Das allgemeine Identifikationsproblem

- **Identifikationsproblem:**
  - **Erkennen der semantischen Gleichwertigkeit syntaktisch verschiedener Ausdrücke**

$$s \equiv t$$

- **Anwendungen beim Entwurf digitaler Systeme:**
  - **Verifikation**
  - **Simulation**
  - **Technologieabbildung**
  - **Optimierung**

Schreibweise

- **Menge aller Ausdrücke** $\mathcal{E}$
  - **Beispiel: Menge aller booleschen Ausdrücke** f, g **über** n **Variablen**
- **Äquivalenzrelation** $\equiv$
  - **Beispiel: Äquivalenz boolescher Funktionen**

$$f \equiv g \Leftrightarrow \forall (x_{n-1}, \cdots, x_0) \in B^n : f(x_{n-1}, \cdots, x_0) = g(x_{n-1}, \cdots, x_0)$$

- **Normalformoperator** N
  - **Simplifikator**
  - **Berechenbare Funktion**

$$N : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$$

  - **Erfüllt die Normalformtheoreme**

Normalformtheoreme

- **Normalformtheoreme:** $\forall t \in \mathcal{E}$
  - **Idempotenz** $N(N(t)) = N(t)$
  - **Äquivalenz** $N(t) \equiv t$
  - **Normalformeigenschaft** $t \equiv 0 \Leftrightarrow N(t) = 0$
- **Satz 9.5:** $\forall s, t \in \mathcal{E} : s \equiv t \Rightarrow N(s) \equiv N(t)$

Bew:

$$s \equiv N(s), t \equiv N(t), s \equiv t$$
$$\Rightarrow N(s) \equiv s \equiv t \equiv N(t)$$
$$\Rightarrow s \equiv t \equiv N(s) \equiv N(t)$$

•

Kanonische Normalform

- **Eine Normalform N(t) eines Ausdrucks t wird durch die Anwendung eines Normalformoperators N auf t erzeugt**
- **Normalformoperatoren werden häufig durch ein endliches Regelsystem beschrieben**
  - **Ersetzungsregeln**
  - **Termersetzungssysteme**
- **Kanonizität**
  - **Ein kanonischer Normalformoperator erfüllt zusätzlich die folgende Bedingung**

$$\forall s, t \in \mathcal{E} : s \equiv t \Leftrightarrow N(s) = N(t)$$

- **Er erlaubt, semantisch äquivalente Ausdrücke an Hand der syntaktischen Übereinstimmung der entsprechenden Normalform eindeutig zu identifizieren**

Nicht kanonische Normalformen

- **Kanonische Normalformen sind in vielen Anwendungen nicht zu erreichen**
  - **Schwächere Form der Normalformdefinition über das Nullelement**
  - **Differenz zweier Ausdrücke**

$$s \equiv t \Leftrightarrow M(s,t) \equiv 0$$

- **Das Identifikationsproblem kann mit Hilfe des Minusoperators auch so gelöst werden**
  - **es gilt aufgrund der Normalformeigenschaft:**

$$s \equiv t \Leftrightarrow N(M(s,t)) = 0$$

Beispiele: Boolesche Normalformen

- **Beispiele für drei Variablen (n=3):**
  - **Disjunktive Normalform**

$$f(x_1,x_2,x_3) = (\alpha_0 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_0) \vee (\alpha_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_0) \vee \ldots \vee (\alpha_7 \wedge x_2 \wedge x_1 \wedge x_0)$$

  - **Konjunktive Normalform**

$$f(x_1,x_2,x_3) = (\beta_0 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0) \wedge (\beta_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0) \wedge \ldots \wedge (\beta_7 \vee x_2 \vee x_1 \vee x_0)$$

  - **Reed-Muller Normalform**

$$f(x_1,x_2,x_3) = (\gamma_0 \wedge 1) \oplus (\gamma_1 \wedge x_0) \oplus \ldots \oplus (\gamma_7 \wedge x_2 \wedge x_1 \wedge x_0)$$

  - **Äquivalenzpolynom**

$$f(x_1,x_2,x_3) = (\delta_0 \vee 0) \equiv (\delta_1 \vee x_0) \equiv \ldots \equiv (\delta_7 \vee x_2 \vee x_1 \vee x_0)$$

Regelsystem für die Reed-Muller Normalform

- **Ersetzungsregeln**

$$s \wedge t \rightarrow s \wedge t$$
$$\bar{t} \rightarrow t \oplus 1$$
$$s \vee t \rightarrow s \wedge t \oplus s \oplus t$$
$$t \oplus t \rightarrow 0$$
$$t \oplus 0 \rightarrow t$$

- **Sowie die üblichen Rechenregeln**
  - **Kommutativität**
  - **Assoziativität**
  - **Distribution**

Zusammenfassung der wichtigsten Begriffe

- **Literal:** **Boolesche Variable**
- **Produktterm:** **UND-Verknüpfung von Literalen**
- **Implikant:** **Produktterm, der eine oder mehrere „1"-Stellen einer booleschen Funktion beschreibt (impliziert)**
- **Implikat:** **Disjunktion (ODER-Verknüpfung) von Literalen**
- **Minterm:** **Implikant, der genau eine „1"-Stelle einer booleschen Funktion beschreibt**
- **Maxterm:** **Implikat, der genau eine „0"-Stelle einer booleschen Funktion beschreibt**
- **Normalform:** **Darstellung einer Booleschen Funktion durch Minterme (DNF) oder Maxterme (KNF)**

