Grundlagen der Technischen Informatik I

Digitaltechnik

Prof. Dr. U. Kebschull

Technische Informatik

Sprechstunde: Mi 11:00 -12:00 Uhr

kebschull@informatik.uni-leipzig.de

Ziele der Vorlesungen TI 1 und TI 2

- Physikalische und elektrotechnische Grundlagen mit Bezug zur Rechnertechnik
  - ⇨ Digitale Schaltungstechnik
  - ⇨ Der Transistor als Schalter
- Digitale Schaltungen
  - ⇨ Darstellung
  - ⇨ Entwurf
  - ⇨ Minimierung
  - ⇨ Realisierung
- Aufbau und Funktionsweise von Rechnersystemen
  - ⇨ Bausteine
  - ⇨ Komponenten
  - ⇨ Funktionsweise
  - ⇨ Peripherie

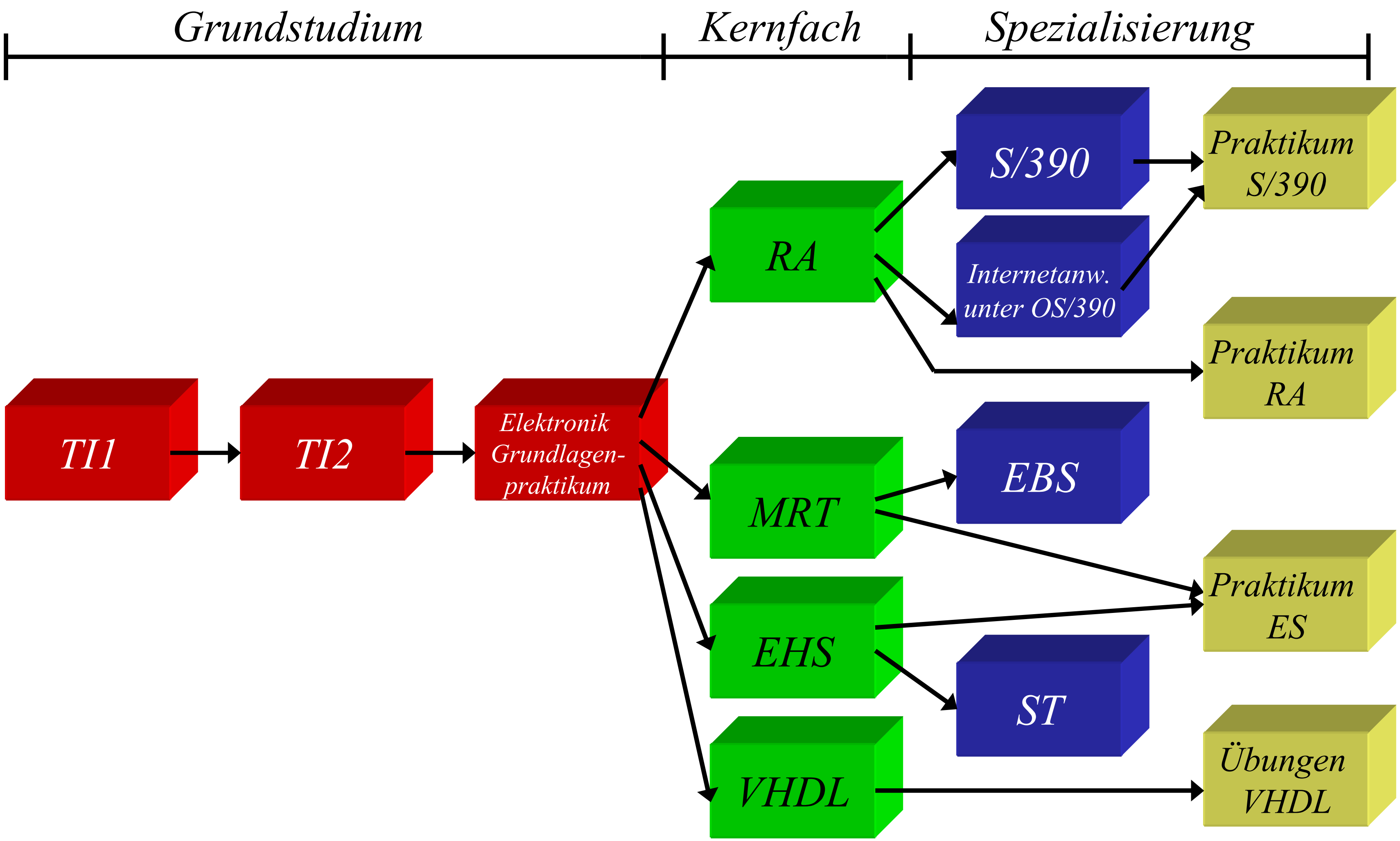
Inhalt der Vorlesungen TI1 und TI2

- **Elektrotechnische Grundlagen**
  - ⇨ **Einfache physikalische Zusammenhänge, die verwendet werden um Schaltvorgänge in Rechnersystemen durchzuführen**
- **Halbleitertechnologie**
  - ⇨ **Funktionsweise von Dioden und Transistoren**
  - ⇨ **Einsatz von Transistoren als Schalter**
- **Digitale Schaltungen**
  - ⇨ **Entwurf, Darstellung und Optimierung von Schaltnetzen und Schaltwerken**
  - ⇨ **Einfache Bausteine aus denen Rechnersysteme aufgebaut sind**

Inhalt der Vorlesungen TI1 und TI2

- **Einführung in die Rechnerarchitektur**
  - **Funktion und Aufbau komplexer Bausteine**
  - **Komponenten aus denen Rechnersysteme aufgebaut sind**
- **Rechnerarithmetik**
  - **Darstellung von Zahlen und Zeichen in Rechnersystemen**
  - **Algorithmen zur Berechnung von Operationen wie die vier Grundrechenarten**
- **Aufbau eines PCs**
  - **Komponenten**
  - **Busse**
  - **Peripherie**

Übersicht der Lehrveranstaltungen TI



Übersicht

1 Geschichtliche Übersicht

2 Physikalische Grundlagen

- ⇨ Elektrische Ladung
- ⇨ Gleichstrom, Ohmsches Gesetz, Kirchhoffsche Gesetze

3 Halbleitertechnologie

- ⇨ Dioden
- ⇨ Bipolare und FET- Technologie
- ⇨ Der Transistor als Schalter
- ⇨ NMOS- PMOS und CMOS-Schaltkreise
- ⇨ CMOS-Grundschaltungen

Übersicht

4 Herstellung elektronischer Schaltungen

- ⇨ **Herstellung von Wafern**
- ⇨ **Entstehung eines n-MOS-Transistors**
- ⇨ **Entstehung von CMOS-Schaltungen**

5 Schaltnetze

- ⇨ **Boolesche Algebra**
- ⇨ **Normalformen**
- ⇨ **Darstellung Boolescher Funktionen**

6 Minimierung von Schaltnetzen

- ⇨ **KV-Diagramme**
- ⇨ **Minimierung nach Quine MC-Cluskey**
- ⇨ **Bündelminimierung**

Literatur zu dieser Vorlesung

- **Die Vorlesung basiert auf dem Lehrbuch:**
  - ⇨ **W. Schiffmann, R. Schmitz:"Technische Informatik 1 Grundlagen der digitalen Elektronik"**
    Springer-Lehrbuch, Springer (2001).

- **Weitere Empfehlungen:**
  - ⇨ **M. Reisch: „Elektronische Bauelemente", Springer (1996)**
  - ⇨ **Hütte: „Die Grundlagen der Ingenieurwissenschaften"**
    30. Auflage, Springer (1996)
  - ⇨ **U. Titze, C. Schenk: „Halbleiter Schaltungstechnik" 11. Auflage, Springer (1999)**

1 Historischer Überblick

- **Griechenland 6. Jh. v.Chr.**
  - **Mit Seidentuch geriebener Bernstein zieht Staubteilchen, Wollfäden u.a. Körper an. Name: Elektron = Bernstein Magneteisenstein zieht Eisen an**
- **Gilbert, William 1540-1603**
  - **führt den Begriff *Elektrizität* ein**
- **Coulomb, Charles 1736-1806**
  - **Coulombsches Gesetz**
- **Galvani, Luigi 1737-1798**
  - **Galvanische Elemente: Stromquellen deren Energie durch chemische Vorgänge frei wird**

Historischer Überblick

- **Volta, Alessandro 1745-1827**
  - ⇨ **führt die Arbeit Galvanis fort. Konstruiert die Voltaische Säule, die erste brauchbare Elektrizitätsquelle. Von ihm stammt der Begriff des stationären elektrischen Stromes**
- **Oerstedt, Hans Christian 1777-1851**
  - ⇨ **entdeckt 1820 die Ablenkung der Magnetnadel durch elektrischen Strom (Elektromagnetismus)**
- **Ampere, Andre Marie 1775-1836**
  - ⇨ **entdeckt die mechanische Wirkung stromdurchflossener Leiter aufeinander (Elektrodynamisches Gesetz). Nach ihm wurde die Einheit der Basisgröße Stromstärke benannt**
- **Faraday, Michael 1791-1867 Elektromagnetische Induktion**
- **Ohm, Georg Simon 1787-1854 Ohmsches Gesetz**

Historischer Überblick

- **Siemens, Werner 1816-1892**
  - ⇨ **Elektrische Maschinen (dynamoelektrisches Prinzip)**
- **Kirchhoff, Gustav Robert 1824-1887**
  - ⇨ **entdeckt die Gesetze der Stromverzweigung.**
- **Maxwell, James Clerk 1831-1879**
  - ⇨ **Maxwellsche Gleichungen: Beschreiben alle Erscheinungen, bei denen Elektrizität und Magnetismus miteinander verknüpft sind**
- **Hertz, Heinrich 1857-1894**
  - ⇨ **entdeckt experimentell die elektromagnetischen Wellen**
- **Edison, Thomas Alva 1847-1931**
  - ⇨ **Erfinder verschiedener Elektrogeräte: Telegraph, Kohlemikrophon, Glühlampe, u.a. Baut 1882 das erste Elektrizitätswerk**

Historischer Überblick

- **1886 Lochkarte**
  - ⇨ **Herman Hollerith (1860-1929) benutzt die Lochkartentechnik zur Datenverarbeitung. Es handelt sich dabei um ein elektromechanisches Verfahren.**
- **1941 Z 3**
  - ⇨ **Konrad Zuse baut die erste funktionsfähige Datenverarbeitungsanlage mit Programmsteuerung in Relaistechnik.**

Historischer Überblick

- **1946 Eniac**
  - ⇨ **Die erste Computergeneration basiert auf der Röhrentechnik Die Erfinder sind J. Presper Eckert und J. William Mauchly und die logische Konzeption stammt von J. von Neuman**
- **1955 Die zweite Computergeneration**
  - ⇨ **Shockley, Bardeen und Brattain entdecken 1948 die Transistorwirkung und legen damit den Grundstein für die Mikroelektronik**
- **1960 Integrierte Schaltkreise (IC)**
  - ⇨ **Die Funktionen von Transistoren, Widerständen und Dioden werden in Planartechnik auf ein Halbleiter-Plättchen aufgebracht**

2 Physikalische Grundlagen

2.1 Elektrische Ladung

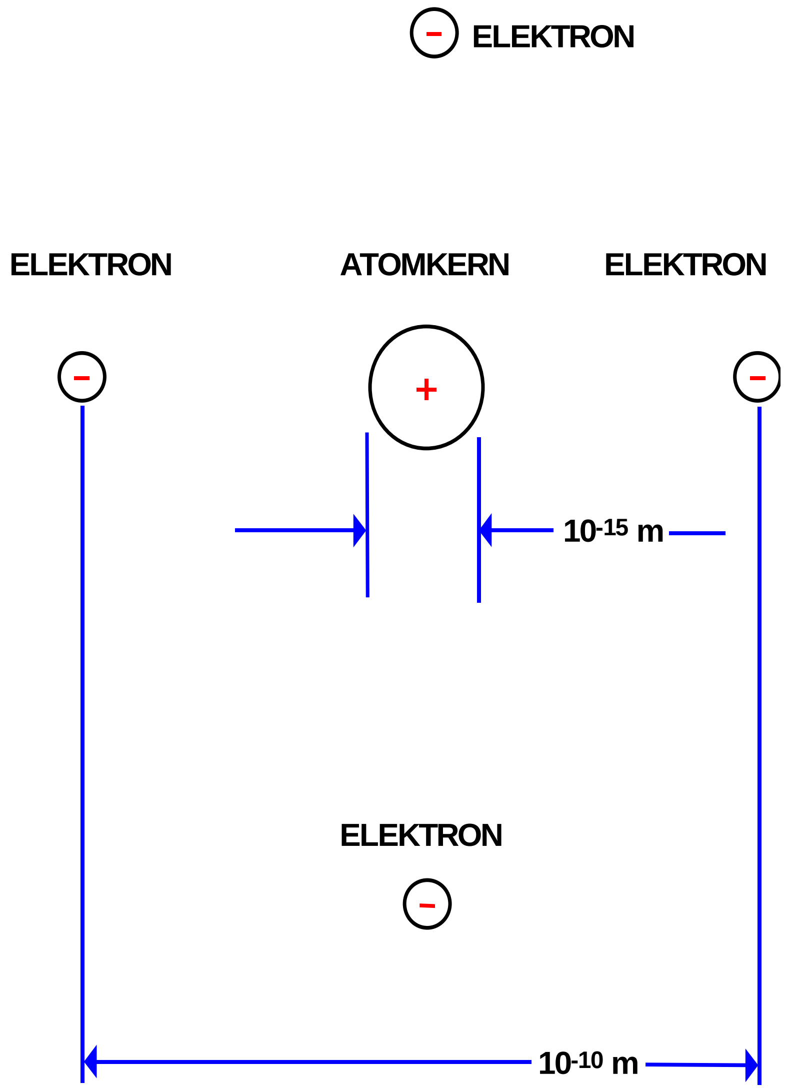
- Die Einheit der elektrischen Ladung ist

  $1C = 1As$

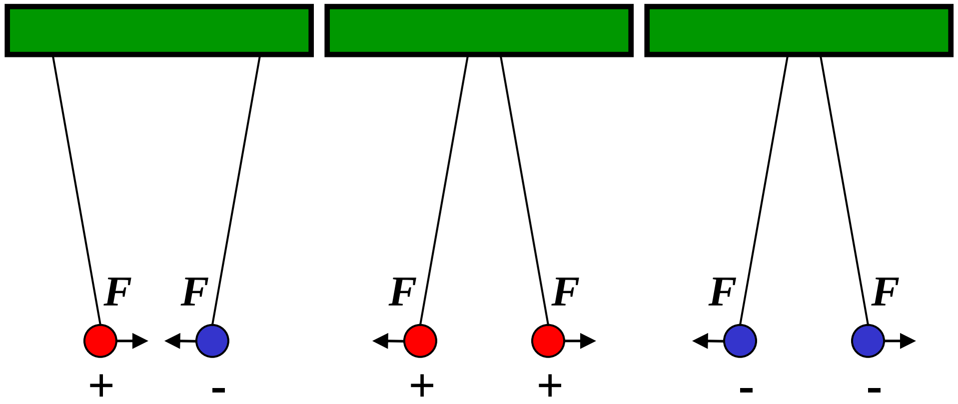
- Die elektrische Ladung eines Elektrons beträgt

  $e_0 = 1{,}602 * 10^{-19}\ C$

- Man benötigt
  $6{,}242 * 10^{18}$ Elektronen
  um die Ladung 1 C zu erhalten

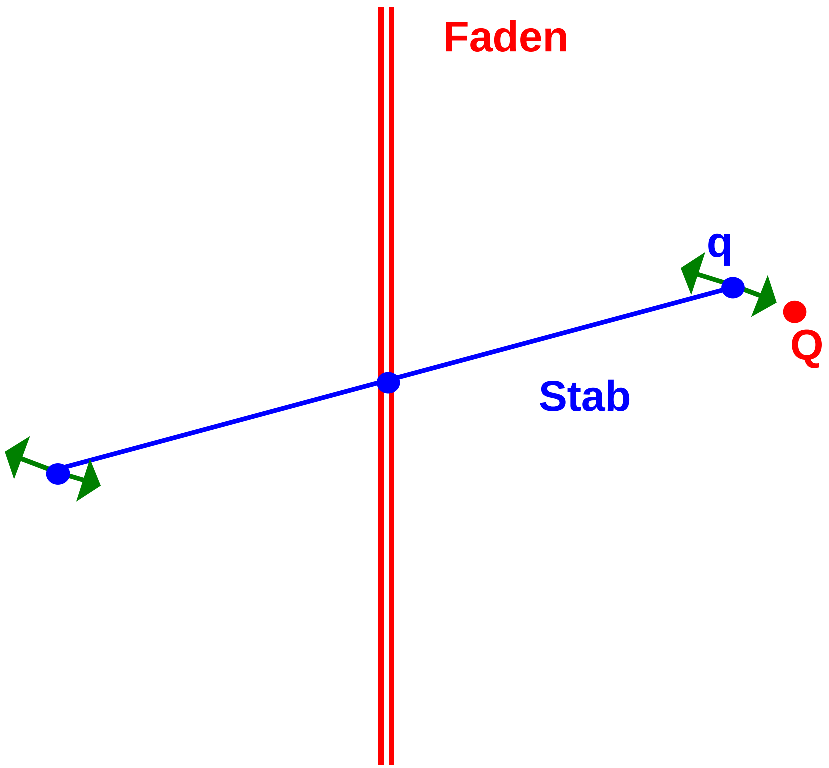


Elektrische Kraft



- **Elektrische Ladungen üben Kräfte aufeinander aus**
  - **ungleiche Ladungen ziehen sich an**
  - **gleiche Ladungen stoßen sich ab**

Messung der Kraft

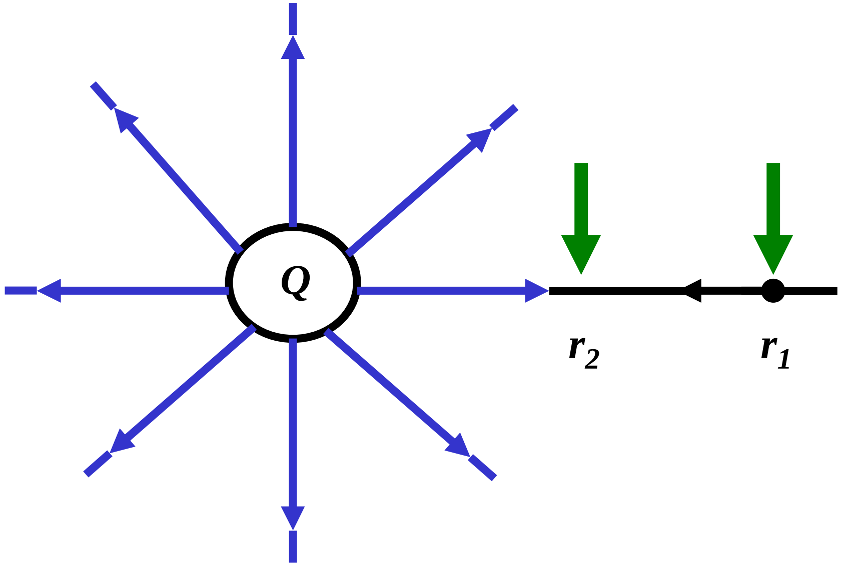


Torsionswaage (Coulomb, 1785)

- **Für zwei <u>Punktladungen</u> Q und q im Vakuum und im Abstand d gilt:**
  - ⇨ **Die Kraft ist proportional dem Produkt der beiden Ladungen**
    $$F \sim Q \cdot q$$
  - ⇨ **Die Kraft ist umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands** $F \sim \frac{1}{d^2}$
  - ⇨ **Zusammengefasst ergibt sich:**
    $$F \sim \frac{Q \cdot q}{d^2}$$
  - ⇨ **Vektoriell und mit Definition der Konstante:**
    $$\vec{F} = q \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{d^2} \cdot \vec{r}_0$$

U. Kebschull

Die elektrische Spannung



- Wird eine Ladung in einem elektrischen Feld bewegt, so muss Arbeit verrichtet werden

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

- Damit beträgt die Arbeit um eine Ladung q von r_1 nach r_2 zu bewegen

$$W_{r_1 \to r_2} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot dr$$

Die elektrische Spannung

- **Die Spannung zwischen r_1 und r_2 wird definiert als die Arbeit, die verrichtet werden muss, um die Elementarladung q von r_1 nach r_2 zu bewegen, normiert um die Ladung q**

$$U_{r_1 \to r_2} = \frac{W_{r_1 \to r_2}}{q}$$

$$\textbf{Spannung} = \frac{\textbf{Arbeit}}{\textbf{Ladung}}$$

$$1\,\mathrm{V} = 1\frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{C}}$$

2.2 Der elektrische Strom

- **Elektrischer Strom ist der Fluss von Elektronen**
- **Die Stromstärke I entspricht der bewegten Ladungsmenge pro Zeiteinheit**

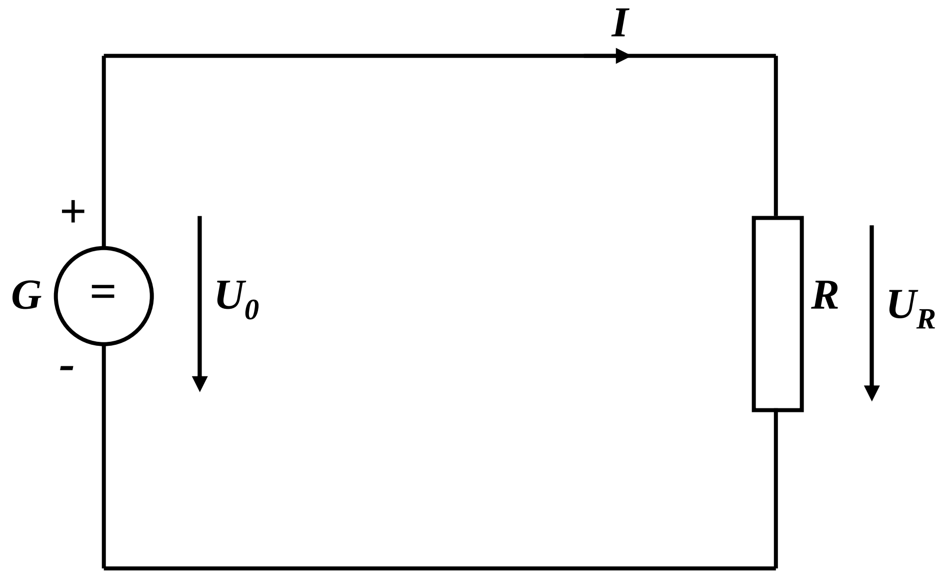
$$I = \frac{Q}{t}$$

- **Fließen durch einen Leiter pro Sekunde *n* Coulomb [C], so messen wir einen Strom von *n* Ampere [A]**

$$1\,\mathrm{A} = 1\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}} = \frac{1}{1{,}602} \cdot 10^{19}\,\frac{\text{Elektronen}}{\mathrm{s}}$$

Elektrischer Stromkreis

- **Ein elektrischer Stromkreis ist eine Anordnung aus**
  - **Stromerzeuger *G* (Generator)**
  - **Verbraucher *R***
  - **Verbindungsleitungen**
- **In *G* wird Energie aufgewendet**
  - **(W< 0)**
- **In R wird Energie verbraucht**
  - **(W> 0)**
- **Der elektrische Strom fließt (per Definition) von Plus (+) nach Minus (-)**
- **Die Elektronen fließen von Minus (-) nach Plus (+)**
- **Spannung im Stromerzeuger *G* bewirkt im Verbraucher R einen Stromfluss von von Plus nach Minus (Pfeilrichtung)**

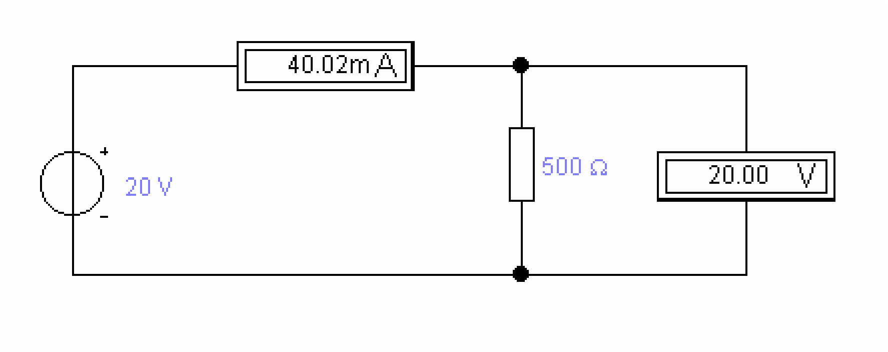


Leitwert und Widerstand

- **Zahlenmäßiger Zusammenhang zwischen Spannung und Strom an einem Verbraucher**
  - ⇨ **Der gemessene Strom *I* ist proportional zur Spannung *U***

$$I \sim U$$

$$I = G \cdot U$$



- **Der Proportionalitätsfaktor *G* wird Leitwert genannt**
- **Die Einheit von *G* ist *Siemens***

$$1\mathrm{S} = 1\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}}$$

- **in der Praxis verwendet man den Kehrwert von *G*, den Widerstand *R***

$$R = \frac{1}{G}$$

2.3 Ohmsches Gesetz

- **Es gibt einen festen Zusammenhang zwischen dem Strom *I* und der Spannung *U***
  - **ohmsches Gesetz**

$$I = \frac{1}{R} \cdot U$$

$$U = R \cdot I$$

$$R = \frac{U}{I}$$

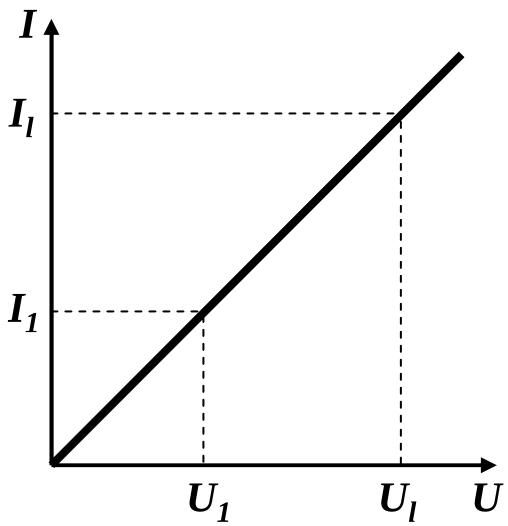
- **Die Einheit für den Widerstand ist Ohm Ω**

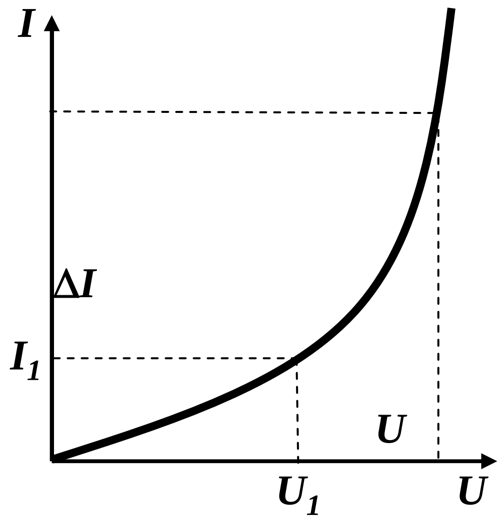
$$1\Omega = 1\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}$$

