1	1	1	0

0. Ordnung

Nr.	e	d	c	b	a
2,6	0	0	-	1	0
2,10	0	-	0	1	0
2,18	-	0	0	1	0
4,5	0	0	1	0	-
4,6	0	0	1	-	0
4,12	0	-	1	0	0
5,13	0	-	1	0	1
6,14	0	-	1	1	0
6,22	-	0	1	1	0
10,14	0	1	-	1	0
10,26	-	1	0	1	0
12,13	0	1	1	0	-
12,14	0	1	1	-	0
18,22	1	0	-	1	0
18,26	1	-	0	1	0
14,30	-	1	1	1	0
22,30	1	-	1	1	0
26,30	1	1	-	1	0

1. Ordnung

Nr.	e	d	c	b	a
2,6,10,14	0	-	-	1	0
2,6,18,22	-	0	-	1	0
2,10,18,26	-	-	0	1	0
4,5,12,13	0	-	1	0	-
4,6,12,14	0	-	1	-	0
6,14,22,30	-	-	1	1	0
10,14,26,30	-	1	-	1	0
18,22,26,30	1	-	-	1	0

2. Ordnung

Nr.	e	d	c	b	a
2,6,10,14					
18,22,26,30	-	-	-	1	0

3. Ordnung

2. Schritt: Suche einer minimalen Überdeckung

- Aufstellen der **2. Quineschen Tabelle**

- ⇒ alle Primimplikanten werden zusammen mit den Nummern der Minterme aus denen sie hervorgegangen sind in eine Überdeckungstabelle eingetragen

- **Kosten für einen Primimplikanten:**

- ⇒ Anzahl der UND-Eingänge (Anzahl der Variablen des Terms)

Primimplikant	2	4	5	6	10	12	13	14	18	22	26	30	Kosten
A		X	X			X	X						3
B		X		X		X		X					3
C	X			X	X			X	X	X	X	X	2

- **Aufgabe: Finden einer Überdeckung aller Minterme mit minimalen Kosten**

Systematische Lösung des Überdeckungsproblems

○ Aufstellung einer Überdeckungsfunktion \ddot{u}_f

- ⇒ w_A, w_B und w_C sind Variablen, die kennzeichnen, ob ein entsprechender Primimplikant in der vereinfachten Darstellung aufgenommen wird, oder nicht
- ⇒ Konjunktive Form über alle den jeweiligen Minterm überdeckenden Primimplikanten

Primimplikant	2	4	5	6	10	12	13	14	18	22	26	30
A		X	X			X	X					
B		X		X		X		X				
C	X			X	X			X	X	X	X	X

$$\begin{aligned}
 \ddot{u}_f &= w_C(w_A \vee w_B)w_A(w_B \vee w_C)w_C(w_A \vee w_B)w_A(w_B \vee w_C)w_Cw_Cw_Cw_C \\
 &= w_C(w_A \vee w_B)w_A(w_B \vee w_C) \\
 &= (w_Cw_A \vee w_Cw_B)(w_Aw_B \vee w_Aw_C) \\
 &= w_Cw_Bw_A \vee w_Aw_C \\
 & (= w_Aw_C)
 \end{aligned}$$

Systematische Lösung des Überdeckungsproblems

- Ergebnis nach der Vereinfachung: $\ddot{u}_f = w_C w_B w_A \vee w_A w_C$
- Man sucht einen konjunktiven Term mit minimalen Kosten

$$w_C w_B w_A \quad \text{Kosten : } 2 + 3 + 3 = 8$$

$$w_A w_C \quad \text{Kosten : } 3 + 2 = 5$$

- Als Endergebnis der Minimierung für die Funktion f erhält man

$$f(e, d, c, b, a) = \bar{e} c \bar{b} \vee b \bar{a}$$

Vereinfachung des Überdeckungsproblems

○ Die Primimplikantentabelle kann folgendermaßen **reduziert** werden:

1. **Kernimplikantenregel**: essentielle Primterme (Kernprimimplikanten) und die von ihnen überdeckten Minterme können gestrichen werden

- ⇒ tragen mit einem einzigen „X“ zu einer Spalte bei
- ⇒ müssen auf jeden Fall in der Überdeckung enthalten sein

Beispiel: Hier sind dies die beiden Primimplikanten A und C

Primimplikant	2	4	5	6	10	12	13	14	18	22	26	30	Kosten
A		X	X			X	X						3
B		X		X		X		X					3
C	X			X	X			X	X	X	X	X	2

⇒ A: 5, 13

⇒ C: 2, 10, 18, 22, 26, 30

⇒ B ist vollständig überdeckt und kann ebenfalls gestrichen werden

Weitere Vereinfachungen

- Weitere Reduktionsregeln zur Anwendung auf die Primimplikantentabelle

Def.: Ein Minterm n **dominiert** einen Minterm m, wenn jeder Primimplikant, der n überdeckt auch m überdeckt

- Spaltenregel:** Entferne alle Minterme, die einen anderen Minterm dominieren

Primimplikant	4	6	10	13	18	22	26
A	X	X	X		X		
B			X		X	X	X
C	X	X		X		X	X
D		X		X		X	

Entferne: 6, 10 oder 18, 22

Weitere Vereinfachungen

Primimplikant	4	10	13	26	Kosten
A	X	X			z
B		X		X	z
C	X		X	X	z
D			X		z

3. **Zeilenregel:** Entferne alle Primimplikanten, die durch einen anderen nicht teureren Primimplikanten dominiert werden.

Annahme: Im obigen Beispiel haben alle Primimplikanten die gleichen Kosten z → Entferne: D

Primimplikant	4	10	13	26
A	X	X		
B		X		X
C	X		X	X

Beobachtung: Es kann jetzt wieder die erste Reduktionsregel angewendet, da C essentiell ist.

Weitere Vereinfachungen

- Wenn man keine der Vereinfachungsregeln mehr anwenden kann, erhält man eine reduzierte Tabelle, auf die man andere Verfahren anwendet.

Das Minimierungsproblem auf der so reduzierten Tabelle ist NP-vollständig.

Aufwandsbetrachtungen

- Die Zeit zum Aufstellen der 1. Quineschen Tabellen ist in $O(3^n n^2)$.

Beweis: Es gibt $\binom{n}{i}$ Möglichkeiten i Variable aus n Variablen auszuwählen.

Jede Variable kann entweder positiv oder negiert vorkommen.

Die maximale Anzahl von (Prim)implikanten ist (verwende den Binomialsatz):

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^i = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^i 1^{n-i} = (2+1)^n = 3^n$$

Jeder Primimplikant wird mit höchstens n weiteren verglichen.

Jede Such- und Einsetzoperation kann man mit Hilfe von geeigneten Datenstrukturen (Heaps) in Zeit $O(\log 3^n) = O(n)$ durchführen.

Aufwandsbetrachtungen

- **Alle Verfahren benötigen 2 Schritte**
 - ⇒ 1. Erzeugen aller Primimplikanten (Primimplikate)
 - ⇒ 2. Auswahl der Primimplikanten (Primimplikate), welche die Minterme (Maxterme) mit minimalen Kosten überdecken

- **Die Anzahl der Primimplikanten (Primimplikaten) kann exponentiell steigen**
 - ⇒ Es gibt Funktionen mit $\frac{3^n}{n}$ Primimplikanten

- **Das Überdeckungsproblem ist **NP-vollständig****
 - ⇒ Es besteht wenig Hoffnung einen Algorithmus zu finden, der dieses Problem in einer Zeit, die polynomiell in der Zahl der Eingabevariablen ist, löst.