9.3 Der Shannonsche Entwicklungssatz

- **DNF und KNF können durch einfache logische Umformungen in gewöhnliche disjunktive und konjunktive Formen gebracht werden**
  - **DF und KF**
- **Zur Berechnung der Normalformen ist der shannonsche Entwicklungssatz hilfreich**

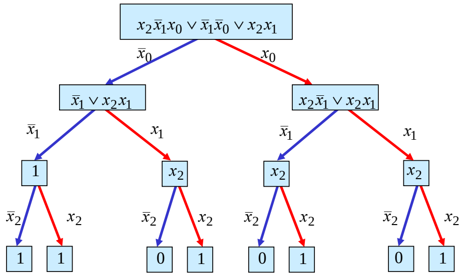
Satz 9.5: Für jede Boolesche Funktion $f(x_1,\ldots,x_n)$ **gilt**

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \left(x_i \wedge f(x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_n)\right) \vee \left(\bar{x}_i \wedge f(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n)\right)$$

- **Beispiel:**

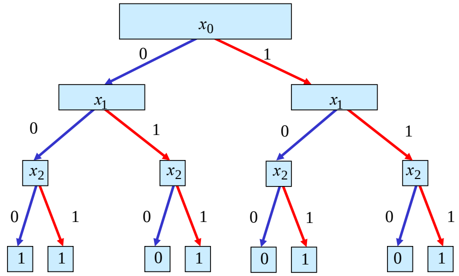
$$\begin{aligned} f(x_2,x_1,x_0) &= x_2\bar{x}_1x_0 \vee \bar{x}_1\bar{x}_0 \vee x_2x_1 \\ &= x_0(x_2\bar{x}_1 \vee x_2x_1) \vee \bar{x}_0(\bar{x}_1 \vee x_2x_1) \\ &= x_2\bar{x}_1x_0 \vee x_2x_1x_0 \vee \bar{x}_1\bar{x}_0 \vee x_2x_1\bar{x}_0 \\ &= x_2(\bar{x}_1x_0 \vee x_1x_0 \vee \bar{x}_1\bar{x}_0 \vee x_1\bar{x}_0) \vee \bar{x}_2(\bar{x}_1\bar{x}_0) \\ &= x_2x_1x_0 \vee x_2\bar{x}_1x_0 \vee x_2x_1\bar{x}_0 \vee x_2\bar{x}_1\bar{x}_0 \vee \bar{x}_2\bar{x}_1\bar{x}_0 \end{aligned}$$

Baumdarstellung



Binary Decision Diagram (BDD)

- Andere Interpretation der Shannon-Entwicklung

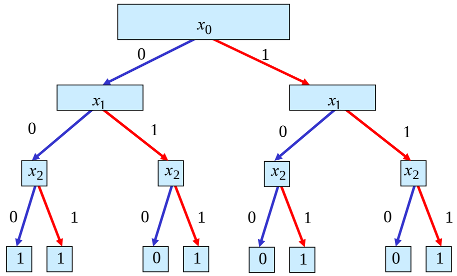


Reduzierte Baumdarstellungen

- Da die Variablen in allen Pfaden in der gleichen Reihenfolge auftauchen, spricht man auch von einem <u>ordered BDD</u> (OBDD)
- Ein BDD benötigt 2^n Knoten bei n Variablen
  - ⇨ Für viele Anwendung ist die Speicherung aller Knoten nicht notwendig
  - ⇨ Knoten, deren Nachfolger gleich sind, können eliminiert werden (Regel 1)
  - ⇨ Teile des Baumes, die genau so noch einmal vorkommen, können gemeinsam genutzt werden (Regel 2)
- Es entsteht ein bezüglich einer Ordnung der Variablen eindeutiger reduzierter Baum

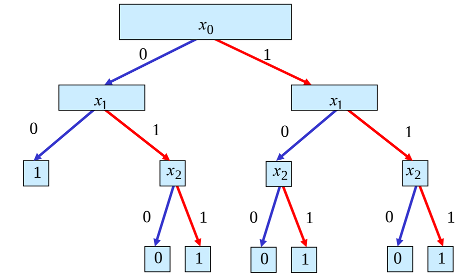
Reduced Ordered BDD (ROBDD)

Ausgangsgraph



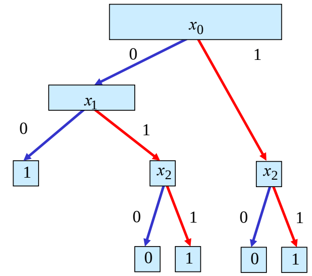
Reduced Ordered BDD (ROBDD)

Regel 1



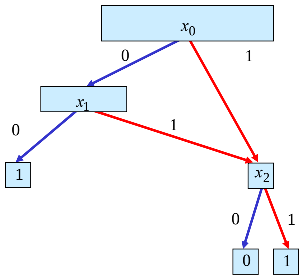
Reduced Ordered BDD (ROBDD)

Regel 1



Reduced Ordered BDD (ROBDD)

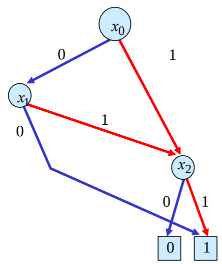
Regel 2



Anwendung 1: Simulation

- Der Funktionswert wird ausgehend von der Wurzel ermittelt
  - ⇨

$$f(x_2, x_1, x_0) = 0 \quad \text{für } x_2 = 0, x_1 = 1, x_0 = 0$$



Anwendung 2: Verifikation

- Die Gleichung

$$s \equiv t \Leftrightarrow N(M(s,t)) = 0$$

kann umgeschrieben werden zu

$$s \equiv t \Leftrightarrow BDD(s \oplus t) = 0$$