Kennlinien

- **Der Zusammenhang zwischen dem Strom *I* und der Spannung *U* kann in einer Kennlinien dargestellt werden**
  - ⇨ **X-Achse: Spannung *U***
  - ⇨ **Y-Achse: Strom *I***
- **Ist der Proportionalitätsfaktor *G* konstant, so spricht man von einem *linearen* Widerstand**
- **Beispiel: metallische Leiter sind lineare Widerstände; er ist**
  - ⇨ **proportional zur Länge *l***
  - ⇨ **umgekehrt proportional zur Fläche *A***
  - ⇨ **abhängig vom Material**

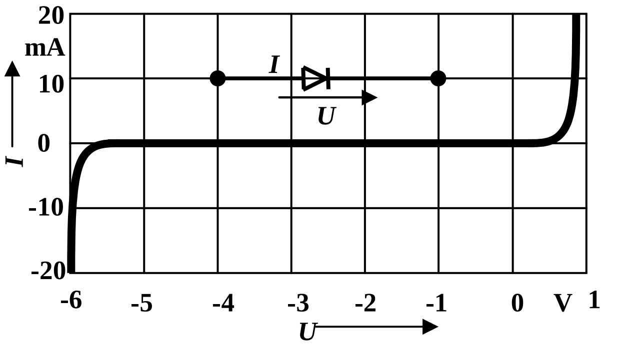
$$R = \rho \frac{l}{A} \qquad [\rho] = \Omega \frac{\mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$$



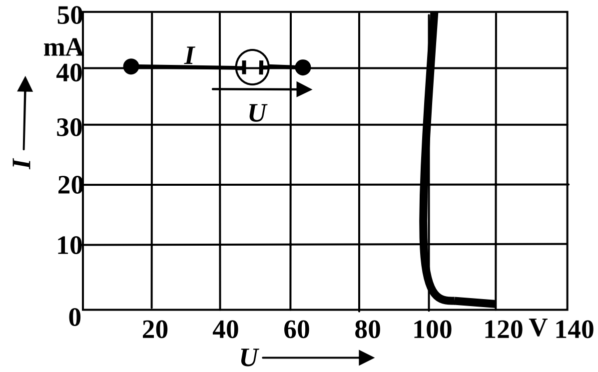


Kennlinien verschiedener Bauelemente

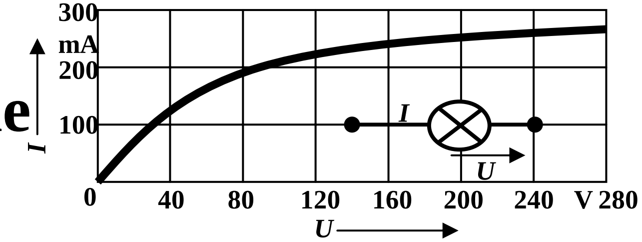
Diode



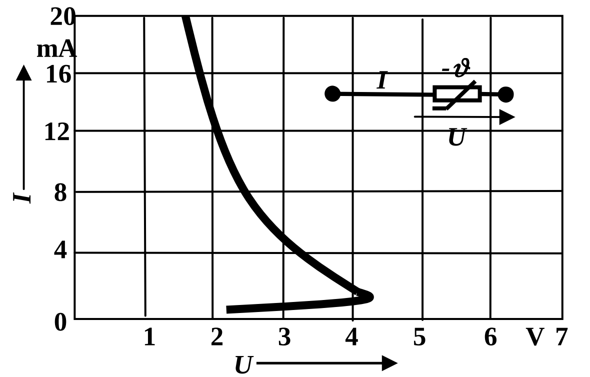
Glimm-lampe



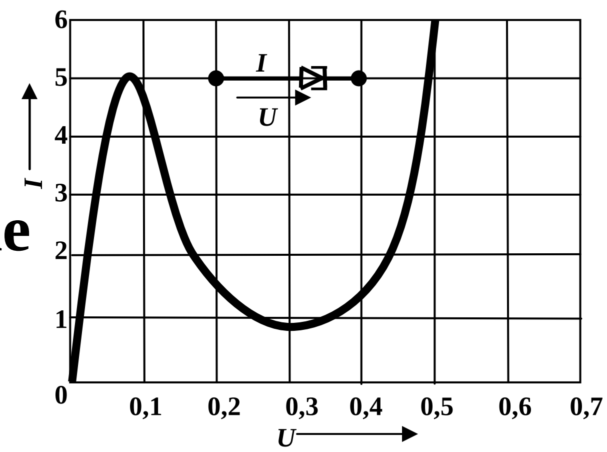
Glühbirne



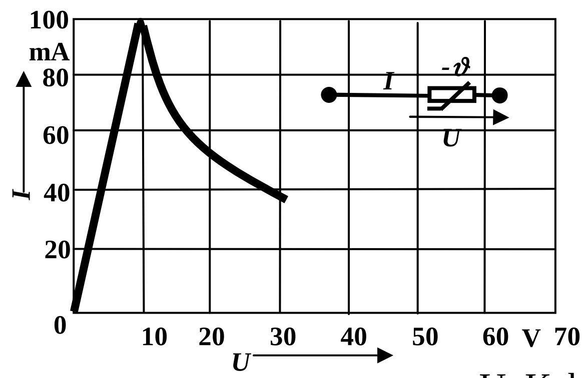
Heiß-leiter



Tunneldiode



Kalt-leiter



Leistung des elektrischen Stroms

- **Die elektrische Leistung *P* entspricht der (elektrischen) Arbeit pro Zeiteinheit**

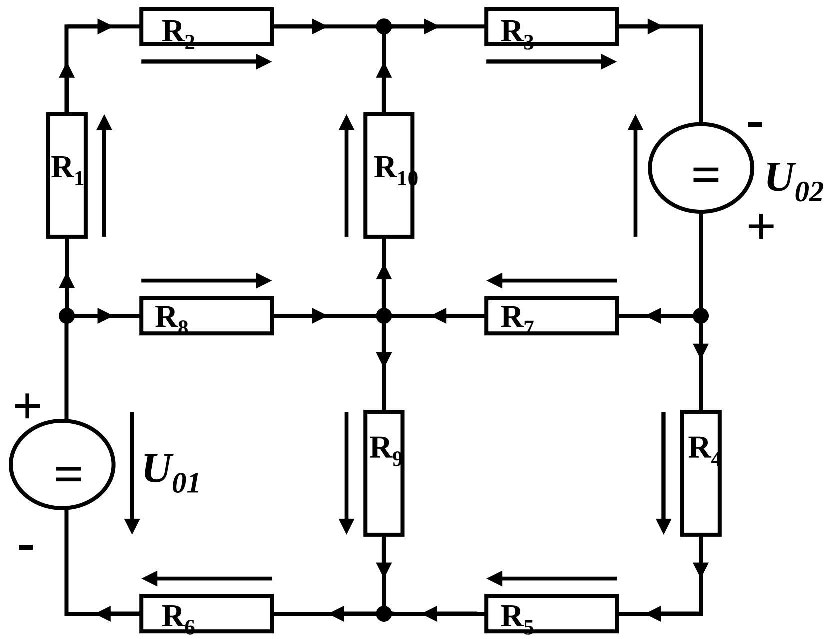
$$P = \frac{W}{t} = U \cdot I = I^2 R = \frac{U^2}{R}$$

- **Die Einheit der elektrischen Leistung ist Watt (W)**

$$1\mathrm{W} = 1\mathrm{VA}$$

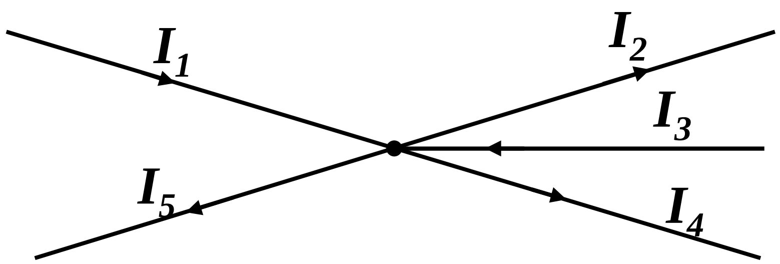
2.4 Die kirchhoffschen Sätze

- **Nur selten wird an einem Stromerzeuger *G* nur ein einzelner Verbraucher *R* angeschlossen**
- **Eine Anordnung aus Spannungsquellen und Verbrauchen heißt Netz**
- **Es besteht aus Knoten und Maschen**
  - **Knoten: Verzweigungspunkte**
  - **Masche: Pfad, bei dem kein Knoten mehrfach durchlaufen wird**
- **Richtung der Pfeile (Vorzeichen)**
  - **Spannung ist von Plus nach Minus gerichtet**
  - **Strom fließt von Plus nach Minus**



Knotenregel (1. kirchhoffscher Satz)

- **In einem Knoten ist die Summe aller Ströme Null**
  - ⇨ **An keiner Stelle des Netzes werden Ladungen angehäuft**



- **Definition der Stromrichtung für die mathematische Formulierung**
  - ⇨ **zufließende Ströme werden mit einem positiven Vorzeichen behaftet**
  - ⇨ **abfließende Ströme werden mit einem negativen Vorzeichen behaftet**

$$0 = I_1 - I_2 + I_3 - I_4 - I_5$$

oder

$$I_2 + I_4 + I_5 = I_1 + I_3$$

allgemein

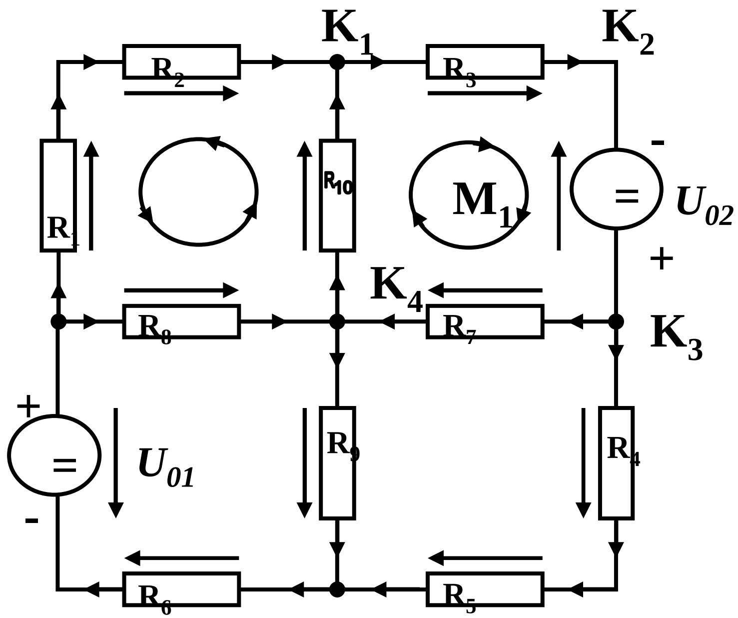
$$\sum_{i=0}^{n} I_i = 0$$

Maschenregel (2. kirchhoffscher Satz)

- **Bei einem geschlossenen Umlauf einer Masche ist die Summe aller Spannungen Null**
  - **die Spannungsquellen erzeugen die Spannungen U_{01} und U_{02}**
  - **durch die Widerstände fließt ein Strom**
  - **nach dem Ohmschen Gesetz gilt für die Spannung**

$$U = R \cdot I$$

  - **die Knotenpunkte K_1, K_2, K_3 und K_4 können deshalb unterschiedliches Potenzial besitzen**



Maschenregel (2. kirchhoffscher Satz)

- **Werden die Knotenspannungen addiert, so folgt:**

$$U_{K_{12}} + U_{K_{23}} + U_{K_{34}} + U_{K_{14}} = 0$$

- **Vorzeichen der Spannung**
  - **die Spannungsrichtung der Quellen ist vorgegeben (von + nach -)**
  - **Umlaufrichtung der Masche wird festgelegt**
  - **Spannungspfeile gegen die Umlaufrichtung werden negativ gezählt**
  - **Spannungspfeile mit der Umlaufrichtung werden positiv gezählt**

$$U_{K_{12}} - U_{02} + U_{K_{34}} + U_{K_{14}} = 0$$

$$U_{K_{12}} + U_{K_{34}} + U_{K_{14}} = U_{02}$$

Anwendung 1: Knotenregel

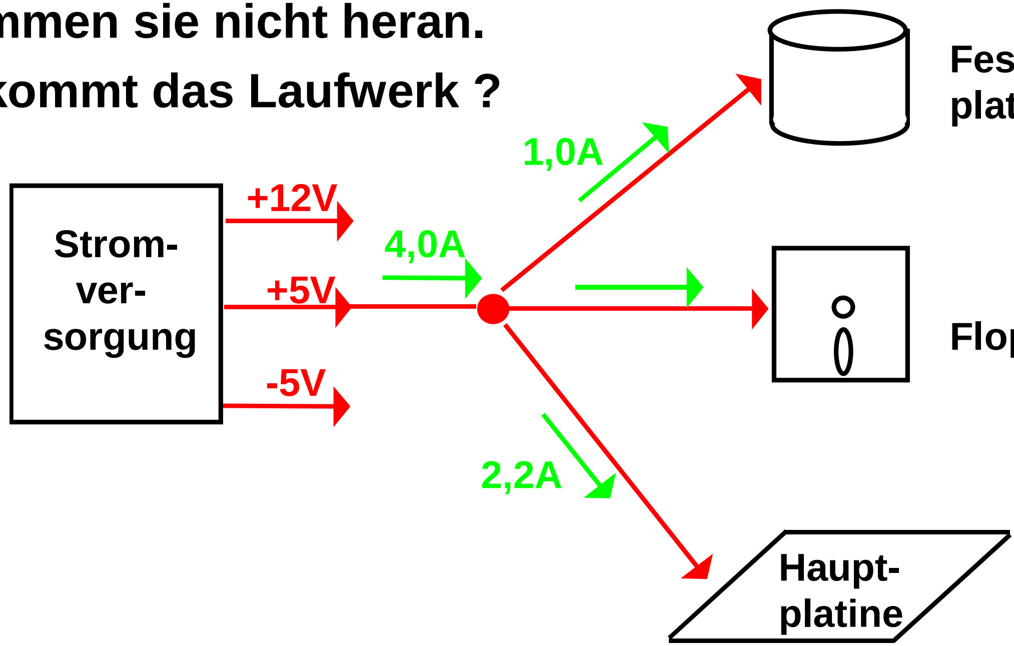
Sie haben einen neuen Personal Computer gekauft.

Sie benutzen ein Strommeßgerät (Ampere-Meter) und stellen damit fest, dass die 5 Volt Stromversorgung Ihres PC im eingeschalteten Zustand 4,0 A liefert. Versorgt wird damit die Hauptplatine, das Festplattenlaufwerk und das Floppy Laufwerk.

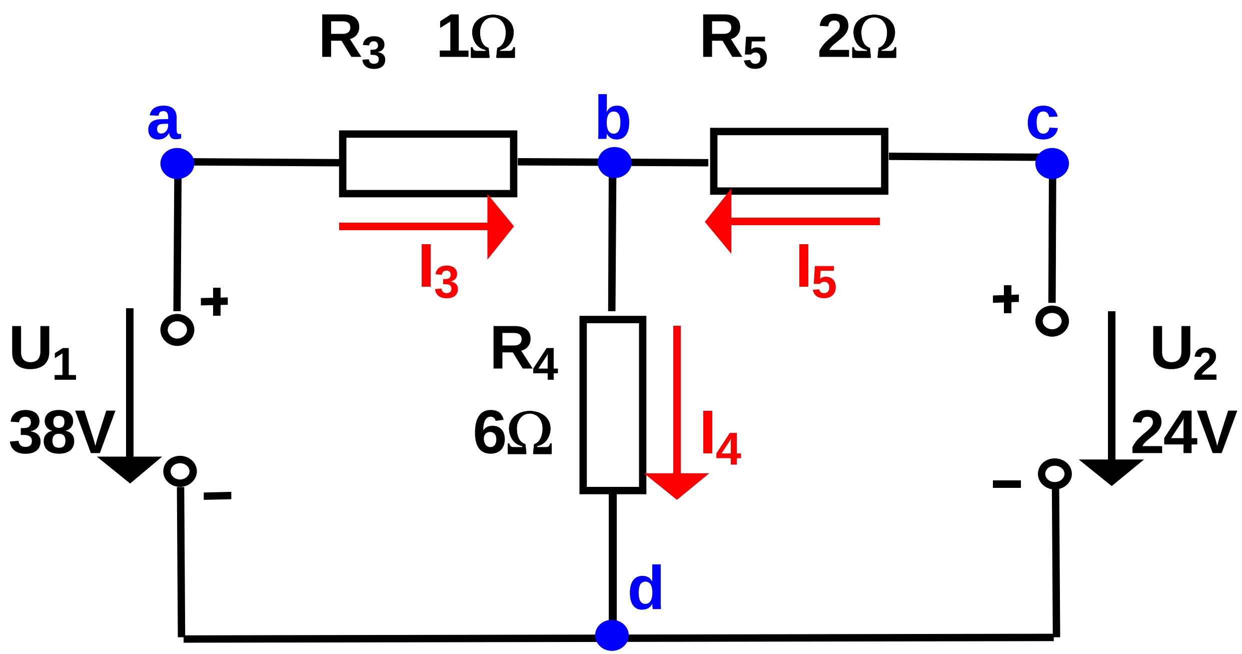
Sie messen, dass der Strom in die Hauptplatine 2,2 A beträgt und der Strom in die Festplatte 1,0 A.

An das Floppylaufwerk kommen sie nicht heran.

Wieviel Strom zu 5 Volt bekommt das Laufwerk ?



Anwendung 2: Knoten- und Maschenregel



- **Gesucht sind I_3, I_4 und I_5**
- **Knotenregel:** $\sum I_b = +I_3 - I_4 + I_5 = 0$ $\quad I_3 - I_4 + I_5 = 0\text{A}$
- **Maschenregel:** $\sum U_{abd} = U_1 - I_3 R_3 - I_4 R_4 = 0$ $\quad 1\Omega \cdot I_3 + 6\Omega \cdot I_4 = 38\text{V}$

$\sum U_{cbd} = U_2 - I_5 R_5 - I_4 R_4 = 0$ $\quad 2\Omega \cdot I_5 + 6\Omega \cdot I_4 = 24\text{V}$

Substitutionsmethode

$$I_3 + I_5 = I_4 \qquad I_4 = 8\text{A} - 3\text{A} = 5\text{A}$$

$$1\Omega \cdot I_3 + 6\Omega \cdot (I_3 + I_5) = 38\text{V}$$

$$2\Omega \cdot I_5 + 6\Omega \cdot (I_3 + I_5) = 24\text{V}$$

$$(1+6)\Omega \cdot I_3 + 6\Omega \cdot I_5 = 38\text{V}$$

$$6\Omega \cdot I_3 + (6+2)\Omega \cdot I_5 = 24\text{V}$$

$$I_3 = \frac{38 - (6 \cdot -3)}{7}\text{A} = \frac{38+18}{7}\text{A} = \frac{56}{7}\text{A} = 8\text{A}$$

$$I_3 = \frac{38\text{V} - 6\Omega \cdot I_5}{7\Omega}$$

$$6\Omega \cdot \frac{38V - 6\Omega \cdot I_5}{7\Omega} + 8\Omega \cdot I_5 = 24V$$

$$6 \cdot 38\text{V} - 36\Omega \cdot I_5 + 56\Omega \cdot I_5 = 24 \cdot 7\text{V}$$

$$20\Omega \cdot I_5 = 168\text{V} - 228\text{V}$$

$$I_5 = -\frac{60\text{V}}{20\Omega} = -\frac{60}{20}\text{A} = -3\text{A}$$

Negatives Vorzeichen, da falsche Annahme der Stromrichtung

Lösung über Determinaten

System von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}X_1 & + & a_{12}X_2 & + & a_{13}X_3 & + & \cdots & a_{1n}X_n & = & b_1 \\ a_{21}X_1 & + & a_{22}X_2 & + & a_{23}X_3 & + & \cdots & a_{2n}X_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ a_{n1}X_1 & + & a_{n2}X_2 & + & a_{n3}X_3 & + & \cdots & a_{nn}X_n & = & b_n \end{array}$$

Determinate der Koeffizienten des Gleichungssystems

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Cramersche Regel

$$X_1 = \frac{1}{D} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{D_1}{D}$$

Berechnung von Determinaten

- **Determinante 2. Ordnung**

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- **Determinate 3. Ordnung**

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Berechnung von Determinaten

- **Determinate 4. Ordnung**

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{41} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

Für das Beispiel

- **Gleichungssystem**

$$
\begin{aligned}
I_3 - I_4 + I_5 &= 0\text{A} \\
1\Omega \cdot I_3 + 6\Omega \cdot I_4 &= 38\text{V} \\
6\Omega \cdot I_4 + 2\Omega \cdot I_5 &= 24\text{V}
\end{aligned}
$$

- **Determinate D**

$$
\begin{aligned}
D = &\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1\Omega & 6\Omega & 0\Omega \\ 0\Omega & 6\Omega & 2\Omega \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot 6\Omega \cdot 2\Omega + (-1) \cdot 0\Omega \cdot 0\Omega + 1\Omega \cdot 6\Omega \cdot 1 \\
&\quad - 1 \cdot 6\Omega \cdot 0\Omega - (-1) \cdot 1\Omega \cdot 2\Omega - 0\Omega \cdot 6\Omega \cdot 1 \\
&= 12\Omega^2 + 6\Omega^2 + 2\Omega^2 = 20\Omega^2
\end{aligned}
$$

Für das Beispiel

- **Für I_5**

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0\text{A} \\ 1\Omega & 6\Omega & 38\text{V} \\ 0\Omega & 6\Omega & 24\text{V} \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 6\Omega \cdot 24\text{V} + (-1) \cdot 38\text{V} \cdot 0\Omega + 1\Omega \cdot 6\Omega \cdot 0\text{A}$$

$$- 0\text{A} \cdot 6\Omega \cdot 0\Omega - (-1) \cdot 1\Omega \cdot 24\text{V} - 38\text{V} \cdot 6\Omega \cdot 1$$

$$= 6 \cdot 24\Omega\text{V} + 24\Omega\text{V} - 38 \cdot 6\Omega\text{V}$$

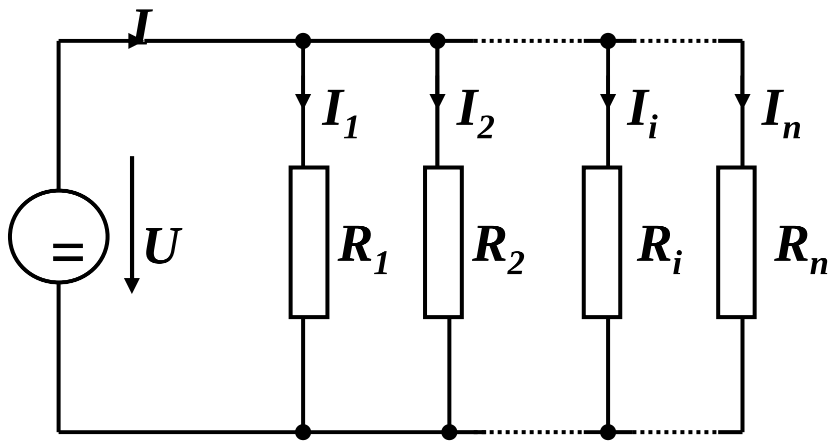
$$= 144\Omega\text{V} + 24\Omega\text{V} - 228\Omega\text{V} = -60\Omega\text{V}$$

$$I_5 = \frac{D_5}{D} = \frac{-60\Omega\text{V}}{20\Omega^2} = -3\frac{\text{V}}{\Omega} = -3\text{A}$$

Sonderfall 1: Parallelschaltung von Widerständen

- **Für die Teilströme I_1, I_2,...,I_n gilt:**

$$I_1 = \frac{U}{R_1}, I_2 = \frac{U}{R_2}, \ldots, I_n = \frac{U}{R_n}$$



- **Nach der Knotenregel ist der Gesamtstrom:**

$$I = I_1 + I_2 + \ldots + I_n$$

$$= \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \ldots + \frac{U}{R_n}$$

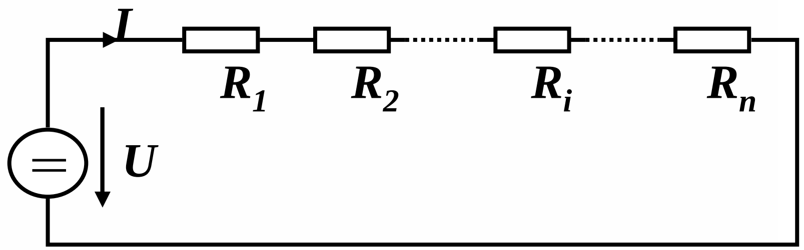
$$= U \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n} \right)$$

- **Der Ersatzwiderstand der gesamten Schaltung berechnet sich durch:**

$$\frac{1}{R_{gesamt}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}$$

Sonderfall 2: Reihenschaltung von Widerständen

- **Für die Spannungen U_1, U_2,...,U_n an den Widerständen gilt:**



$$U_1 = I \cdot R_1, U_2 = I \cdot R_2, ..., U_n = I \cdot R_n$$

- **Nach Maschenregel ist die Gesamtspannung:**

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 + ... + U_n \\ &= I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + ... + I \cdot R_n \\ &= I \cdot (R_1 + R_2 + ... + R_n) \end{aligned}$$

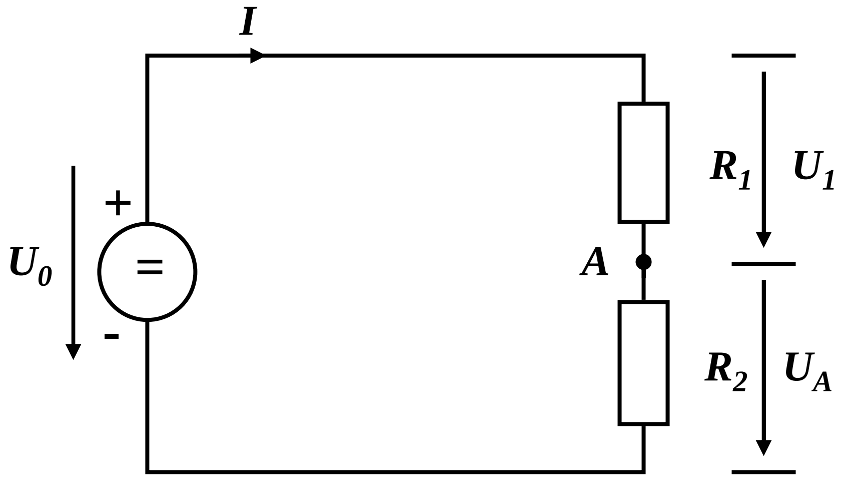
- **Der Ersatzwiderstand der gesamten Schaltung berechnet sich durch:**

$$R_{gesamt} = R_1 + R_2 + ... + R_n$$

Sonderfall 3: Spannungsteiler

- Reihenschaltung von zwei Widerständen
- Für das Verhältnis der Spannungen U_1 und U_2 gilt:

$$I = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_A}{R_2} \Rightarrow \frac{U_1}{U_A} = \frac{R_1}{R_2}$$



- Ist U_0, R_1 und R_2 gegeben, so folgt für U_A:

$$\frac{U_1}{U_A} = \frac{R_1}{R_2},\ U_1 = U_0 - U_A \Rightarrow \frac{U_0 - U_A}{U_A} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$\Rightarrow \frac{U_0}{U_A} - \frac{U_A}{U_A} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$\Rightarrow \frac{U_0}{U_A} = \frac{R_1}{R_2} + 1$$

$$\Rightarrow U_A = \frac{U_0}{\frac{R_1}{R_2} + 1}$$

Sonderfall 4: Potentiometerschaltung

- **Bei einem Potentiometer gilt zusätzlich:**

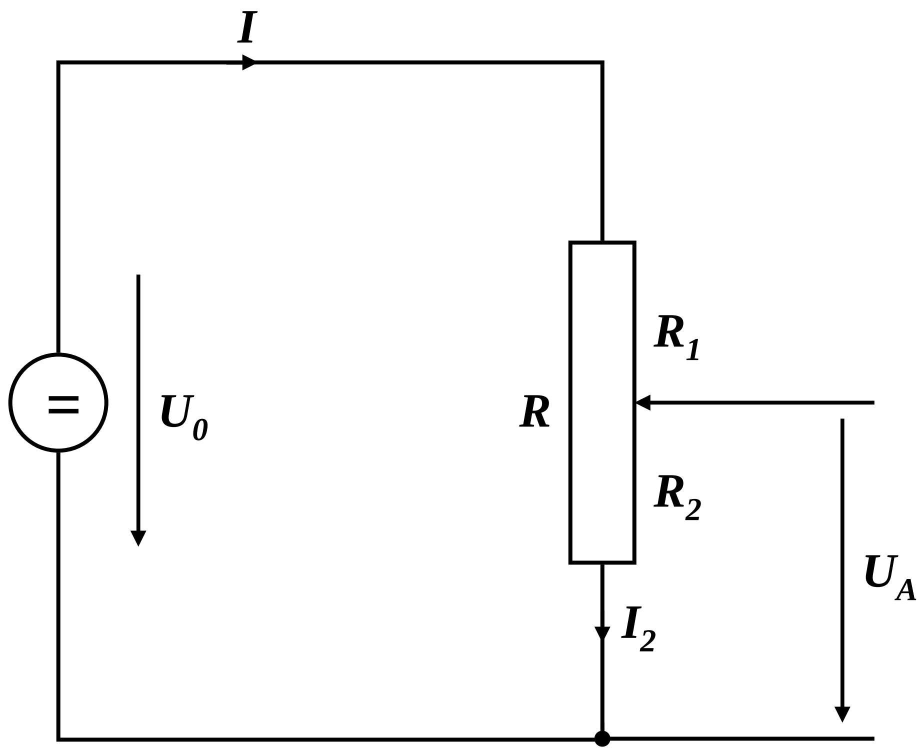
$$R_1 = R - R_2$$

- **Damit folgt:**

$$U_A = \frac{U_0}{\frac{R_1}{R_2}+1}$$

$$= \frac{U_0}{\frac{R-R_2}{R_2}+1}$$

$$= \frac{U_0}{\frac{R-R_2}{R_2}+\frac{R_2}{R_2}} = \frac{U_0}{\frac{R-R_2+R_2}{R_2}} = U_0 \cdot \frac{R_2}{R}$$



Graphische Bestimmung des Arbeitspunkts

- **Praktische Anwendung bei nichtlinearen Kennlinien**
  - ⇨ **Dioden, Transistoren**
- **Vorgehen:**

  1. Kennlinie für R2 einzeichnen

  2. Kennlinie für R1 in das selbe Diagramm einzeichnen

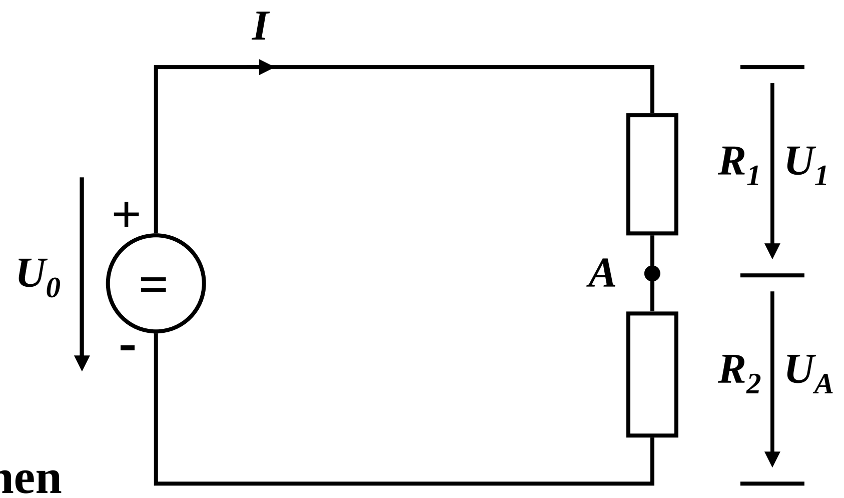
$$I = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_0 - U_A}{R_1}$$

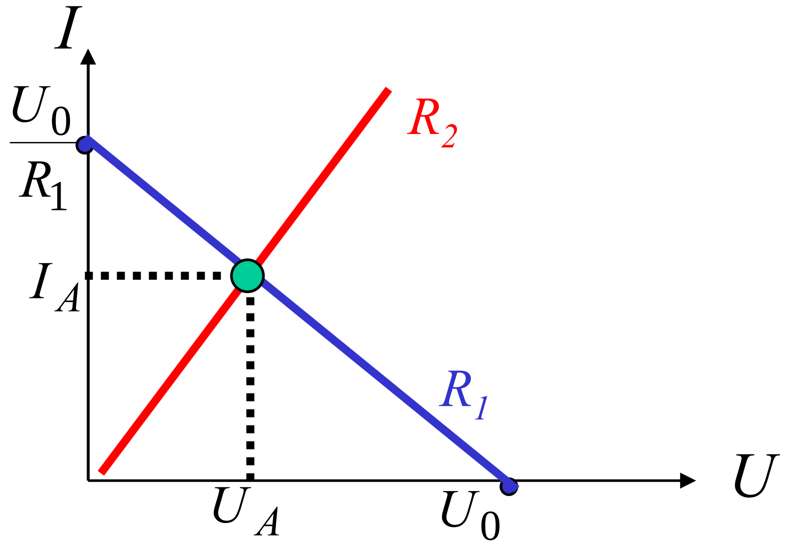
2 Punkte:

$$U_A = 0 \Rightarrow I = \frac{U_0}{R_1}$$

$$U_A = U_0 \Rightarrow I = 0$$

  3. Schnittpunkt A ergibt den Arbeitspunkt mit Spannung U_A und Strom I_A

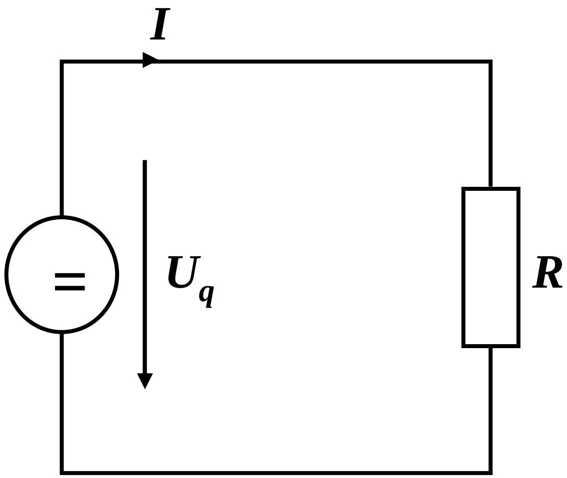




Quellen- und Klemmenspannung

- **Ideale Spannungsquelle:**
  - ⇨ **nach dem ohmschen Gesetz**

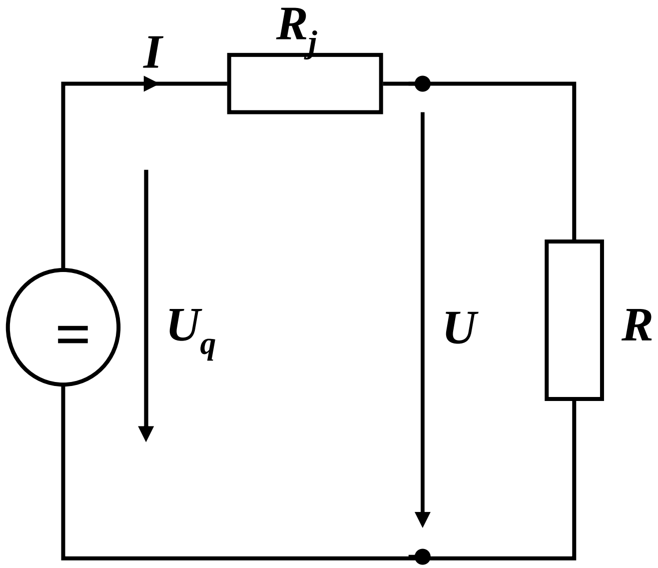
$$\lim_{R \to 0} I = \infty$$



- **Eine reale Spannungsquelle kann durch Hinzufügen eines Innenwiderstands modelliert werden**
  - ⇨ **die abgreifbare Spannung heißt Klemmenspannung**

$$U = U_q - I \cdot R_i$$

$$I = \frac{U_q}{R + R_i}$$



3 Halbleiter

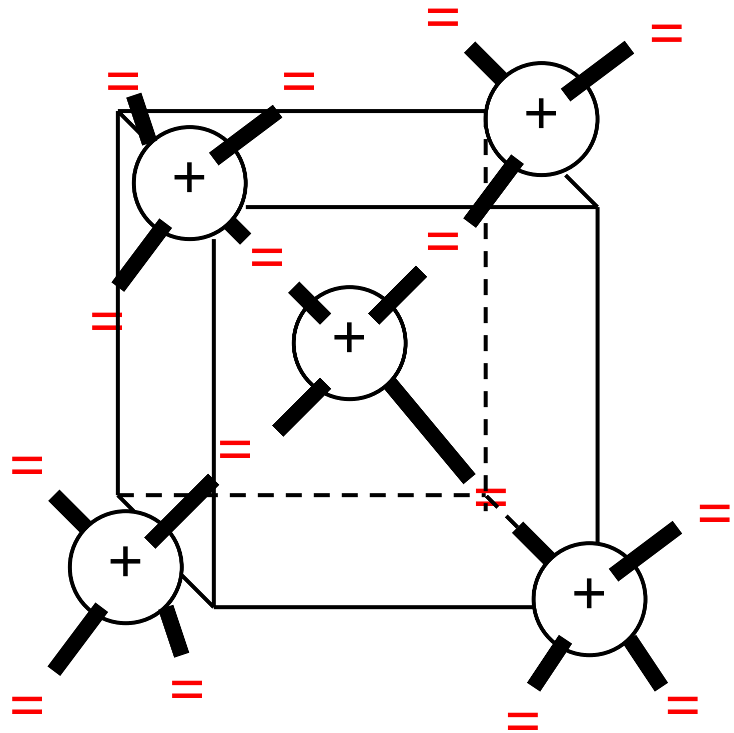
- **Halbleiter sind Elemente, deren Leitfähigkeit zwischen der von Isolatoren und Leitern liegt**
  - ⇨ **besitzen einen kristallinen Aufbau ohne Metallbindung**
  - ⇨ **die Leitfähigkeit kann durch Fremdatome beeinflusst werden**
- **Die Leitfähigkeit von Halbleitern schwankt mit der Temperatur**
  - ⇨ **beim absoluten Nullpunkt ist sie Null**
  - ⇨ **bei höheren Temperaturen liegt sie zwischen Metallen und Nichtleitern**

Beispiele

Material	*Widerstand (Ω/m)*	*Einordnung*
Hartgummi	10^{16}	**Nichtleiter**
Glas	10^{10}	**Nichtleiter**
Galliumarsenid (rein)	10^{3}	**Halbleiter**
Silizium (rein)	**100**	**Halbleiter**
Silizium (dotiert)	**1 bis 100**	**Halbleiter**
Germanium (rein)	**1**	**Halbleiter**
Germanium (dotiert)	**1 bis** 10^{-5}	**Halbleiter**
Eisen	10^{-7}	**Leiter**
Silber	10^{-8}	**Leiter**

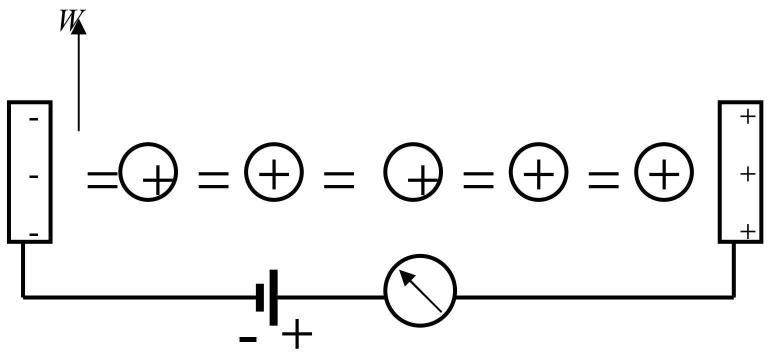
Kristallstruktur in Germanium und Silizium

- Kristallstruktur
  - ⇨ regelmäßig angeordnetes Atomgefüge
- Amorphe Struktur
  - ⇨ kein regelmäßiges Atomgefüge
- Mischkristalle
  - ⇨ Fremdatome sind in die Kristallstruktur eingebaut
- Polykkristalle
  - ⇨ Mehrere Kristalle bilden ein Gefüge
- Einkristall
  - ⇨ der Körper besteht aus einem einzigen Kristall
- In Siliziumkristallen sind die Atome in einer Tetraederstruktur aufgebaut

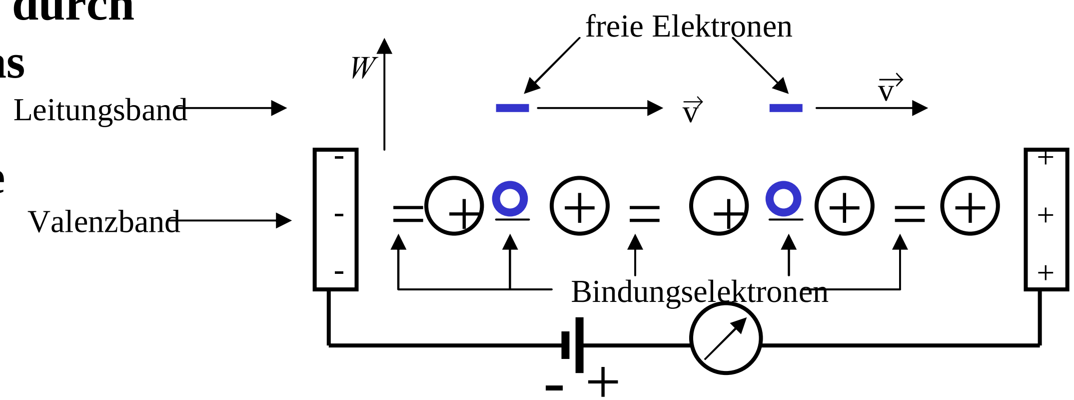


Valenz- und Leitungsband

- In voll besetzten oder in leeren Bändern ist ein Elektronenfluss nicht möglich
- Valenzband: Elektronen im obersten Energieband
  - ⇨ ist dies voll besetzt, findet kein Ladungstransport statt

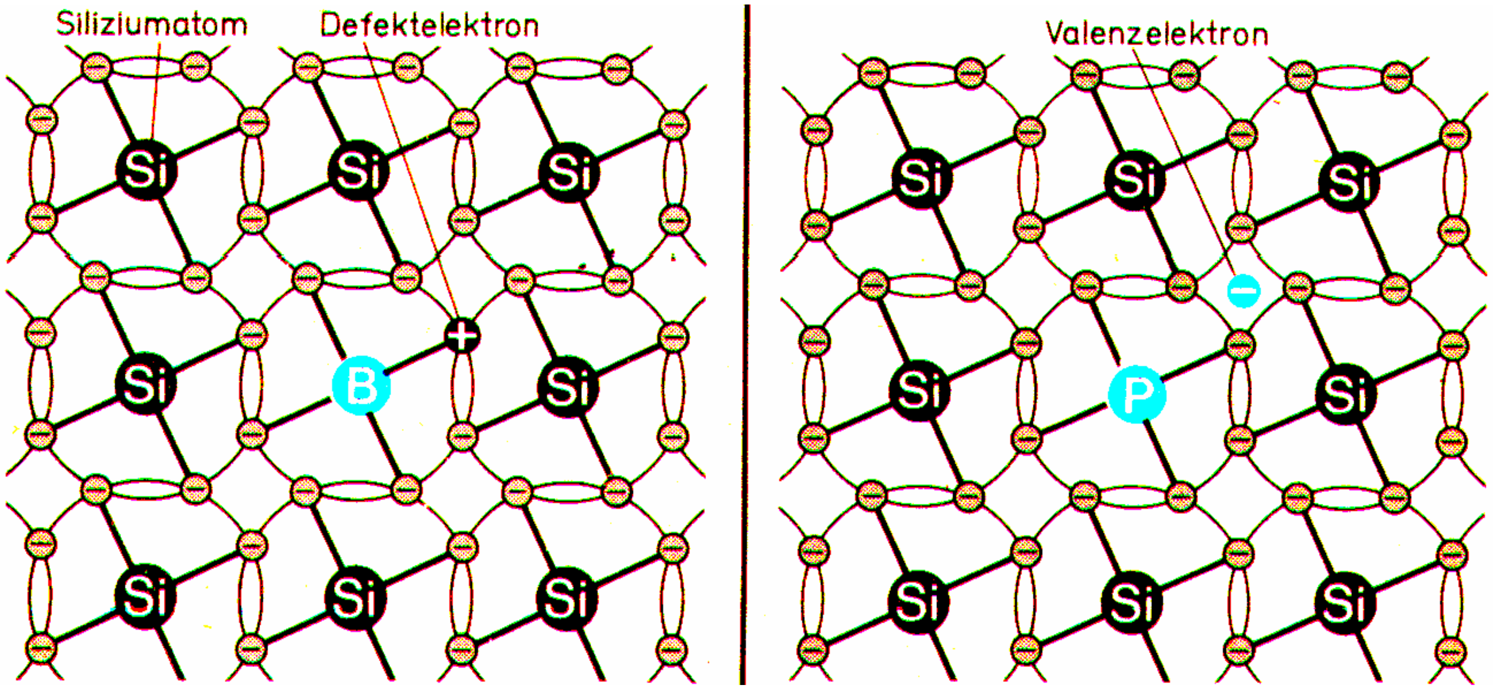


- Leitungsband: das nächste Energieband über dem Valenzband
  - ⇨ Werden Elektronen durch Energiezufuhr in das Leitungsband gehoben, können sie sich in diesem frei bewegen



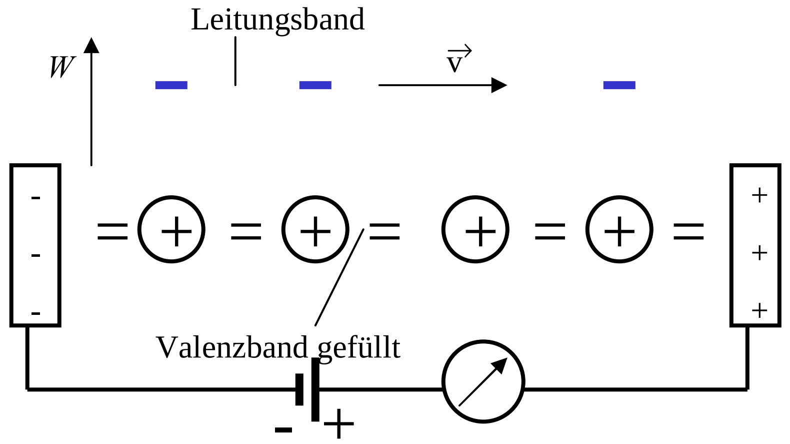
Dotierte Halbleiter

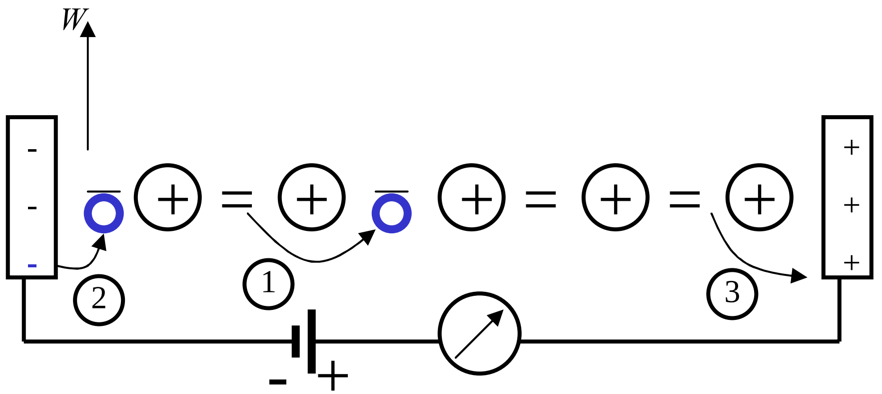
- **Gezielter Einbau von Fremdatomen in Silizium- oder Germaniumkristalle durch *Dotierung***
  - ⇨ **zusätzliche Valenzelektronen durch Arsen (As), Antimon (Sb) oder Phosphor (P)**
  - ⇨ **fehlende Valenzelektronen durch Aluminium (AL), Bor (B) oder Indium (In)**



Leitfähigkeit durch Störstellen

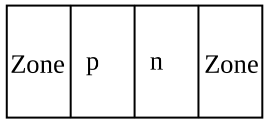
- **Geringe Energie reicht aus, um das Elektron in das Leitungsband zu heben**
- **Donatoratom**
  - ⇨ **Das Atom gibt das zusätzliche Elektron leicht ab**
  - ⇨ **n-Dotierung**
- **Akzeptoratom**
  - ⇨ **Das Atom nimmt ein Elektron leicht auf**
  - ⇨ **p-Dotierung**



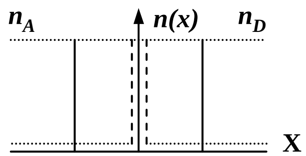


3.1 Der *pn*-Übergang

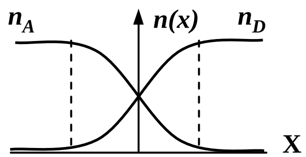
- **Grenzschicht zwischen p- und n-dotierten Schicht**
- **Ein Ausgleich der Ladungsträger durch Diffusion über die Grenzschicht**
  - ⇨ **Es entsteht ein elektrisches Feld**
- **wenn Diffusionswirkung und Feldwirkung gleich sind**
  - ⇨ **Gleichgewicht**
  - ⇨ **Ladungsträgerfreie Zone**
  - ⇨ **Diffusionsspannung U_D**
- **Bei Zimmertemperatur**
  - ⇨ **Germanium** $U_D = 0{,}37$ **V**
  - ⇨ **Silizium** $U_D = 0{,}75$ **V**



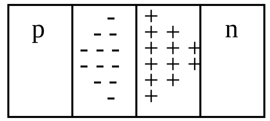
a) Grenzschicht mit n - dotierter und p - dotierter Zone



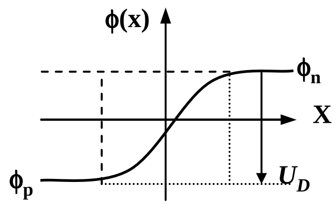
b) Konzentration der Donatoren n_D und Akzeptoren n_A ohne Ausgleich



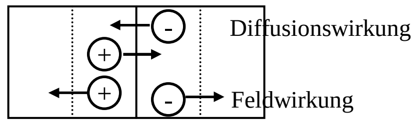
c) Konzentrationsdichte nach der Diffusion



d) Raumladung



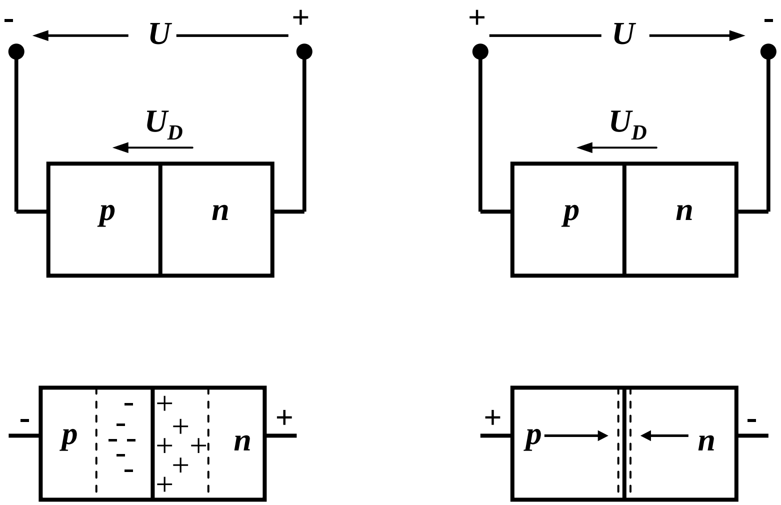
e) Potenzialverlauf quer zur Grenzschicht



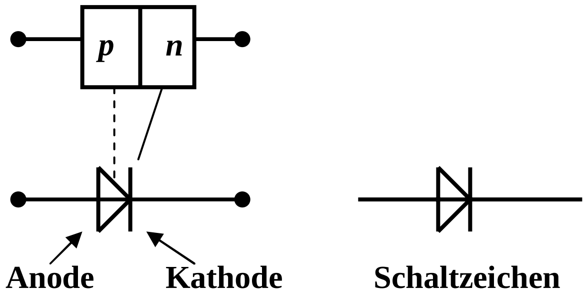
f) Kraftwirkung

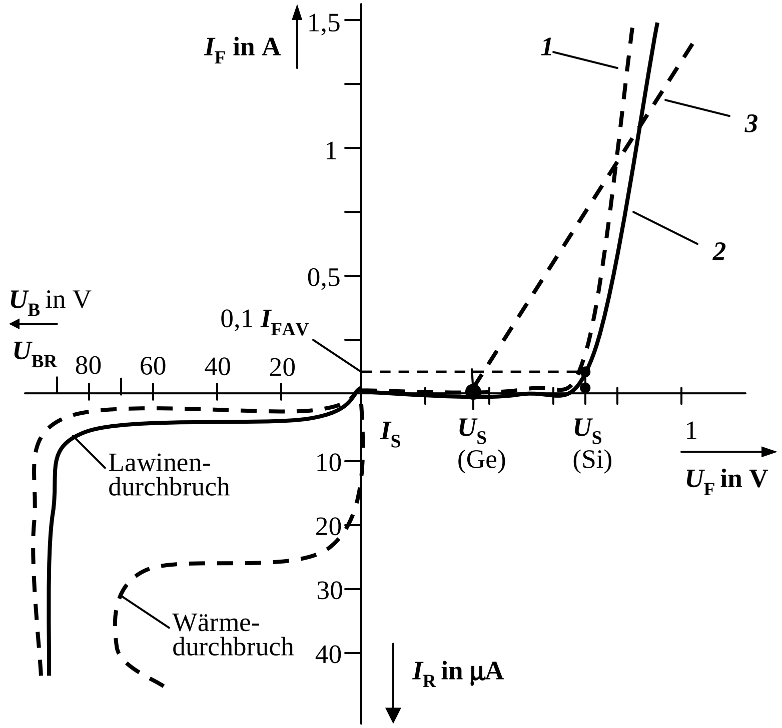
Halbleiterdioden

- **Bauelemente, welche die Leitfähigkeitseigenschaften eines pn-Übergangs benutzen**
- ***pn*-Übergang mit äußerer Spannung**
- **Sperrrichtung**
  - **Ladungsträgerfreie Zone wird größer**
  - **Es fließt kein Strom**
  - **Durchbruch, wenn die Feldstärke (Spannung) zu groß wird (*Lawinen-Effekt*)**
- **Durchlassrichtung**
  - **Ladungsträgerfreie Zone wird kleiner**
  - **Wenn $U > U_D$ wird, fließt ein Strom**

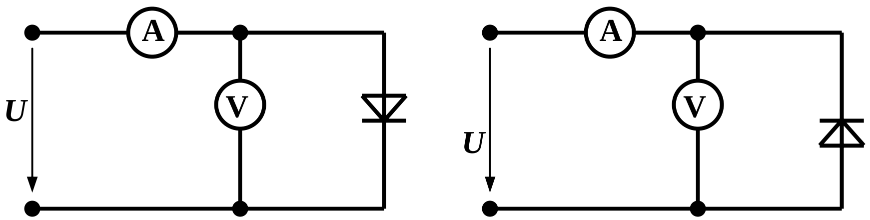


Kennlinie des *pn*-Übergangs





Schaltzeichen



Schaltung in Durchlassrichtung

Schaltung in Sperrichtung

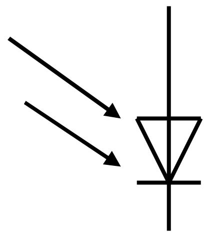
1: Silizium ideal
2: Silizium real
3: Germanium real

Halbleiterdioden mit besonderen Eigenschaften

- **Schottky-Dioden**
  - ⇨ **Beruht auf dem von Schottky untersuchten Metall-Halbleiter Übergang**
  - ⇨ **Diffusion wie bei pn-Übergang**
  - ⇨ **besonders schnelle Dioden**
- **Z-Dioden**
  - ⇨ **Ausnutzung des Lawinen-Effekts**
  - ⇨ **Strom darf einen Höchstwert I_{Zmax} nicht überschreiten**
  - ⇨ **Spannungsbegrenzung bei Wechselspannungen**

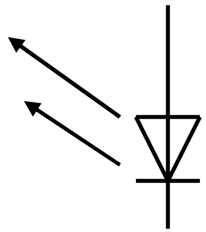
Halbleiterdioden mit besonderen Eigenschaften

- **Fotodioden**
  - ⇨ **Licht kann durch eine Öffnung an den pn-Übergang gelangen**
  - ⇨ **ein einfallendes Lichtquant erzeugt ein Elektron-Loch-Paar**
  - ⇨ **Fotodioden werden in Sperrichtung betrieben**
    - **ist kein Licht vorhanden, fließt kein Strom**
    - **bei Lichteinfall fließt durch den Photoeffekt ein Strom**
  - ⇨ **Lichtschranken**
  - ⇨ **Datenübertragung mit Lichtwellenleitern**



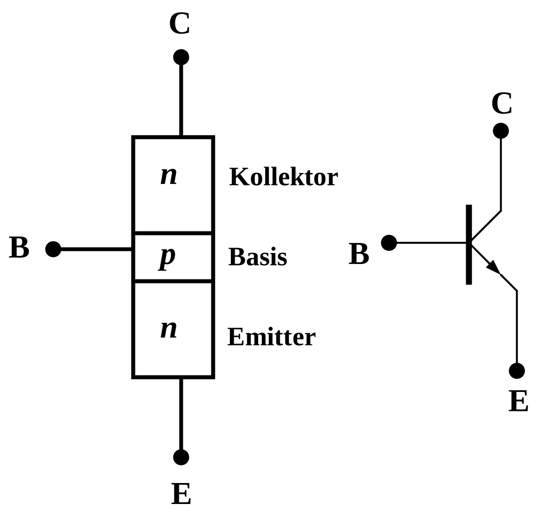
Halbleiterdioden mit besonderen Eigenschaften

- **Lumeniszenzdioden (Light Emitting Diod, LED)**
  - ⇨ **pn-Übergang mit hoher Dotierung**
  - ⇨ **Betrieb in Durchlassrichtung (Vorwiderstand)**
  - ⇨ **Durchlassstrom injiziert Ladungsträger in den p- und n-Bereich**
  - ⇨ **Durch die hohe Zahl der Überschusselektronen (n-Bereich) bzw. Löcher (p-Bereich) werden Ladungsträger aus dem Leitungsband in das Valenzband gezogen (Rekombination)**
  - ⇨ **Durch den Energieerhaltungssatz muss Energie abgegeben werden**
  - ⇨ **Es entsteht ein Lichtquant**
  - ⇨ **Anzeigen**
  - ⇨ **Datenübertragung durch Lichtwellenleiter**
  - ⇨ **Optokoppler**

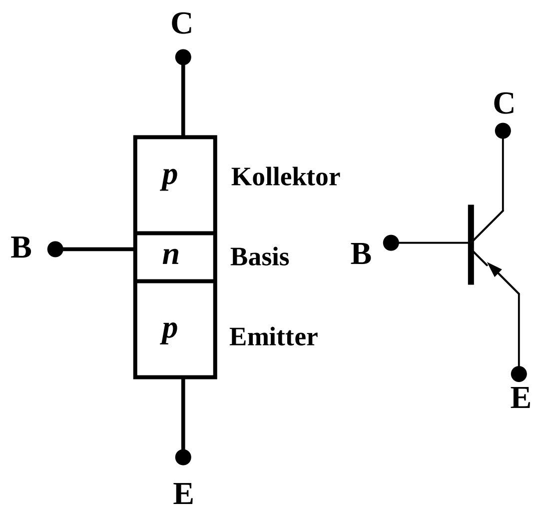


3.2 Bipolare Transistoren

- Ausnutzen der Eigenschaft zweier pn-Übergänge
  - ⇨ NPN-Transistor
  - ⇨ PNP-Transistor
- Von jeder Zone wird ein Anschluss herausgeführt
  - ⇨ Emitter (E)
  - ⇨ Basis (B)
  - ⇨ Collector (C)



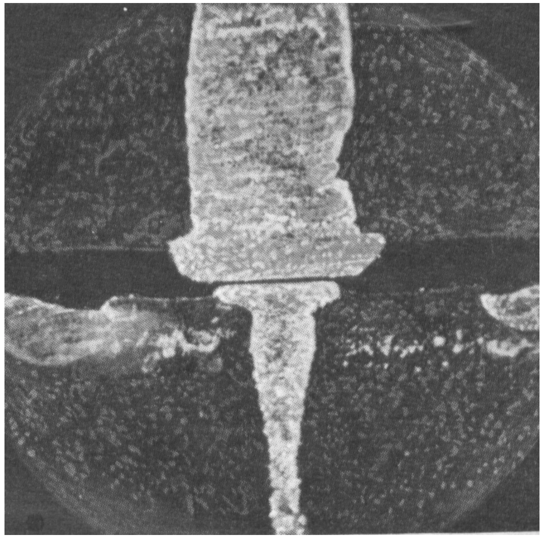
NPN-Transistor

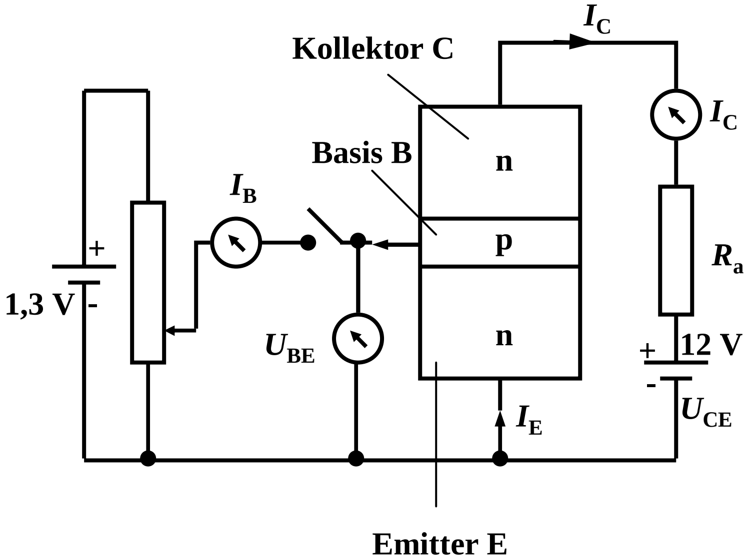


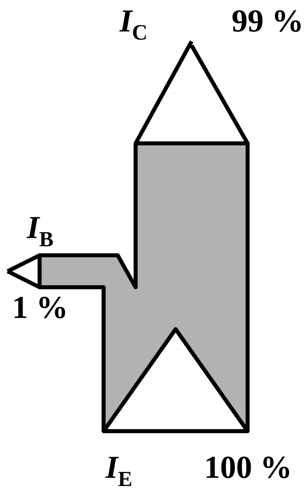
PNP-Transistor

Der Transistoreffekt

- Basis des Transistors ist sehr dünn
  - ⇨ Die Emitter-Basis-Diode wird in Durchlassrichtung gepolt
  - ⇨ Die meisten der Elektronen fließen jedoch nicht über die Basis ab, sondern werden vom Kollektor aufgenommen (starkes elektrisches Feld)
  - ⇨ Es fließt nur ein kleiner Basisstrom







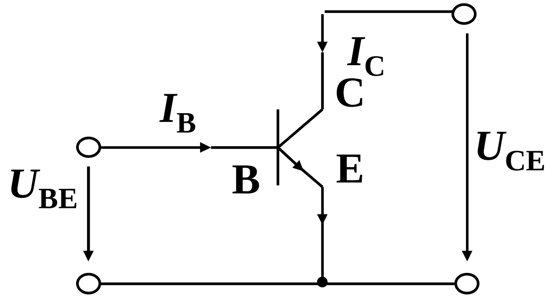
Der Transistoreffekt

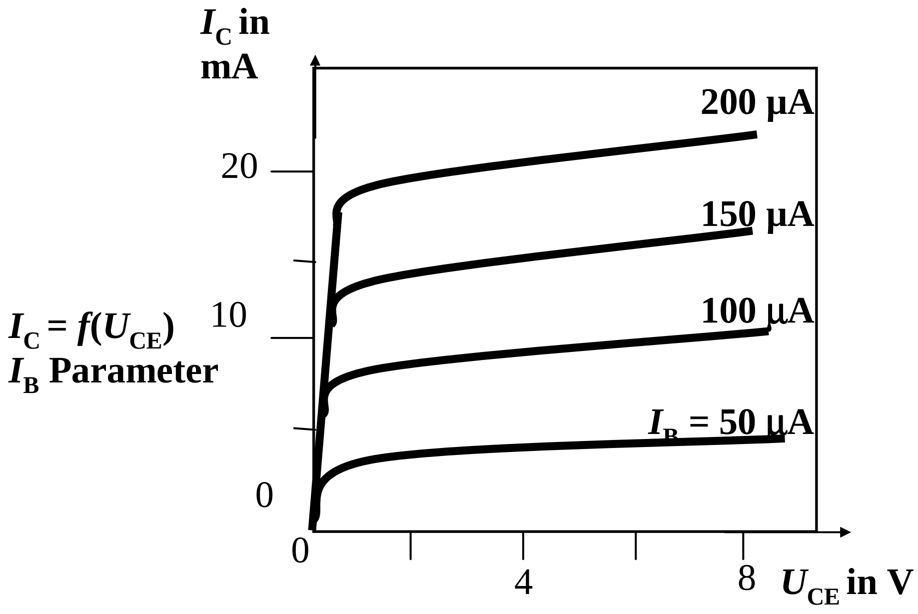
- Erhöht man die Spannung an der Basis, so bleibt der Basisstrom relativ klein, der Kollektorstrom wächst hingegen relativ stark
  - ⇨ Der Transistor ist ein stromgesteuerter Widerstand
- Stromverstärkung

$$B = \frac{I_C}{I_B}$$

- Der Basisstrom steuert den Kollektorstrom

$$I_B \cdot B = I_C$$

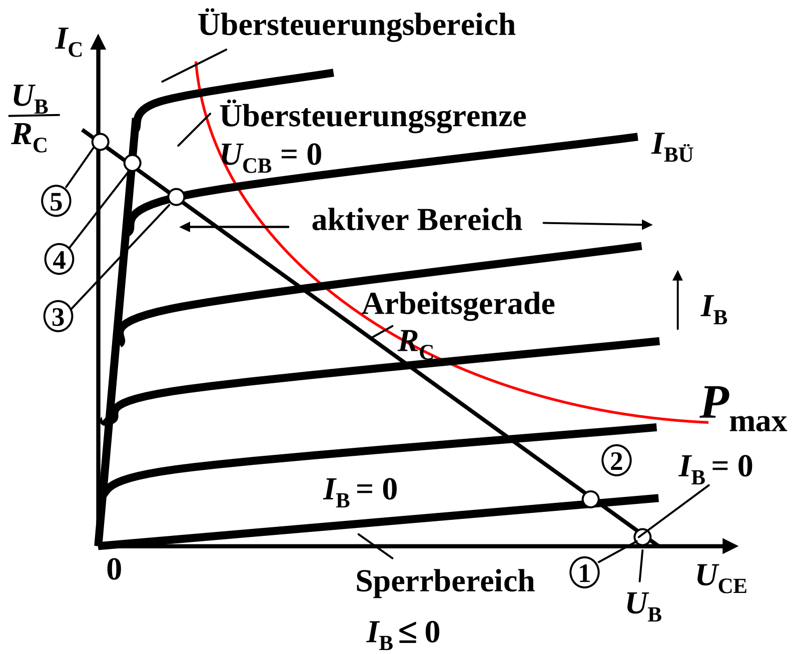


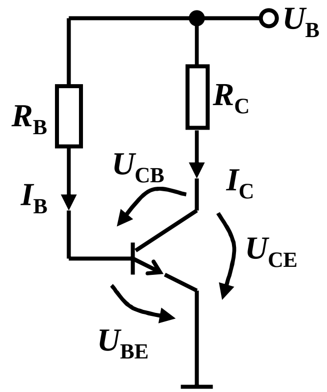


Ausgangskennlinien (Stromsteuerung)

Arbeitspunkt

- Die Arbeitspunkte können sich nur entlang der Arbeitsgeraden verschieben
- Sperrbereich
  - ⇨ AP 1 bis AP 2
  - ⇨ $I_B = 0, U_{CE} \approx U_B, I_C \approx 0$
  - ⇨ Schalter aus
- Aktiver Bereich
  - ⇨ AP 2 bis AP 3
  - ⇨ Transistor als Verstärker
- Sättigungsbereich
  - ⇨ Übersteuerung
  - ⇨ AP 3 bis AP 4
  - ⇨ $I_C \approx U_B/R_C$
  - ⇨ Schalter ein



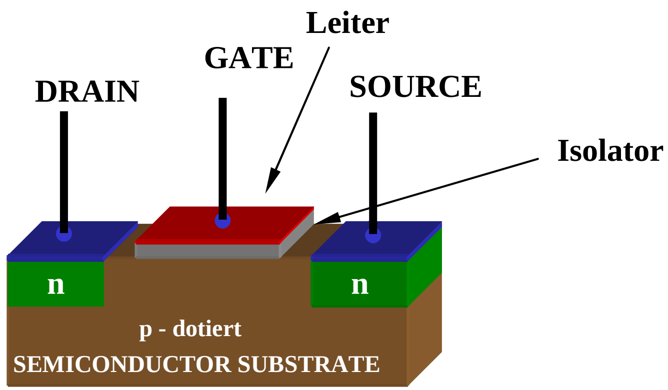


3.3 Unipolare Transistoren

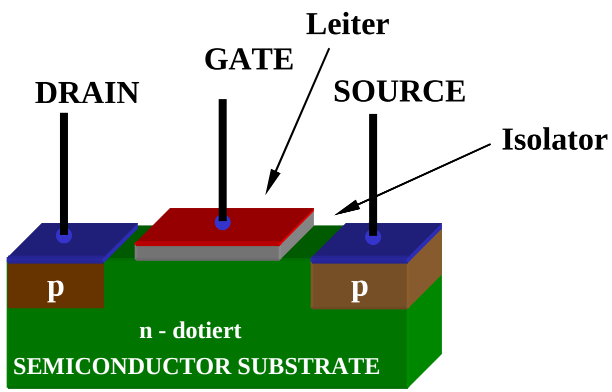
- **Im Gegensatz zum bipolaren Transistoren wird bei unipolaren Transistoren der Strom durch eine Spannung gesteuert**
  - ⇨ **Elektrisches Feld**
  - ⇨ **Feldeffekt-Transistor (FET)**
  - ⇨ **Spannungsgesteuerter Widerstand**
- **Isolierschicht-FET**
  - ⇨ **Isolation des Gates durch Isolator (Siliziumoxid, SiO_2)**
  - ⇨ **Beeinflussung der Leitfähigkeit durch Influenz**
- **Anschlüsse**
  - ⇨ **Source S (Quelle)**
  - ⇨ **Drain D (Senke)**
  - ⇨ **Gate G (Tor)**

Isolierschicht-FET (MOS-FET)

- Gate-Elektrode ist durch eine dünne Oxidschicht getrennt
  - ⇨ MOS: Metal Oxide Semiconductor
- n-MOS
  - ⇨ Das gesteuerte Halbleiter-Substrat ist p-dotiert
  - ⇨ Die Anschlüsse sind stark n-dotiert
  - ⇨ n-Kanal-MOS-FET
- p-MOS
  - ⇨ Der gesteuerte Halbleiter-Substrat ist n-dotiert
  - ⇨ Die Anschlüsse sind stark p-dotiert
  - ⇨ p-Kanal-MOS-FET
- Da die n-Zonen (p-Zonen) weit auseinanderliegen, kommt es nicht zum Transistoreffekt



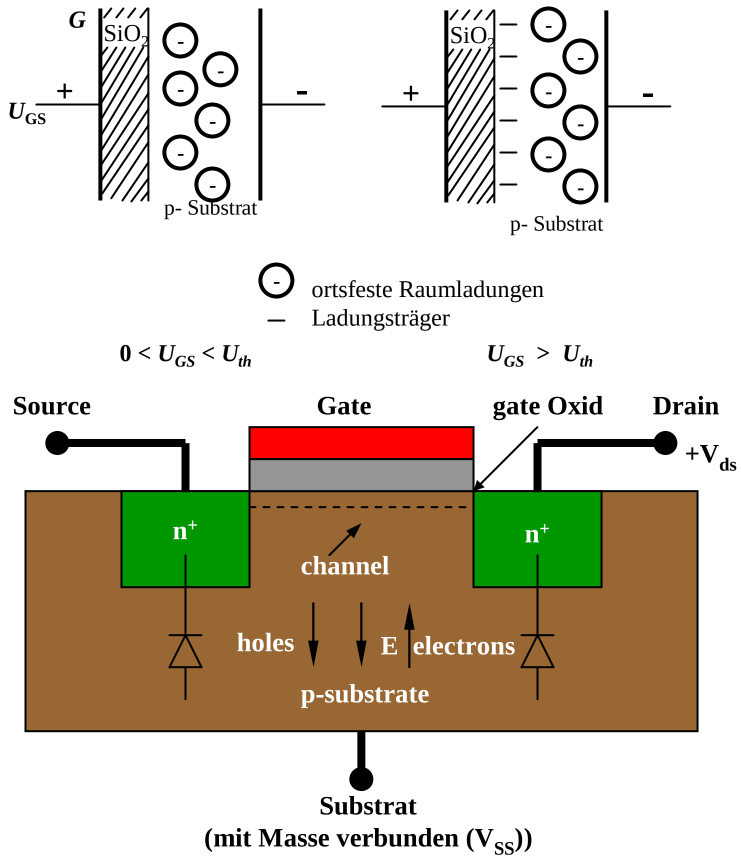
n - TRANSISTOR

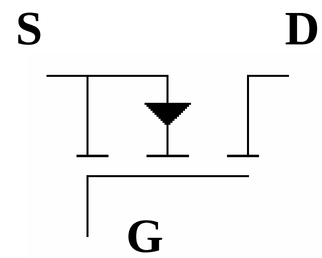


p - TRANSISTOR

Der NMOS-Transistor

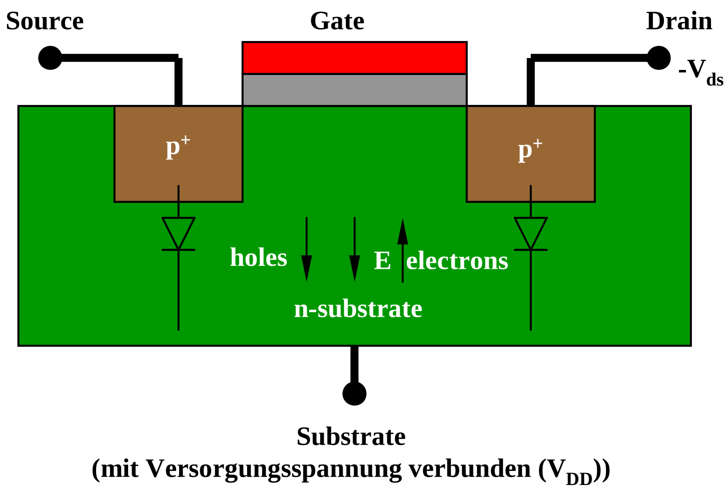
- Anreicherungstyp
  - enhancement
  - selbstsperrend
- Funktionsweise
  - Unter der Oxidschicht werden durch Influenz Ladungsträger angesammelt
  - Die Raumladungen (Löcher) werden zurückgedrängt
  - Es bildet sich ein n-Kanal
  - Die Dicke des Kanals hängt von U_{GS} ab
- Source ist mit dem Substrat verbunden
- Der NMOS-Transistor leitet, wenn U_{GS} positiv ist
  - Am Gate liegt dann eine positive Spannung gegenüber Source an
- Der NMOS-Transistor sperrt, wenn U_{GS} nahe 0V oder negativ ist

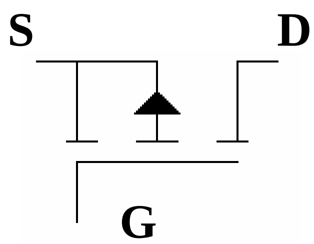




Der PMOS-Transistor

- Alle Dotierungen sind umgekehrt
- Funktionsweise
  - Wie bei n-MOS Transistor
  - Statt Ladungsträger werden Löcher unter der Oxidschicht durch Influenz angesammelt
  - Es bildet sich ein leitender p-Kanal
- Der PMOS-Transistor leitet, wenn U_{GS} negativ ist
  - Am Gate liegt dann eine negative Spannung gegenüber Source an
- Der PMOS-Transistor sperrt, wenn U_{GS} nahe 0V oder positiv ist

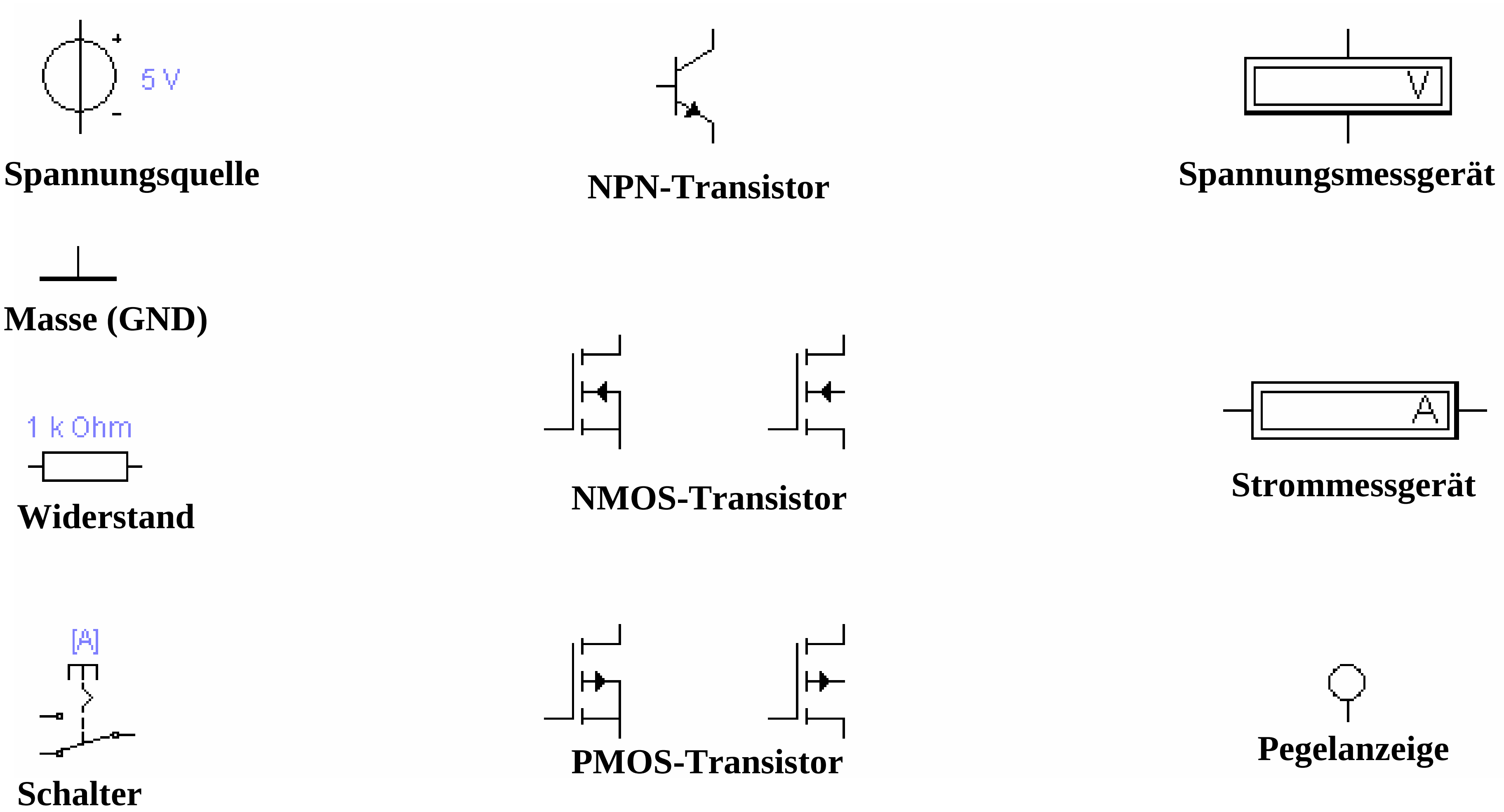




4 Der Transistor als Schalter

- **Elektronische Verknüpfungsglieder werden aus Halbleiterbauelementen aufgebaut**
  - ⇨ **Binäre Schaltvariablen werden nach den Gesetzen der Schaltalgebra miteinander verknüpft**
  - ⇨ **Werte entsprechen der Zweiwertigkeit von Schalterzuständen**
- **Im Folgenden gilt:**
  - ⇨ **„Ein“ entspricht „1“, 5 V, POWER oder VDD**
  - ⇨ **„Aus“ entspricht „0“, 0 V, GROUND oder VSS**
- **Verknüpfungsglieder werden zu komplexen Schaltnetzen und Schaltwerken zusammengefasst**
  - ⇨ **Die Schaltglieder müssen die gleichen Signalpegel besitzen**

Schaltzeichen nach DIN



Idealer Schalter

- Annahme: der Verknüpfungsvorgang
  - ⇨ erfordert keine Leistung
  - ⇨ benötigt keine Zeit
  - ⇨ Im Schalter fällt keine Spannung ab
- Im Schalterzustand „Ein“

$$R_i = 0$$

$$I = \frac{U_B}{R}$$

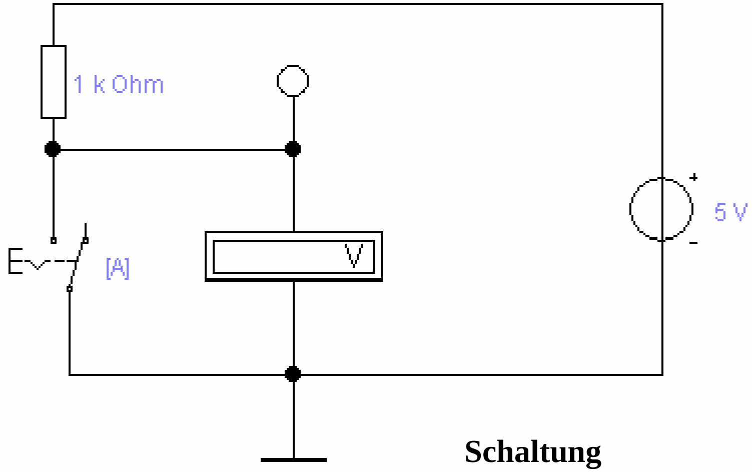
$$U_Q = 0$$

- Im Schalterzustand „Aus“

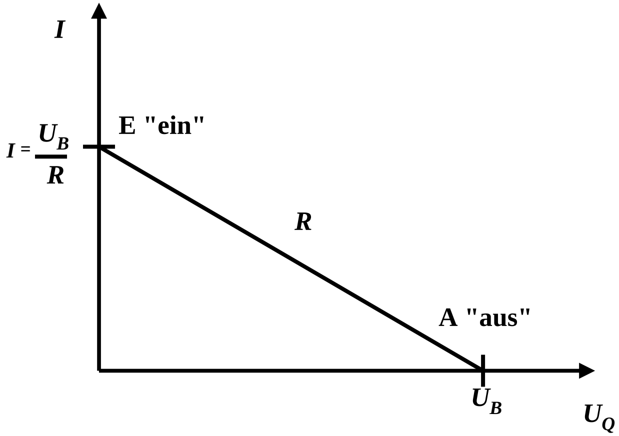
$$R_S = \infty$$

$$I = 0$$

$$U_Q = U_B$$



Schaltung



Kennlinie

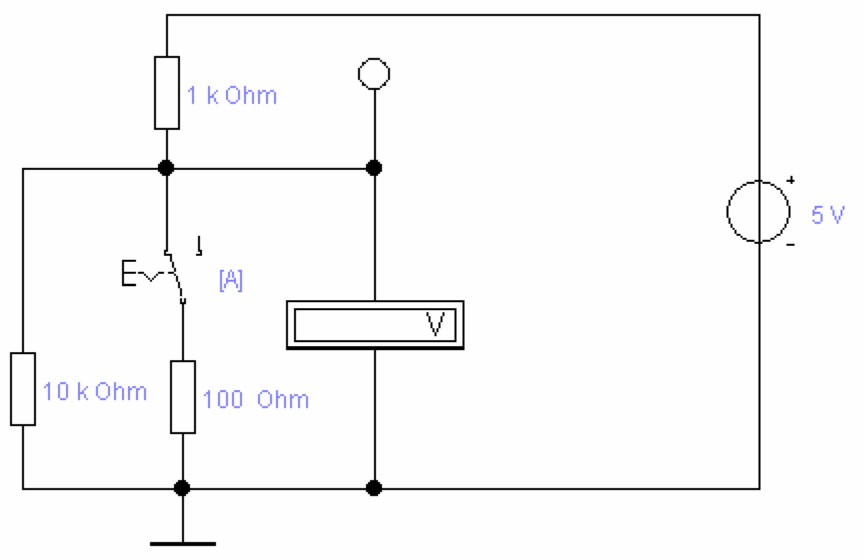
Realer Schalter

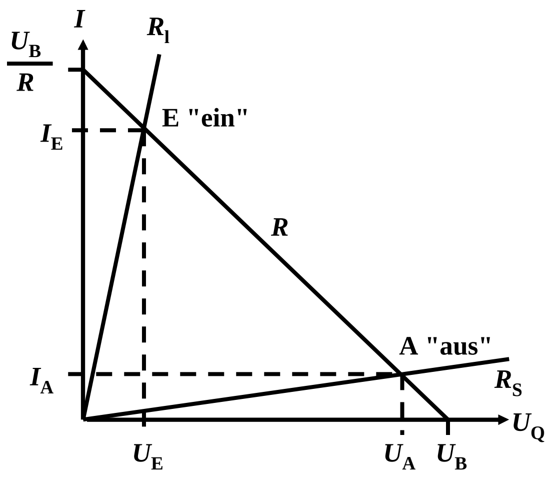
- R_i **kann nicht 0 sein**
- R_S **kann nicht unendlich werden**
  - ⇨ **in der Praxis versucht man,** R_i **möglichst klein und** R_S **möglichst groß zu machen**
- **Im Schalterzustand „Ein“**

$$I_E = \frac{U_B}{R + R_i} ; U_E = \frac{U_B \cdot R_i}{R + R_i}$$

- **Im Schalterzustand „Aus“**

$$I_A = \frac{U_B}{R + R_S} ; U_A = \frac{U_B \cdot R_S}{R + R_S}$$

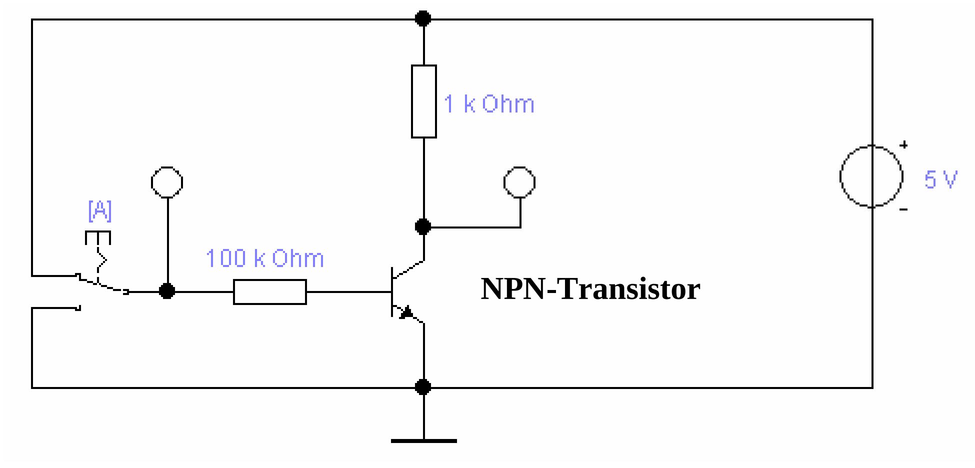


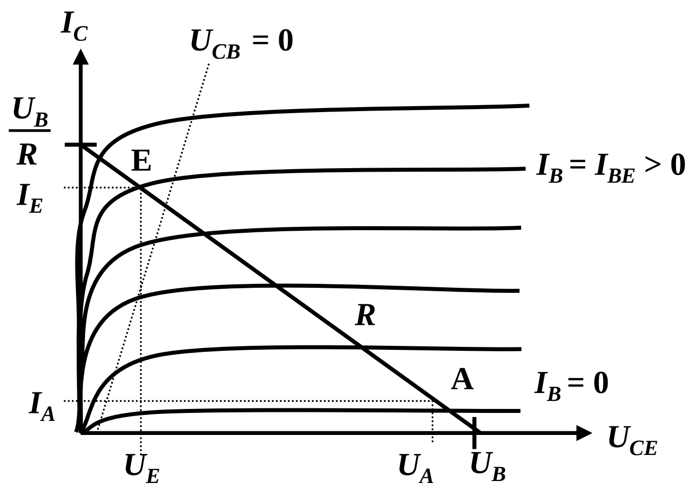


Kennlinie

Bipolarer Transistor als Schalter

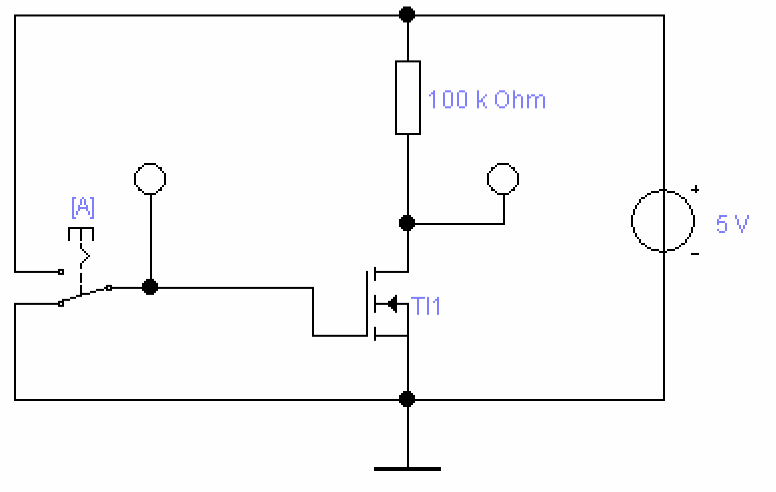
- **Schaltvorgang wird durch den Basisstrom I_B gesteuert**
  - ⇨ **Schalter Ein: Transistor leitet**
  - ⇨ **Schalter Aus: Transistor sperrt**
- **Die Arbeitspunkte werden so berechnet, dass sich der Transistor im Übersteuerungsbereich befindet**

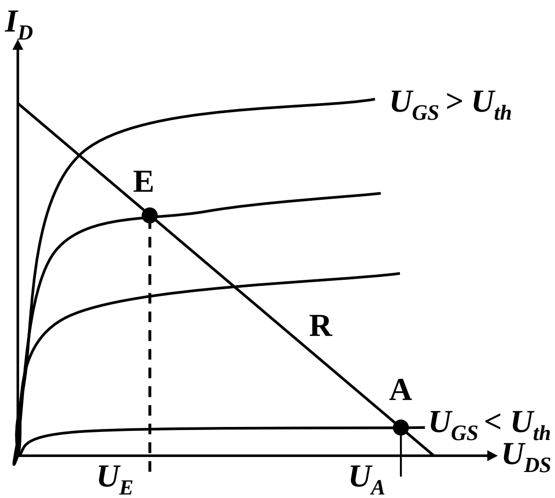




Der NMOS-Transistor als Schalter

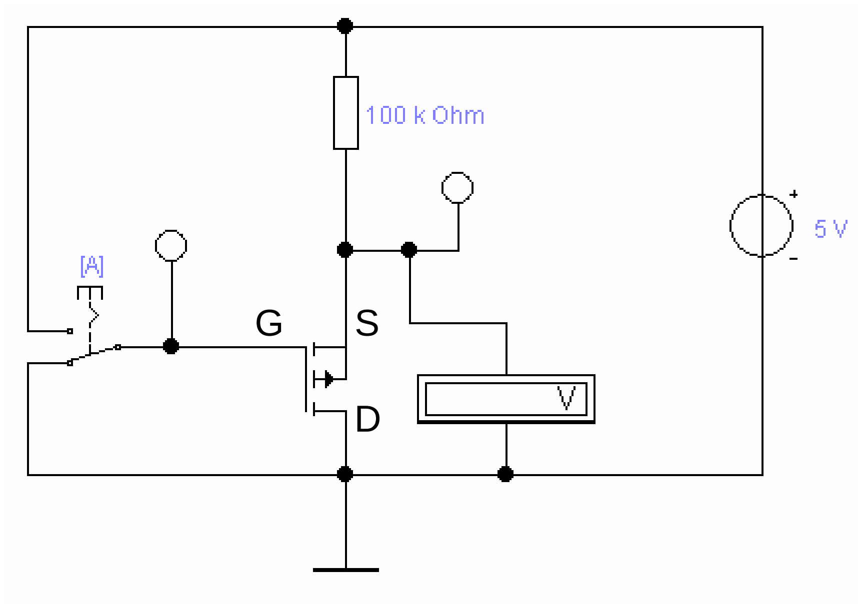
- **NMOS Transistoren leiten wenn U_{GS} positiv ist**
  - ⇨ **Verwendung wie bei Bipolar-Transistore**
- **Der Substrat-Anschluss (Bulk) muss „negativer“ sein als das Gate**
  - ⇨ **Häufig zusätzliche negative Spannung (-5V)**





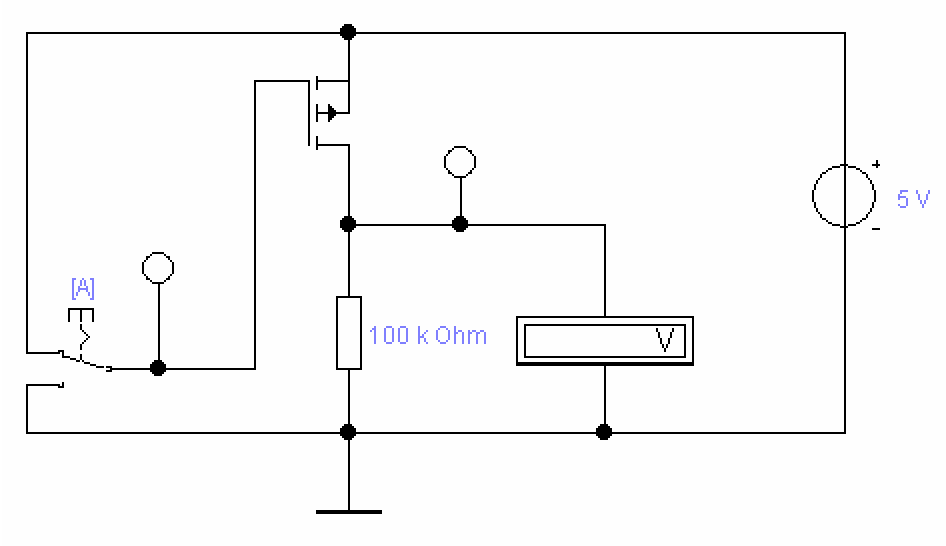
Der PMOS-Transistor als Schalter

- **PMOS Transistoren leiten wenn U_{GS} negativ ist**
  - ⇨ **Der Gate-Anschluss liegt auf 0 V (Masse)**
  - ⇨ **Die Spannung U_{GD} ist hoch (ca. 1,7 V)**
  - ⇨ **Der p-MOS-Transistor leitet schlecht, da der Spannungsunterschied zwischen Gate und Source (U_{GS}) gering ist**

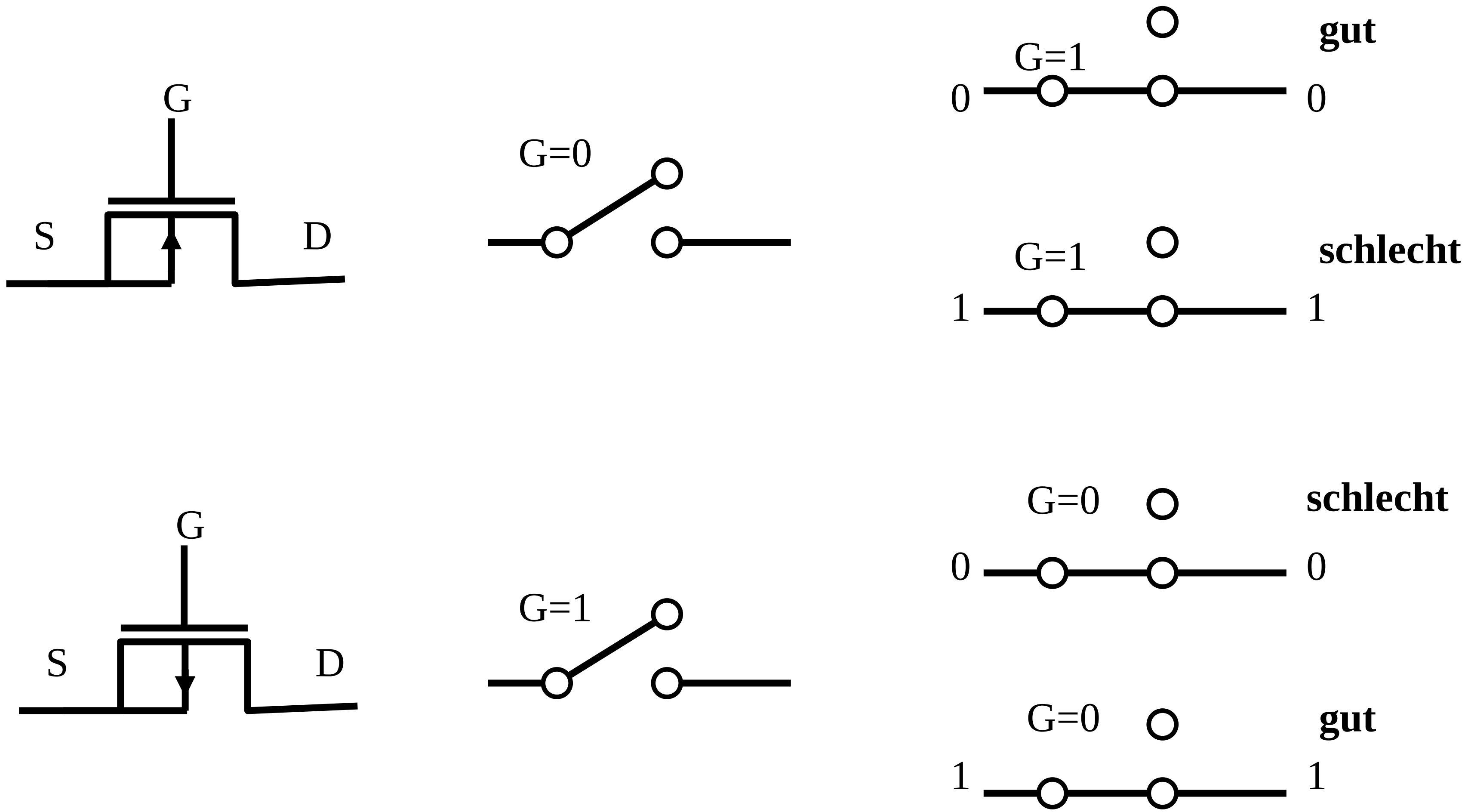


Der PMOS-Transistor als Schalter

- **Besserer Einsatz des PMOS-Transistors**
  - **Der Transistor leitet gut, da der Spannungsunterschied zwischen Gate und Source (U_{GS}) mit 5V hoch ist**

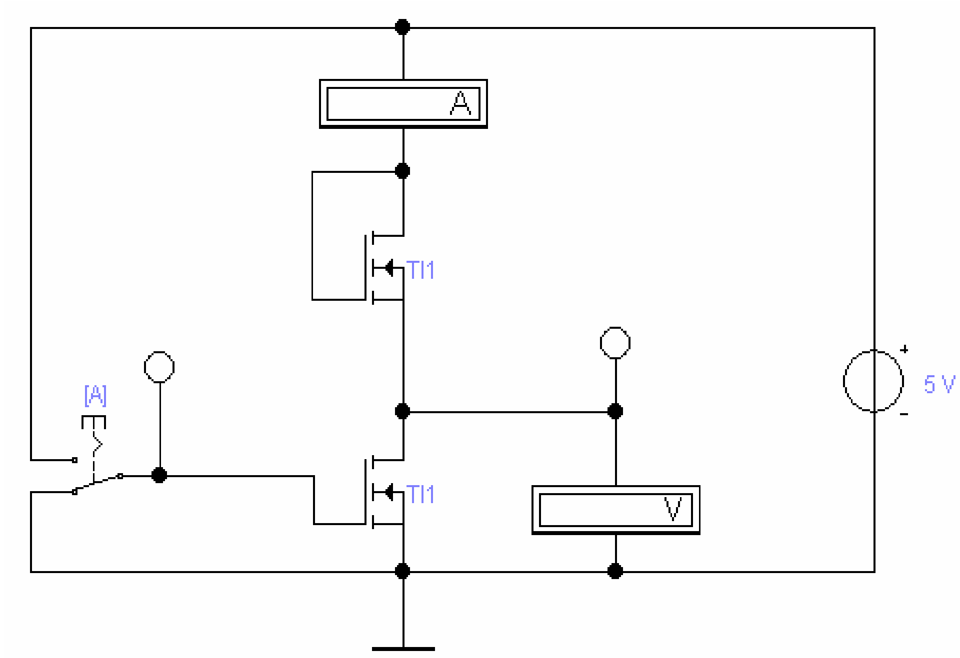


Übersicht: MOS-Transistoren als Schalter



Integrierte Widerstände

- **In integrierten Schaltkreisen benötigen Widerstände zu viel Platz**
  - **Der Gate-Widerstand kann ersatzlos entfallen, da das Gate isoliert ist und daher kein Strom fließt**
  - **Die Drain-Widerstände können durch schlecht leitende NMOS- bzw. PMOS-Transistoren ersetzt werden**
  - **Transistoren lassen sich kleiner bauen als integrierte Widerstände**
- **Nachteile:**
  - **Die Versorgungsspannung und der 0-Pegel werden am Ausgang nicht mehr erreicht**
  - **Schaltungen können so nicht miteinander verbunden werden**

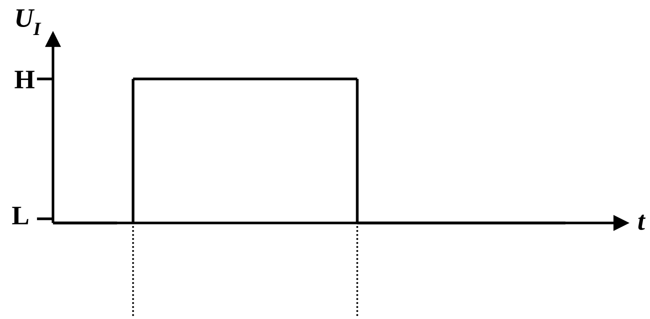


Kenngrößen: Signalpegel

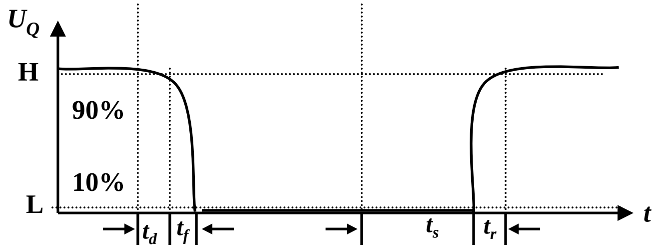
- Die Signale nehmen nie genau GND oder die Versorgungsspannung an
  - ⇨ Ein Transistor ist kein idealer Schalter
  - ⇨ Übersprechen zwischen benachbarten Leitungen
  - ⇨ Der Eingang des nachfolgenden Transistors hat Auswirkungen auf den vorgehenden
- Solche Signale nennt man Störspannungen
- Zur Eliminierung der Störspannungen definiert man Pegel
  - ⇨ High: die Spannung ist hoch
  - ⇨ Low: die Spannung ist nieder
- Die Pegel werden willkürlich logischen Werten zugeordnet
  - ⇨ High ist logisch „1“
  - ⇨ Low ist logisch „0“
  - ⇨ bei negativer Logik sind diese Pegel umgekehrt

Kenngrößen: Signalübergangszeit und -laufzeit

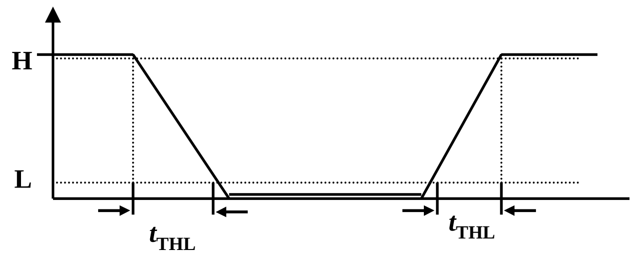
- **Signalübergangszeit**
  - ⇨ **Flankensteilheit**
  - ⇨ **Übergang von „H“ nach „L“ oder „L“ nach „H“**
- **Signallaufzeit**
  - ⇨ **Zeit die ein Signalimpuls vom Eingang der Schaltung bis zum Ausgang benötigt**



idealer Rechteckimpuls am Eingang

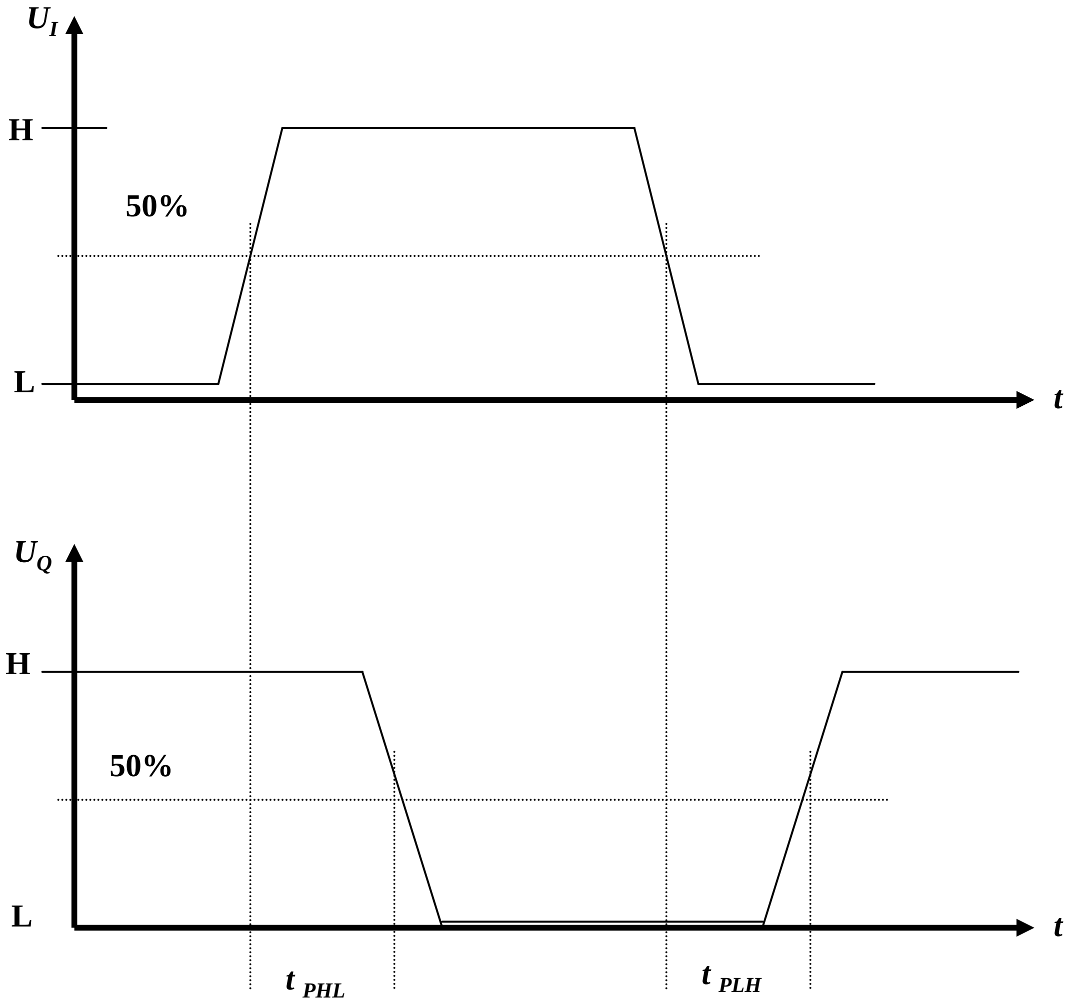


verformter Rechteckimpuls am Ausgang



linearisierter Ausgangsimpuls

Schaltvorgang eines Inverters

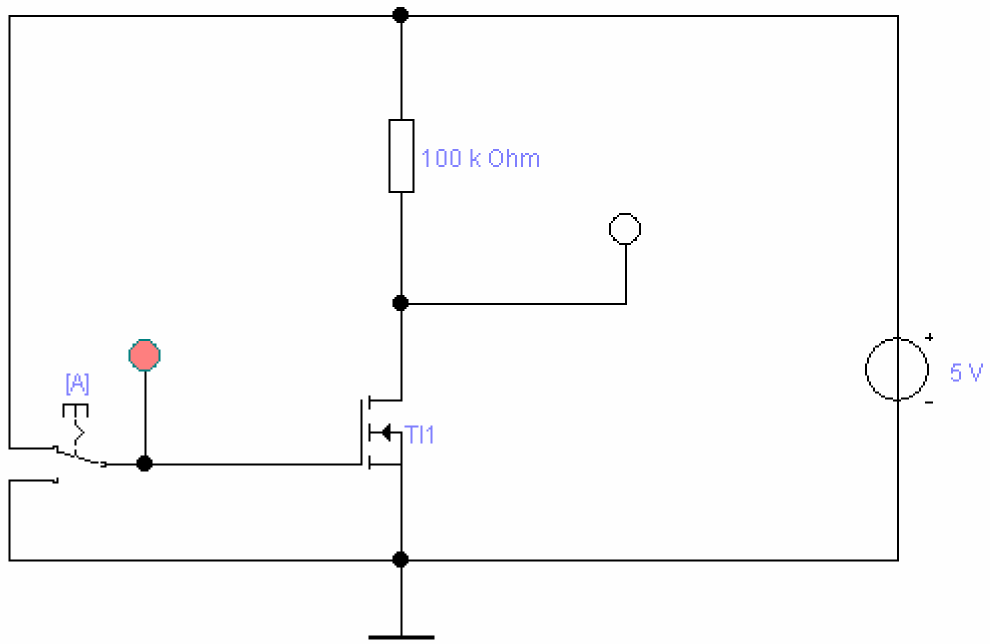


5 Logische Schaltglieder

- **Komplexe Schaltungen werden aus einfachen logischen Gattern aufgebaut**
- **Man benötigt logische Grundfunktionen**
  - ⇨ **UND, ODER, NICHT**
- **Logische Gatter werden später als atomare Bausteine in der Digitaltechnik betrachtet**
  - ⇨ **In diesem und im nächsten Kapitel steht der innere Aufbau im Vordergrund**
- **Die Eingangssignalpegel der Gatter müssen zu den Ausgangssignalpegeln kompatibel sein**
  - ⇨ **Leitungen verbinden die Ausgänge eines Gatters mit nachfolgenden Gattern**

NICHT-Gatter

- Der Wert des Eingangs wird negiert

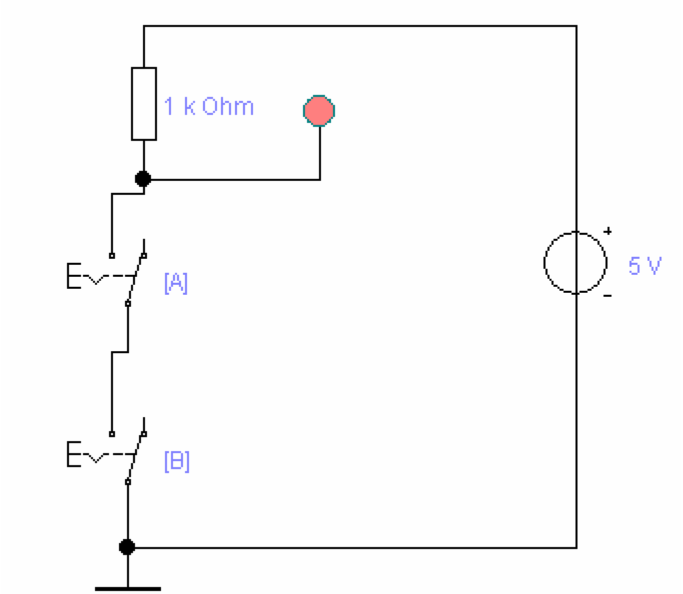


Wertetabelle

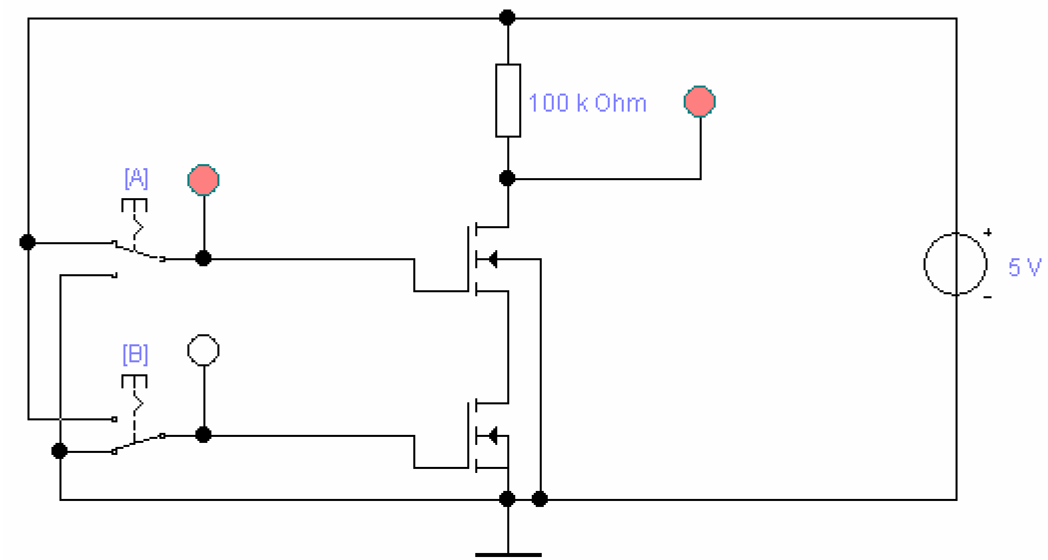
A	Y
0	1
1	0

NAND-Gatter

- Reihenschaltung zweier Schalter/Transistoren



NAND-Verknüpfung mit Schaltern



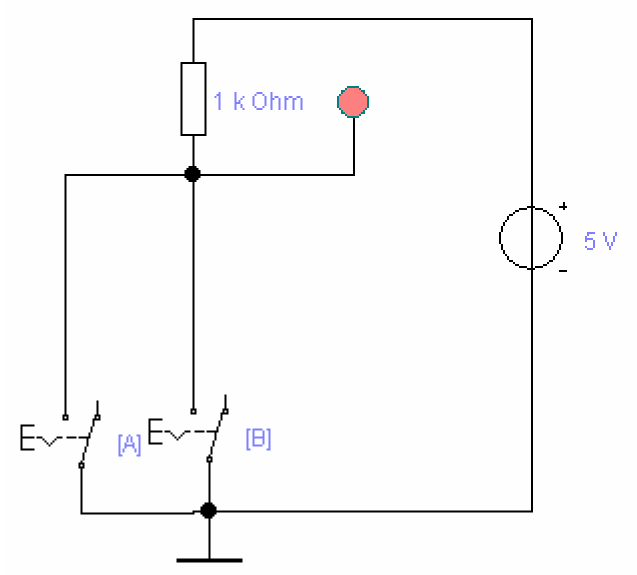
NAND-Verknüpfung mit NMOS-Transistoren

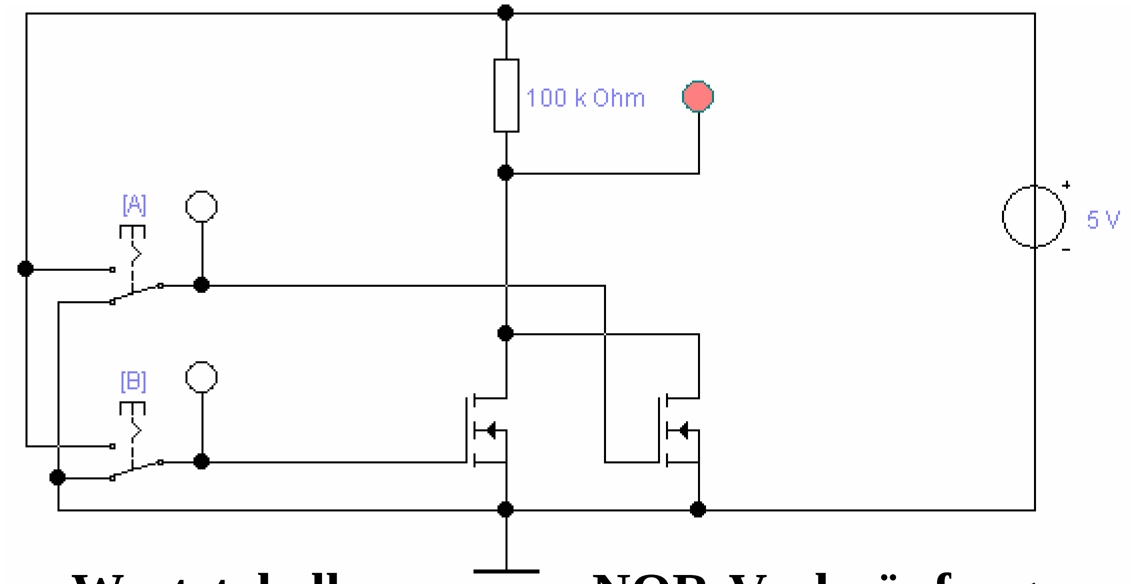
Wertetabelle

B	A	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NOR-Gatter

- Parallelschaltung zweier Schalter/Transistoren





NOR-Verknüpfung mit Schaltern

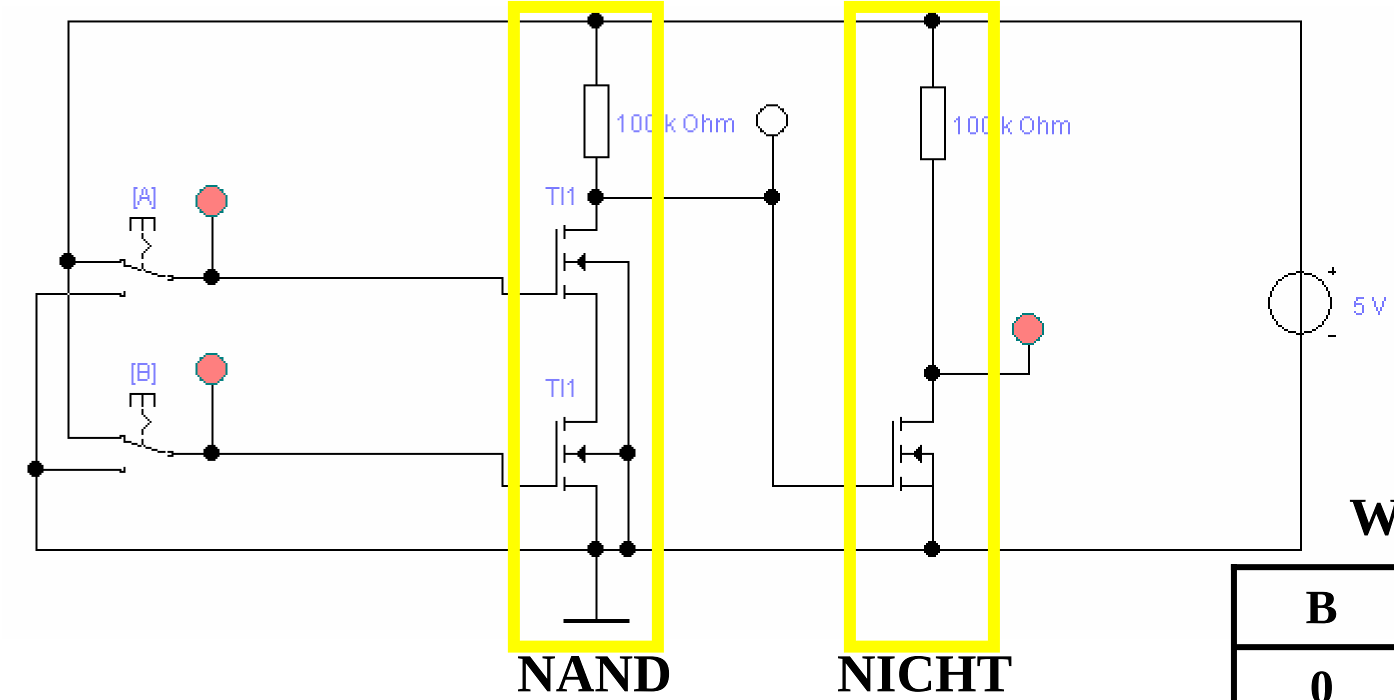
Wertetabelle

B	A	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

NOR-Verknüpfung mit NMOS-Transistoren

UND-Gatter

- Verknüpfung aus NAND und NICHT
  - ⇨ NMOS-Transistorschaltbild

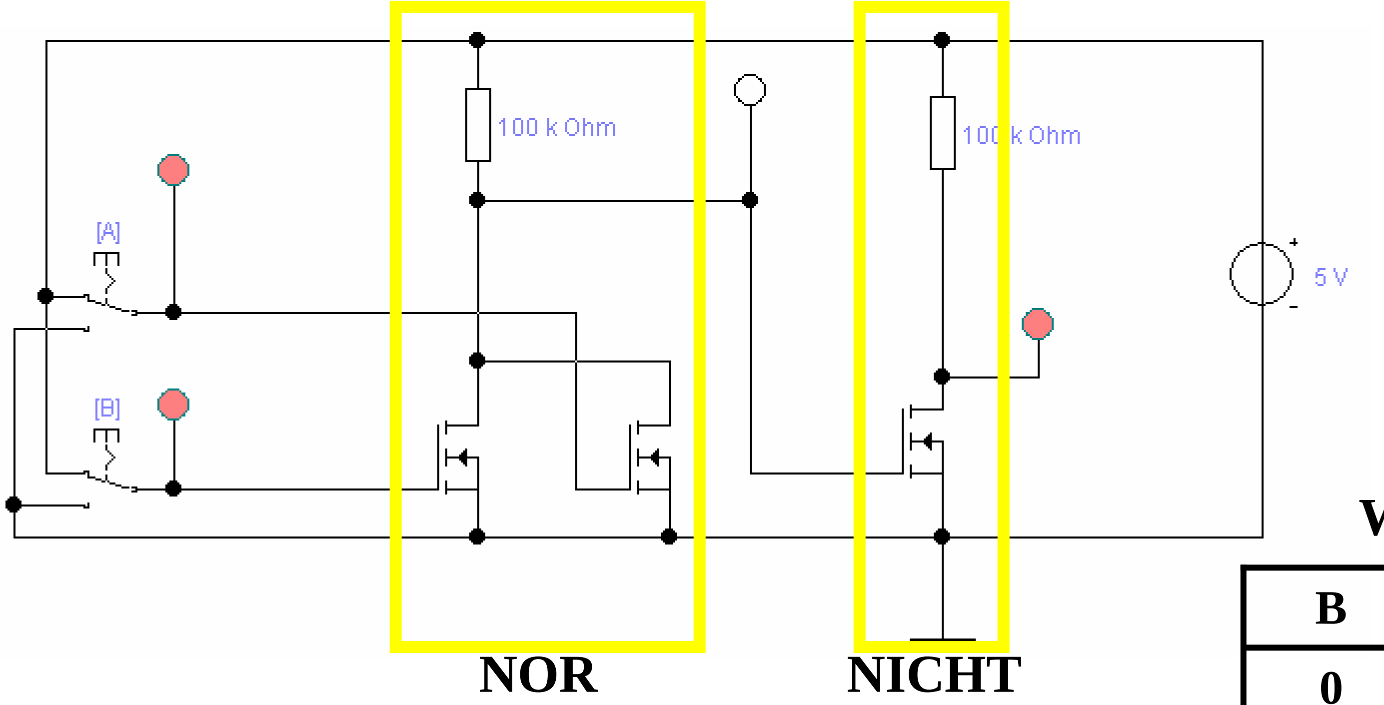


Wertetabelle

B	A	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ODER-Gatter

- **Verknüpfung aus NOR und NICHT**
  - ⇨ **NMOS-Transistorschaltbild**



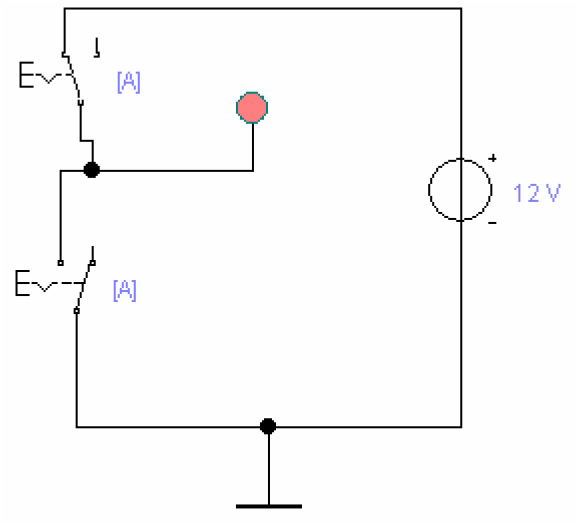
Wertetabelle

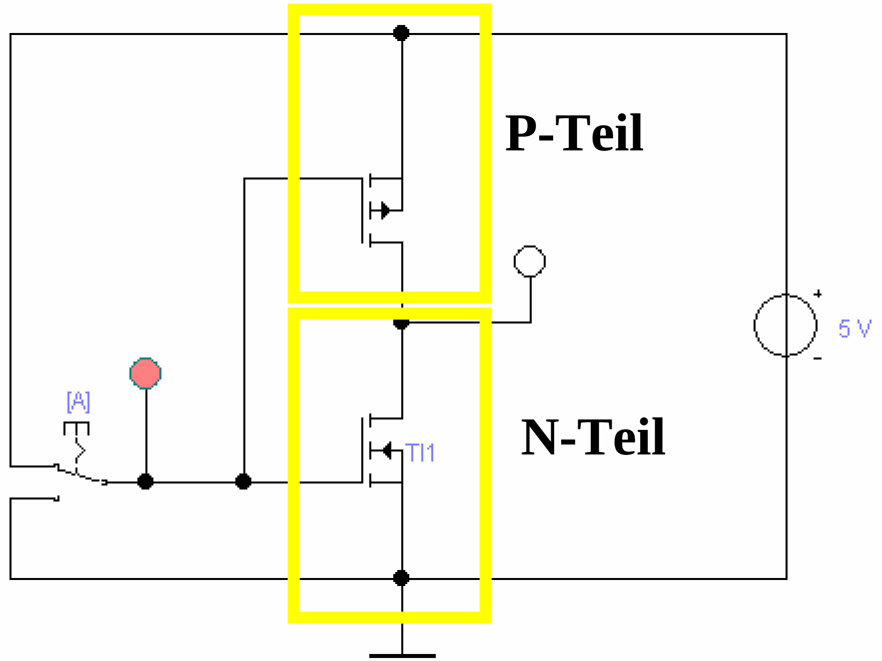
B	A	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

6 Logische Schaltungen in CMOS-Technik

- **Heute werden fast alle logischen Bauelemente in CMOS-Technik hergestellt**
  - ⇨ **CMOS: Complementary MOS**
- **Prinzip**
  - ⇨ **Widerstand wird durch einen geschalteten PMOS-Transistor ersetzt**
  - ⇨ **PMOS-Transistoren schalten komplementär zu NMOS-Transistoren**
    - **Der pMOS-Transistor leitet, wenn eine „0“anliegt und sperrt bei einer „1“**
    - **Der nMOS-Transistor sperrt, wenn eine „0“ anliegt und leitet bei einer „1“**
    - **NMOS-Transistoren leiten die „0“ gut**
    - **NMOS-Transistoren werden mit der Masse (GND) verbunden**
    - **PMOS-Transistoren leiten die „1“ gut**
    - **PMOS-Transistoren werden mit der Spannungsversorgung verbunden**
  - ⇨ **Auf jedem Pfad zwischen VDD und GND ist mindestens ein Transistor gesperrt**
- **Vorteil**
  - ⇨ **Keine Widerstände**
  - ⇨ **Es fließt nur ein geringer Strom**
- **Nachteil**
  - ⇨ **Schwierigere Herstellung, da NMOS- und PMOS Transistoren auf dem selben Substrat integriert werden müssen**

CMOS NICHT-Gatter



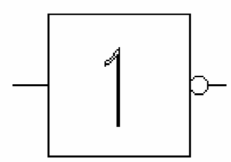


CMOS NICHT-Verknüpfung mit Schaltern
(Beide Schalter werden mit dem gleichen Eingangssignal Gesteuert)

CMOS NICHT-Verknüpfung mit MOS-Transistoren

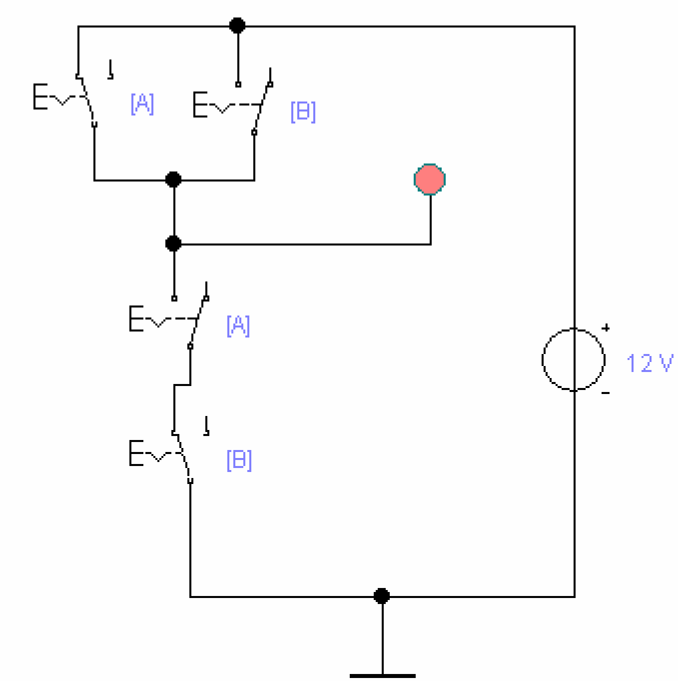
Wertetabelle

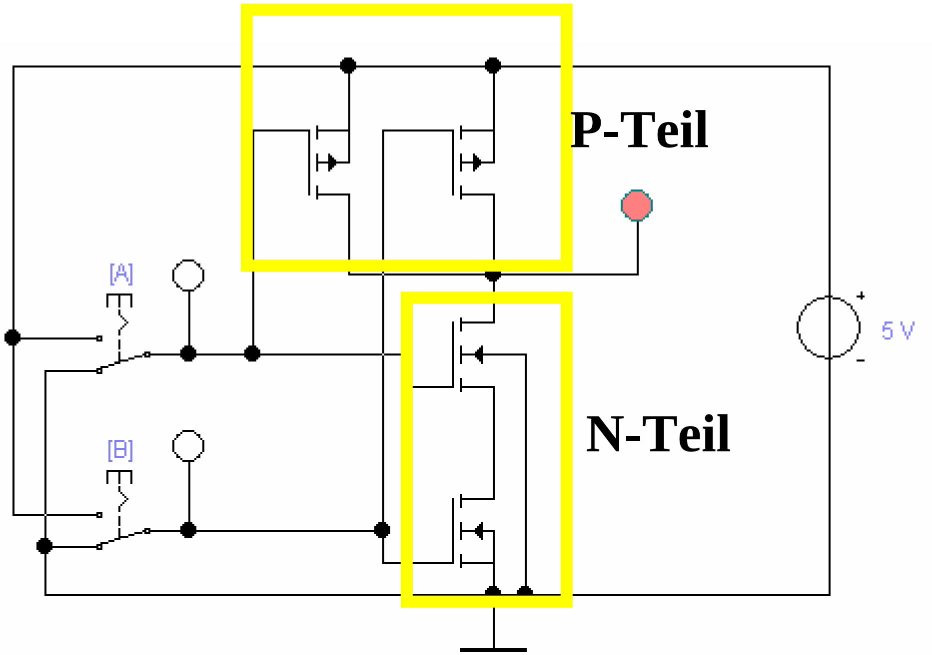
A	Y
0	1
1	0



Schaltzeichen

CMOS NAND-Gatter



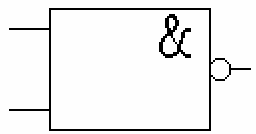


NAND-Verknüpfung mit Schaltern

Wertetabelle

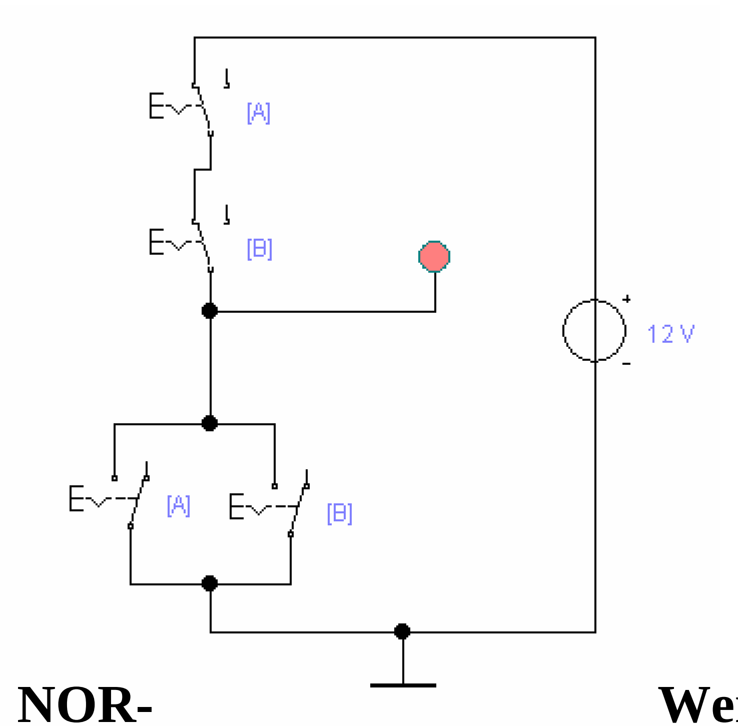
B	A	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

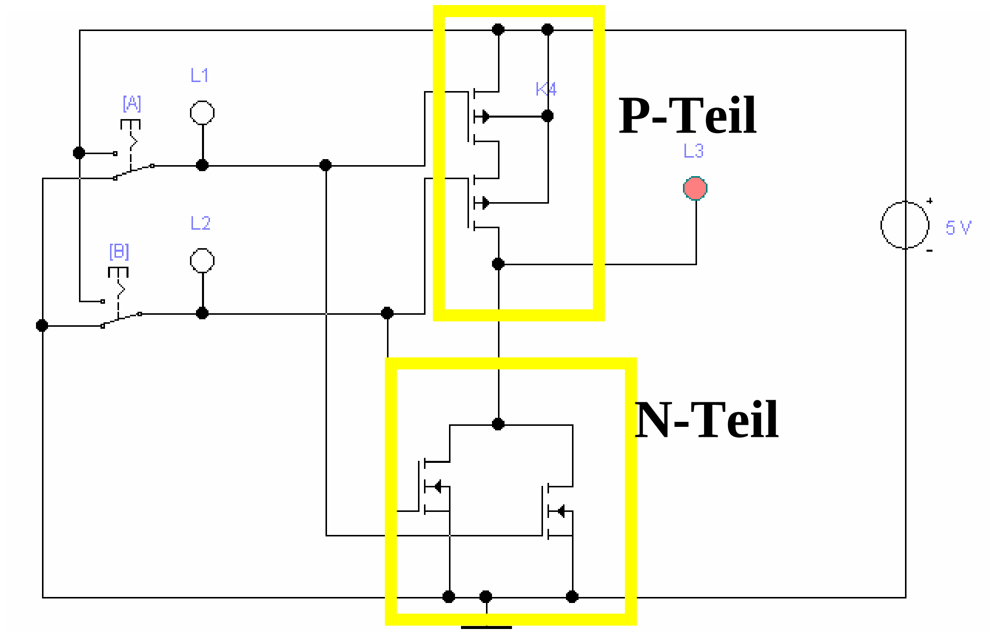
NAND-Verknüpfung mit MOS-Transistoren



Schaltzeichen

CMOS NOR-Gatter



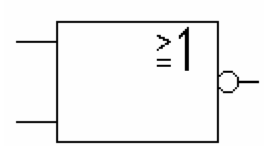


NOR-Verknüpfung mit Schaltern

Wertetabelle

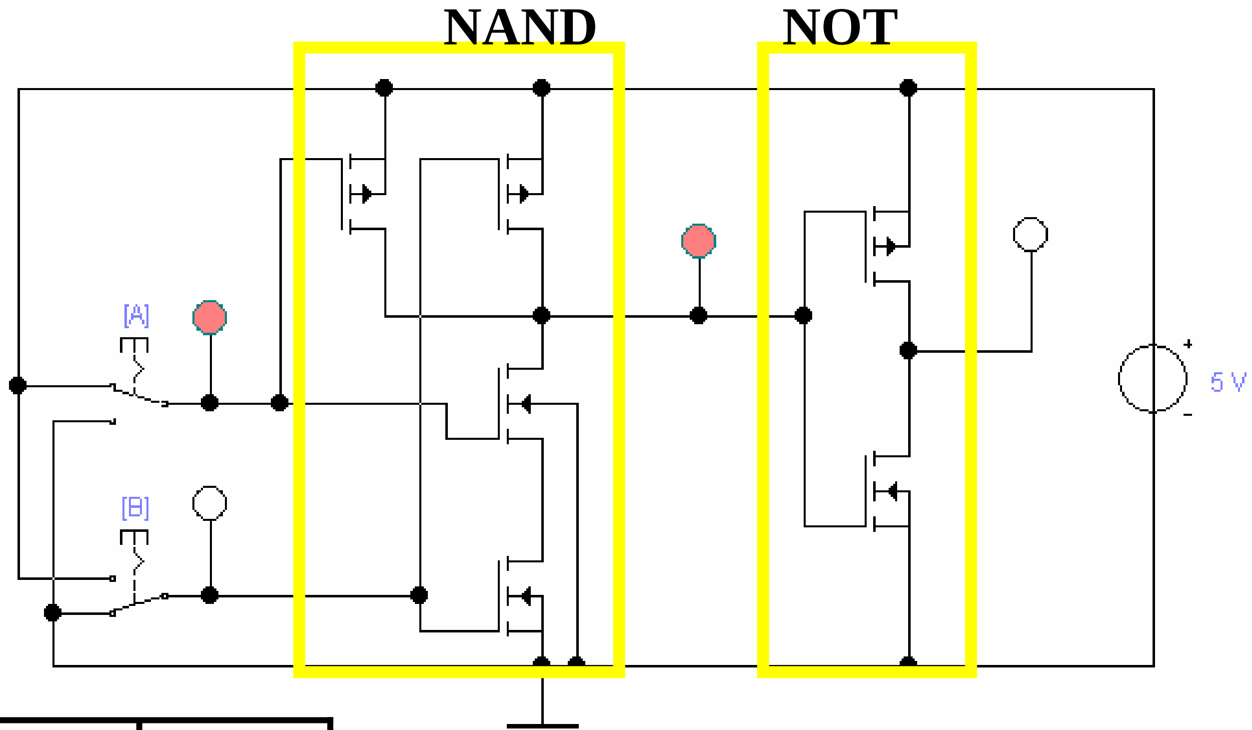
B	A	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

NOR-Verknüpfung mit MOS-Transistoren



Schaltzeichen

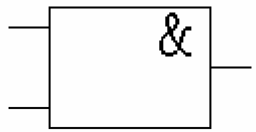
CMOS UND-Gatter



Wertetabelle

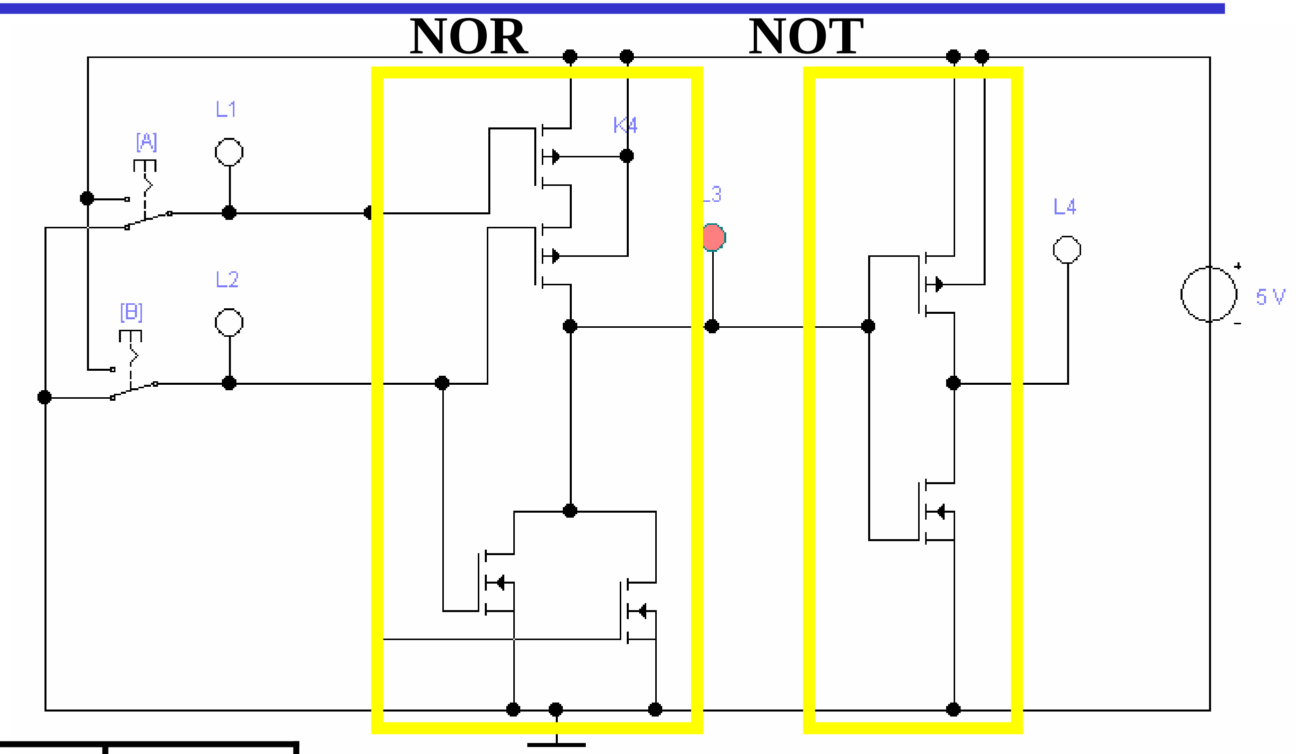
B	A	NAND	UND
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

UND-Verknüpfung aus NAND und NOT



Schaltzeichen

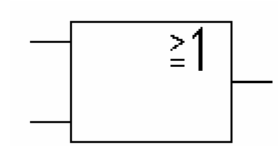
CMOS ODER-Gatter



Wertetabelle

B	A	NOR	ODER
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	1

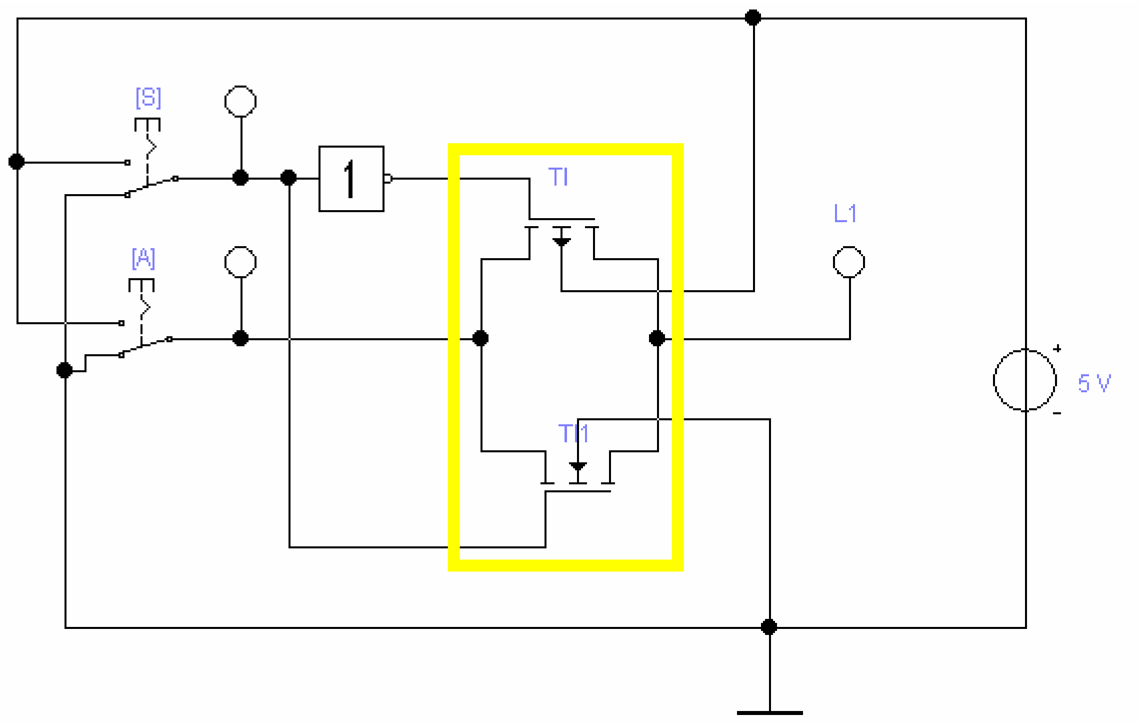
ODER-Verknüpfung aus NOR und NOT



Schaltzeichen

Komplementärschalter (Transmission Gate)

- Parallelschaltung eines PMOS- und eines NMOS-Transistors

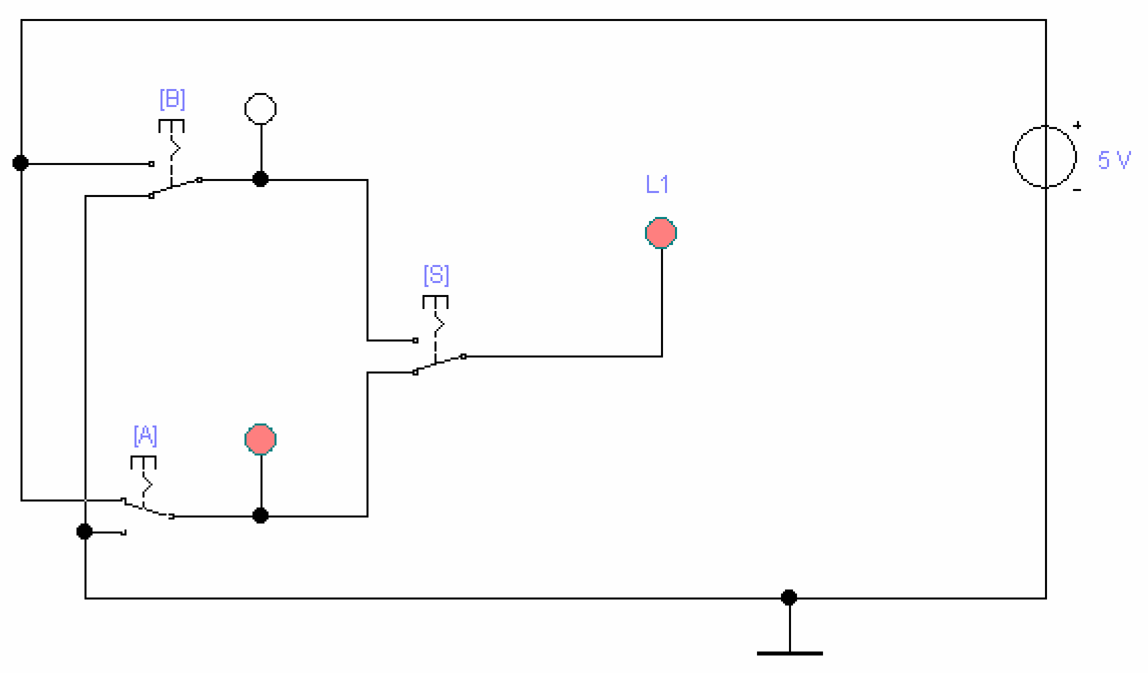


Multiplexer

- Wählt den Signalfluss über ein Steuersignal

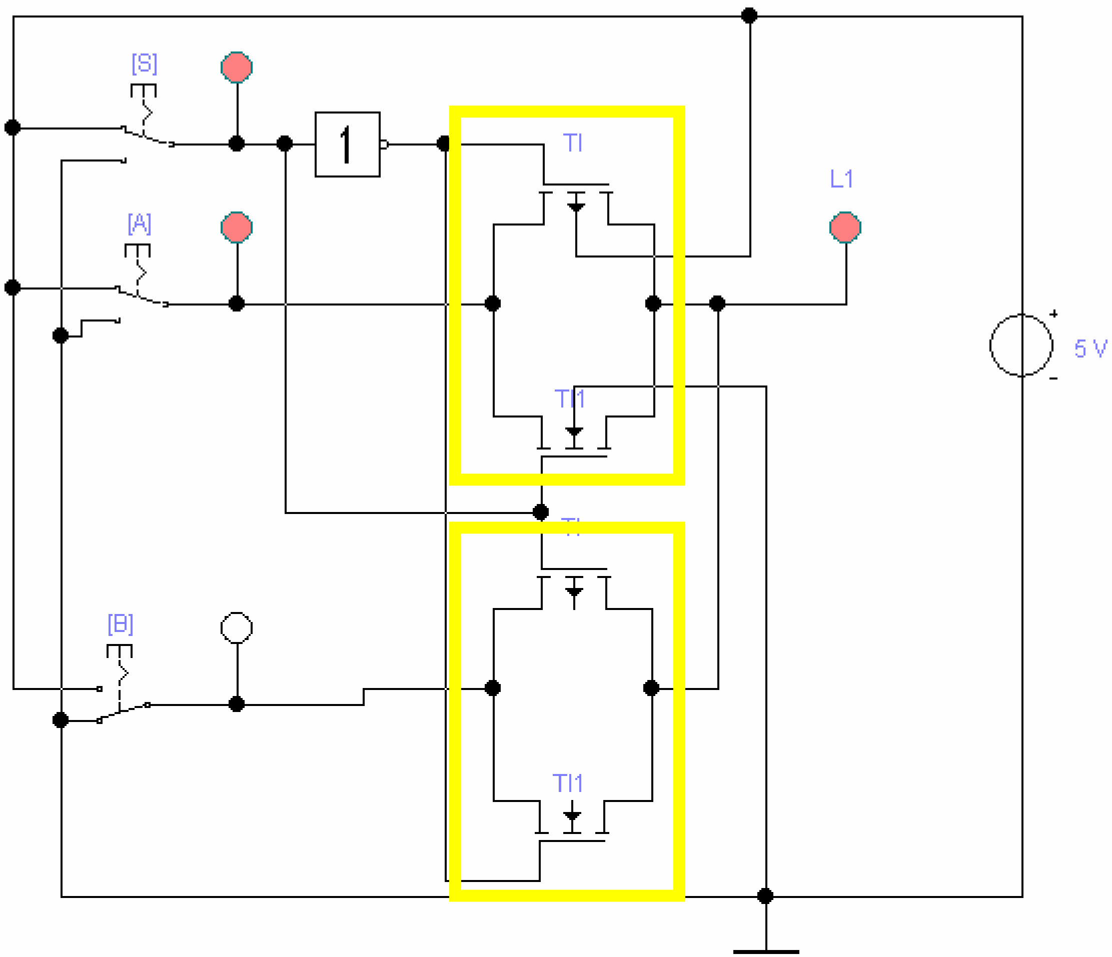
Wertetabelle

S	B	A	MUX
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1



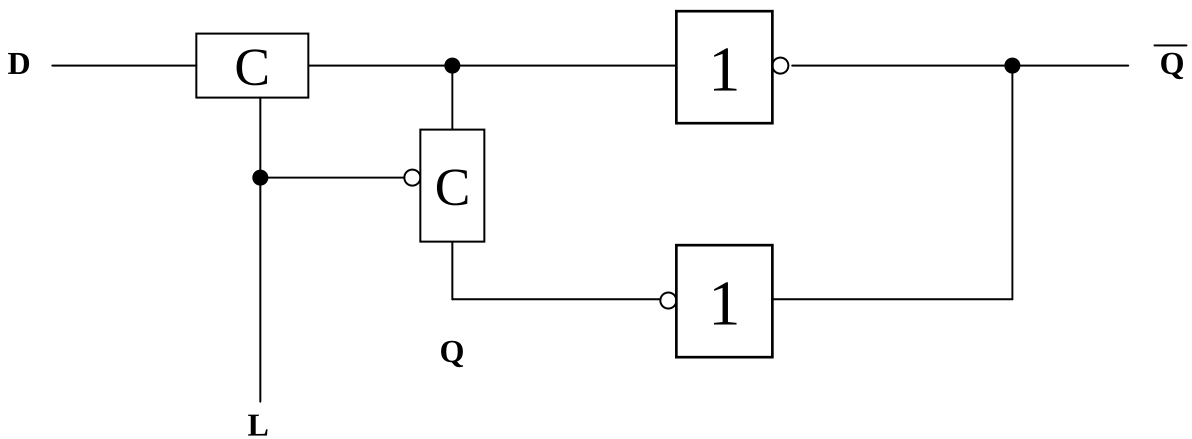
Multiplexer

- Multiplexer können aus Komplementärschaltern aufgebaut werden

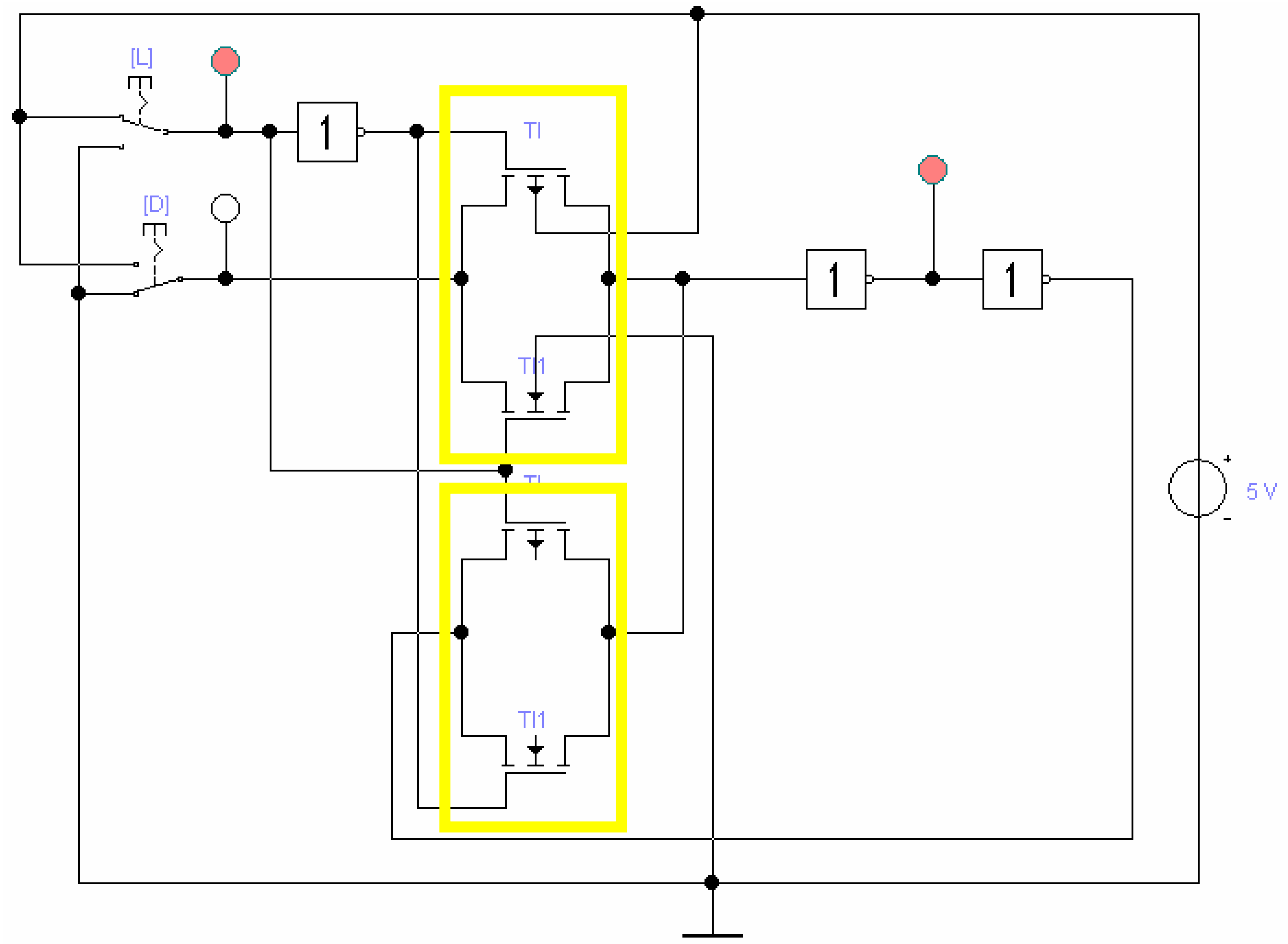


Speicher

- **Auch ein Speicherelement kann aus den bisher behandelten CMOS-Strukturen aufgebaut werden**
  - ⇨ **Man benötigt zwei Inverter und einen Multiplexer.**
  - ⇨ **Die Ausgabe folgt der Eingabe, wenn L=1**
  - ⇨ **Die Ausgabe speichert den letzten Wert, wenn L=0**
- **Schaltbild:**



Schaltverhalten des Speichers



Größe der CMOS-Schaltfunktionen

Schaltfunktion	Anzahl der Transistoren
NICHT	2
NAND	4
NOR	4
UND	6
ODER	6
Komplementärschalter	4
Multipexer	6
Speicher	10

Komplexe Schaltfunktionen

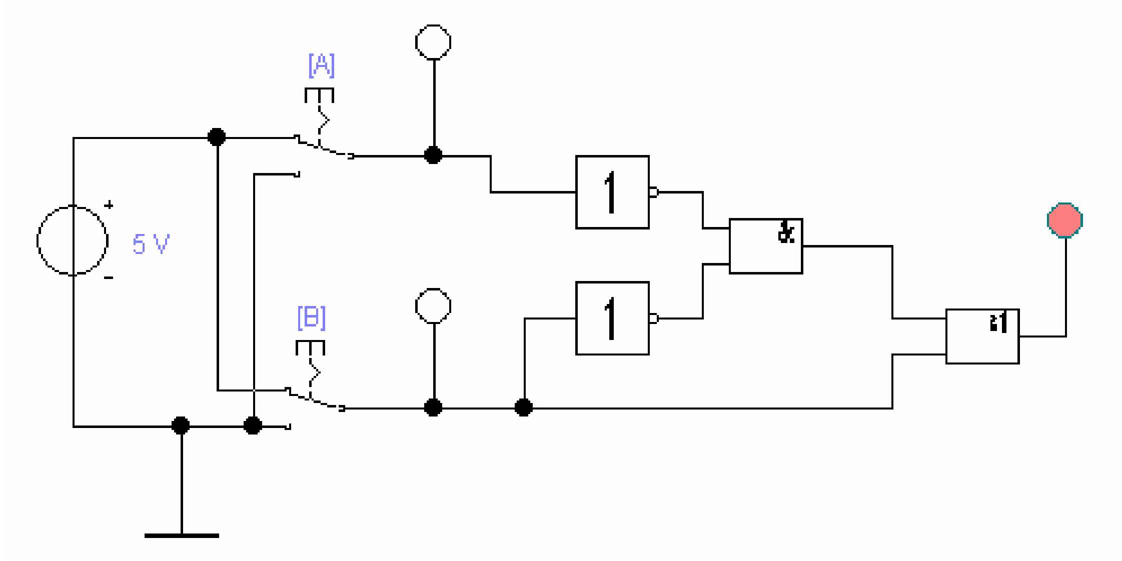
- **Zwei Möglichkeiten**
  - ⇨ **Aufbau durch einfache Gatter**
  - ⇨ **Realisierung als CMOS-Schaltfunktion**
- **Grundregeln des CMOS-Entwurfs**
  - ⇨ **Zu keinem Zeitpunkt darf ein Pfad von der Spannungsversorgung zur Masse geschaltet sein**
    - **Alle parallelen NMOS-Transistoren müssen im P-Teil in Reihe geschaltet werden**
    - **Alle in Reihe geschalteten NMOS-Transistoren müssen im P-Teil parallel geschaltet werden**
  - ⇨ **PMOS-Transistoren schalten die Spannungsversorgung**
  - ⇨ **NMOS-Transistoren schalten die Masse**

Beispiel

- Gegeben: Die Wertetabelle

B	A	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Realisierung mit einfachen Gattern

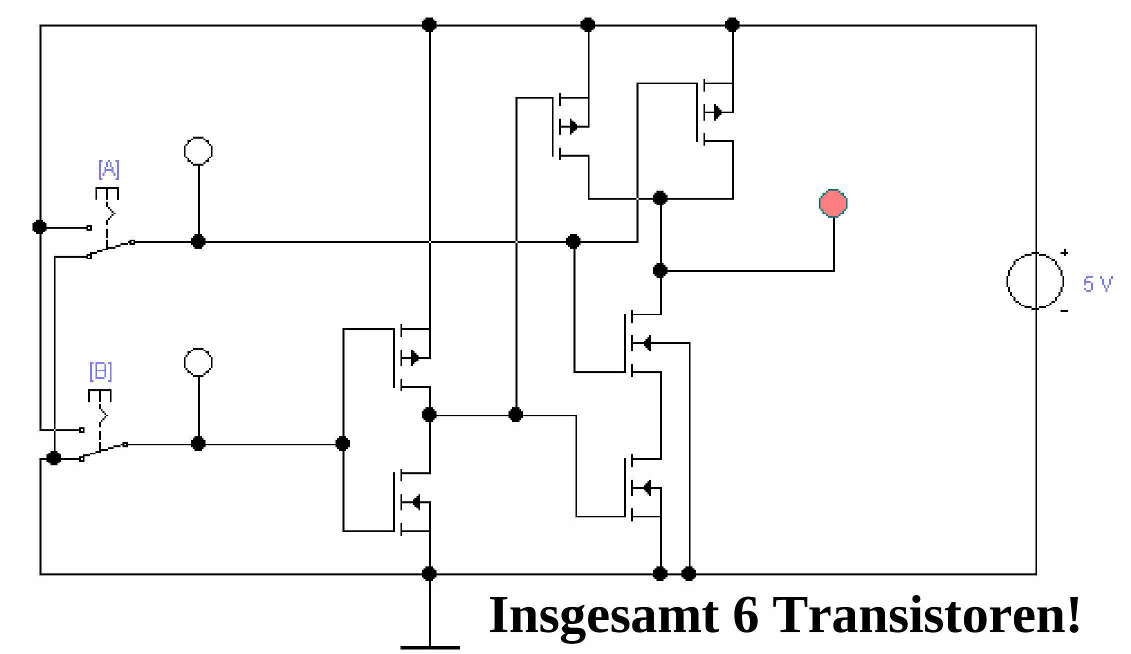


Insgesamt 2+2+6+6=16 Transistoren!

Realisierung als CMOS Komplexgatter

- **Realisierung als CMOS-Komplexgatter**
  - ⇨ **Entwicklung des N-Teils aus den Nullstellen der Wertetabelle**
    - **Die Schaltung hat den Wert „0“ wenn A auf „1“ ist und B auf „0“**
    - **Negation des Signals B zu ¬B**
    - **Reihenschaltung von A und ¬B**
  - ⇨ **Entwicklung des P-Teils durch Reihen/Parallel Wandlung aus dem N-Teil**

B	A	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

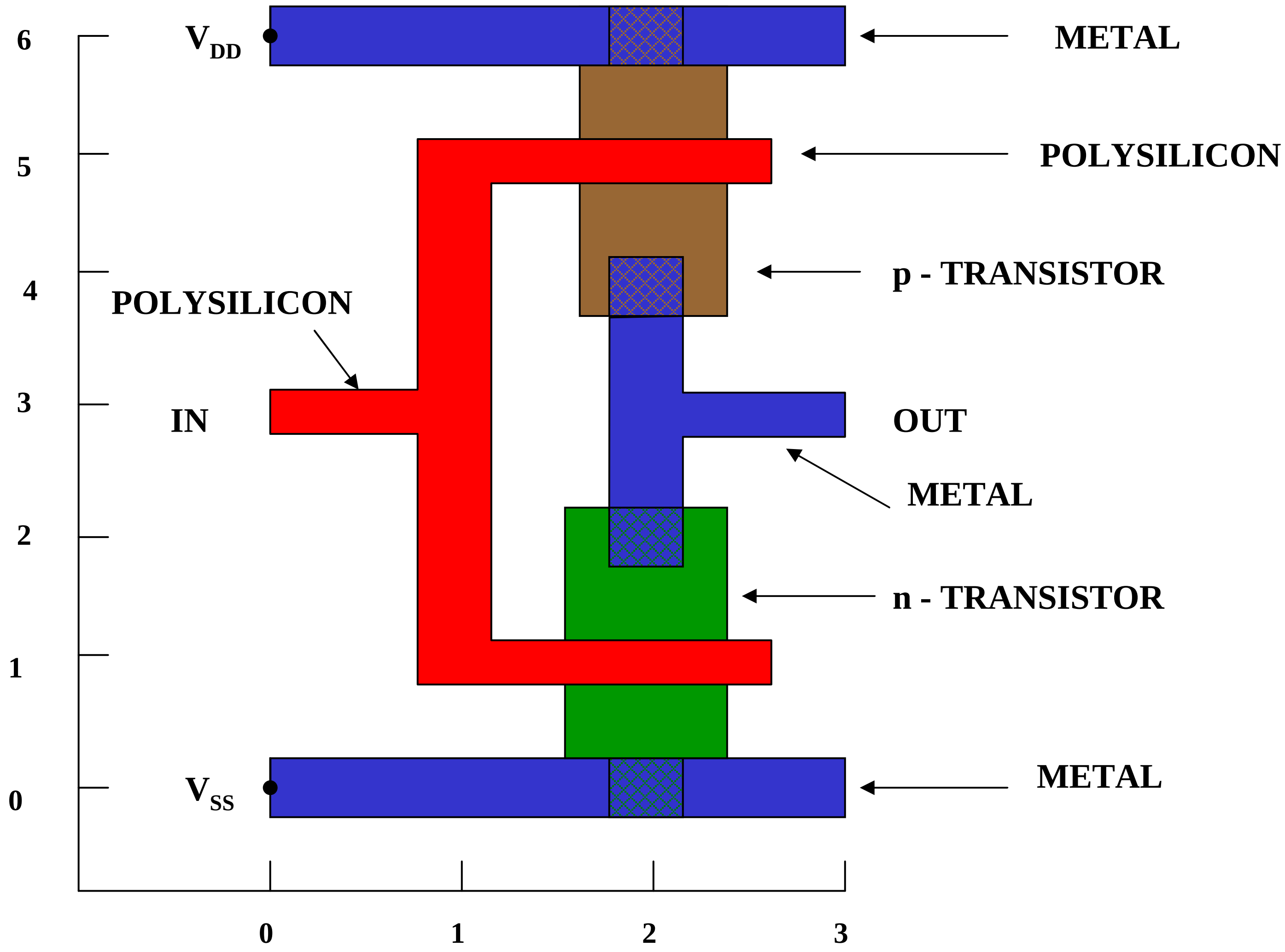


Insgesamt 6 Transistoren!

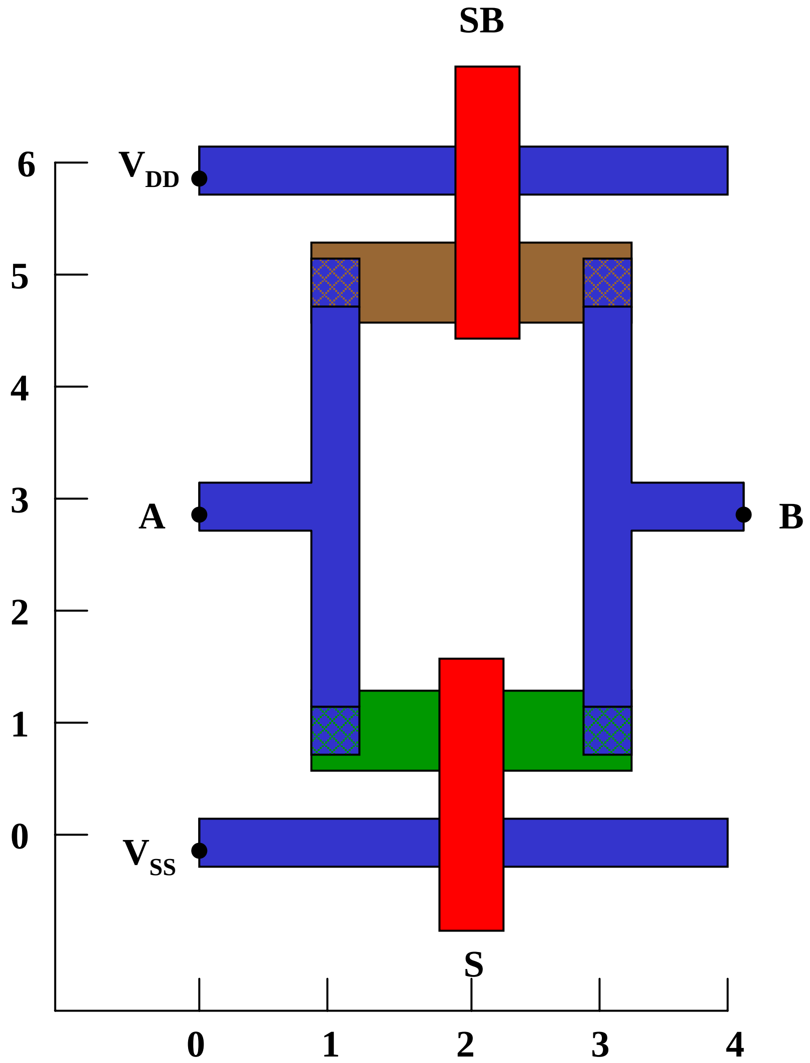
7 Physikalische Darstellung von MOS-Schaltkreisen

- **Die physikalische Darstellung von MOS-Schaltkreisen wird benutzt um zu beschreiben, wie der physikalische Aufbau einer integrierten Schaltung ist. Im Prinzip können daraus automatisch die Belichtungsmasken erstellt werden.**
- **Die einzelnen Transistoren entstehen durch Übereinanderlegen von Schichten**
  - ⇨ **p-Diffusion (positiv dotiert)**
  - ⇨ **n-Diffusion (negativ dotiert)**
  - ⇨ **Polysilizium (Gate)**
  - ⇨ **Metall1 und Metall2**
  - ⇨ **Kontakte**

Beispiel Inverter



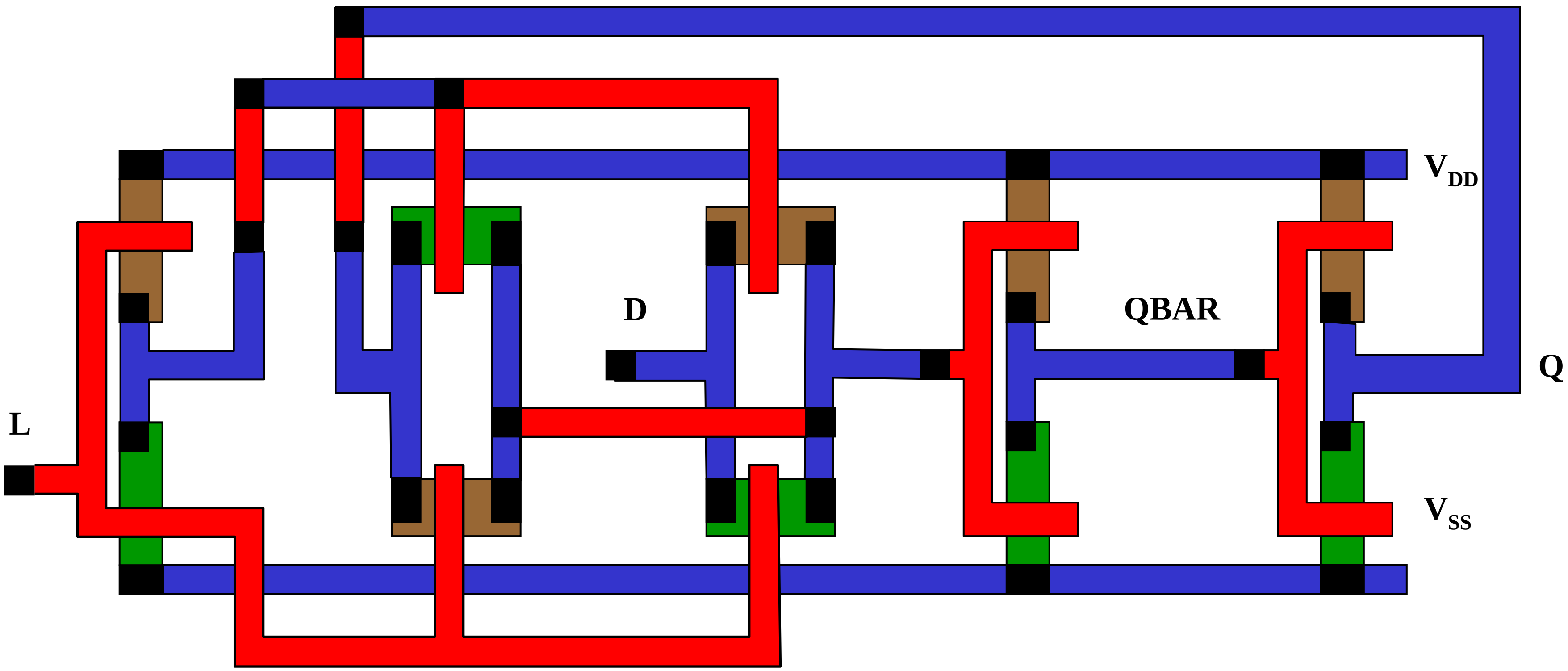
Beispiel Komplementärschalter



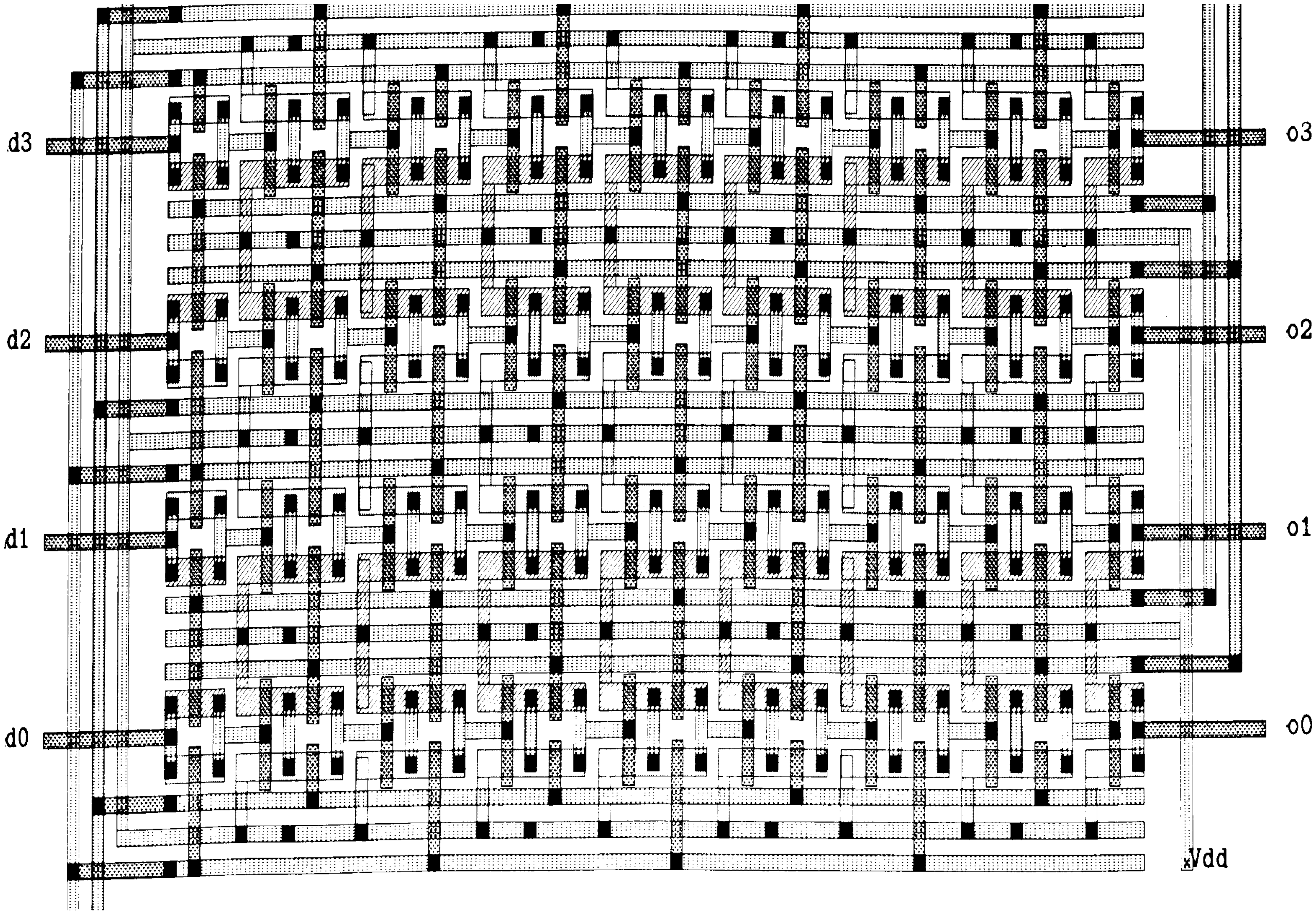
Sprachliche Beschreibung des Layouts eines Komplementärschalters

```
begin tg
t1: device n (2,1) or=east
t2: device p (2,5) or=east
         wire alum (0,0)(4,0)
         wire alum (0,6)(4,6)
         wire poly (2,-1)(2,1)
         wire poly (2,7)(2,5)
         wire alum (1,1)(1,5)
         wire alum (3,1)(3,5)
         wire alum (0,3)(1,3)
         wire alum (3,3) (4,3)
         contact md (1,1)
         contact md (3,1)
         contact md (1,5)
         contact md (3,5)
end
```

Beispiel Flipflop



Beispiel Schieberegister

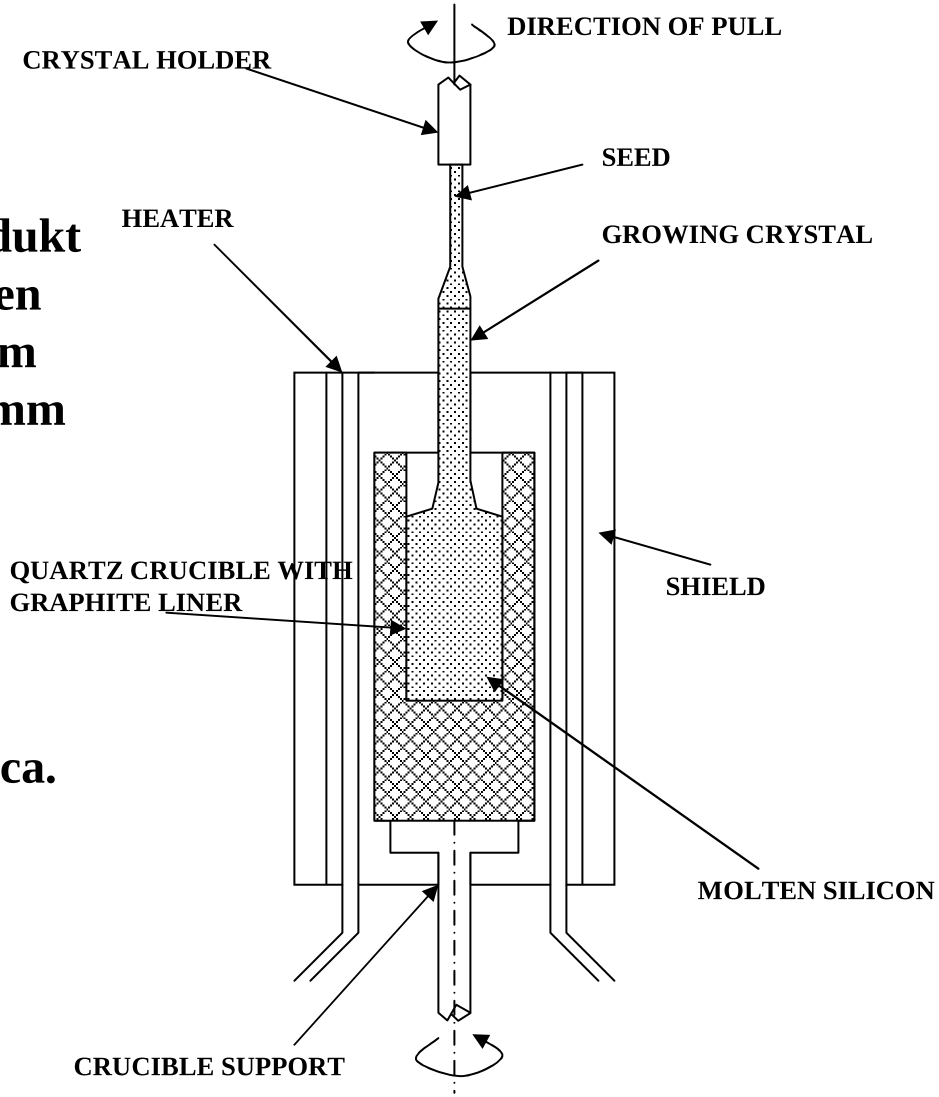


8 Der CMOS-Fertigungsprozeß

8.1 Herstellung von Wafern

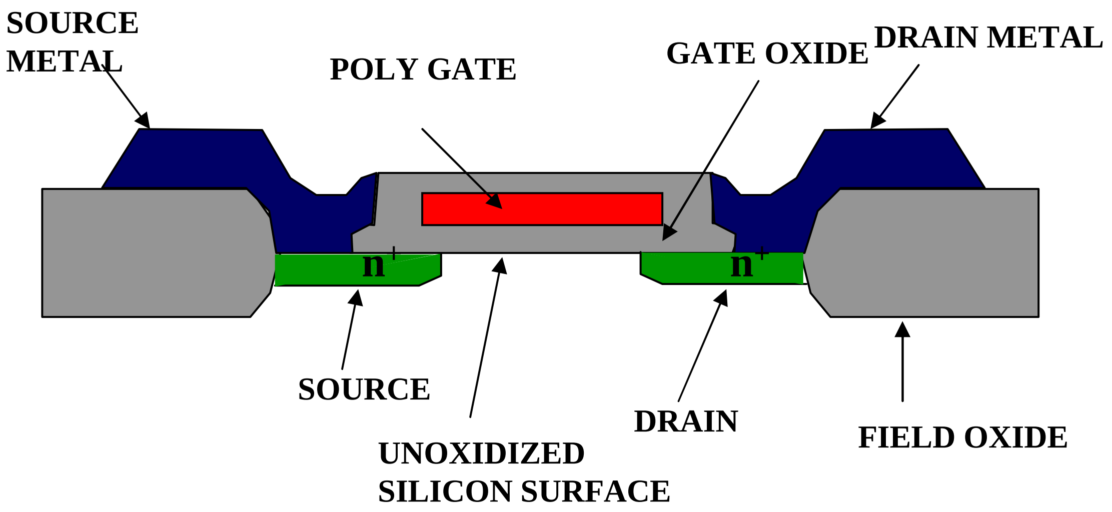
In diesem Abschnitt folgt eine Übersicht, wie CMOS-Schaltungen gefertigt werden. Das Ausgangsprodukt sind monokristalline Siliziumscheiben deren. Dicke zwischen 0.25 und 1 mm und deren Durchmesser 75 bis 150 mm beträgt. Diese Scheiben nennt man Wafer

- **Monokristallin bedeutet, dass das Silizium in einer möglichst reinen Kristallstruktur erstarrt. Der Schmelzpunkt von Silizium beträgt ca. 1425 °C**
- **Heute wird meist die Czochralski-Methode angewandt bei der die Wachstumsrate ca. 30 bis 180 mm/Stunde beträgt**



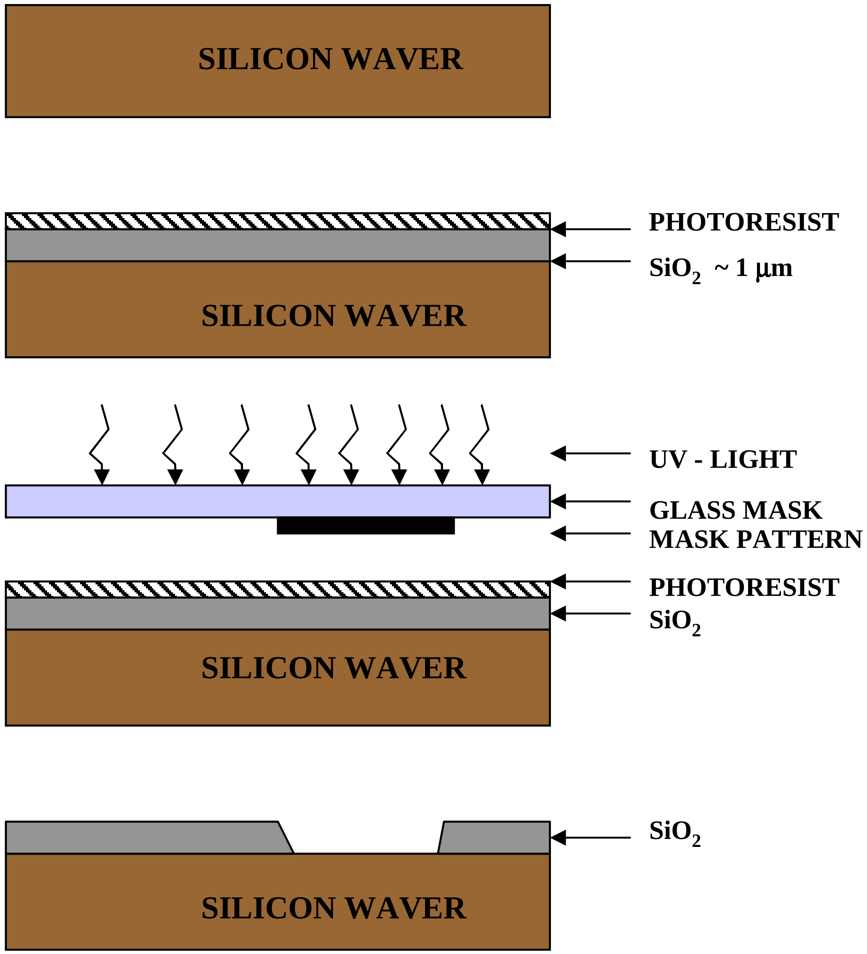
Oxydation

- Siliziumoxyd (SiO2) ist ein guter Isolator. Es wird erzeugt, indem der Wafer einer oxydierenden Umgebung ausgesetzt wird
- Wasserdampf bei 900×C bis 1000×C (schnelle Oxydierung)
- Sauerstoff bei 1200×C (langsame Oxydierung)
- SiO2 besitzt etwa das doppelte Volumen von Silizium und es wächst sowohl vertikal als auch horizontal



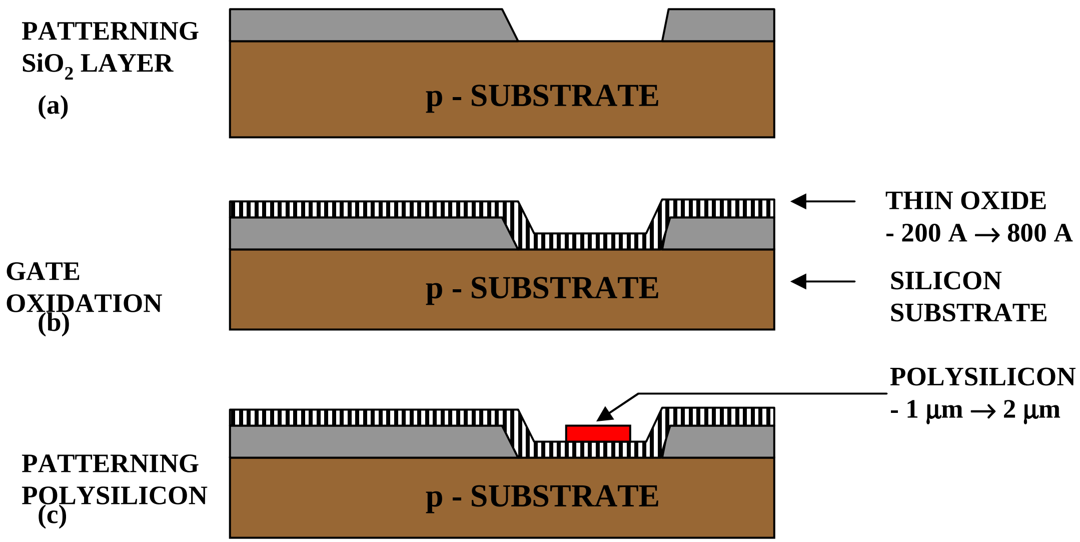
Selektive Diffusion

- Selektive Diffusion ist das Erzeugen verschieden dotierter Siliziumschichten.
- Flächen müssen dabei
  - beliebige Formen annehmen können
  - genau plaziert sein
  - genau skaliert sein
- Das SiO2 verhindert den Dotierungsvorgang. Es kann später durch eine Säure entfernt werden, die das Silizium nicht angreift.
- Prinzip der selektiven Dotierung:
  - Oxydieren der Siliziumoberfläche
  - Beschichten mit einem lichtempfindlichen Lack
  - Belichten mit UV-Licht über eine Maske
  - Entfernen des nicht belichteten Photolacks und des darunterliegenden Siliziumoxyds

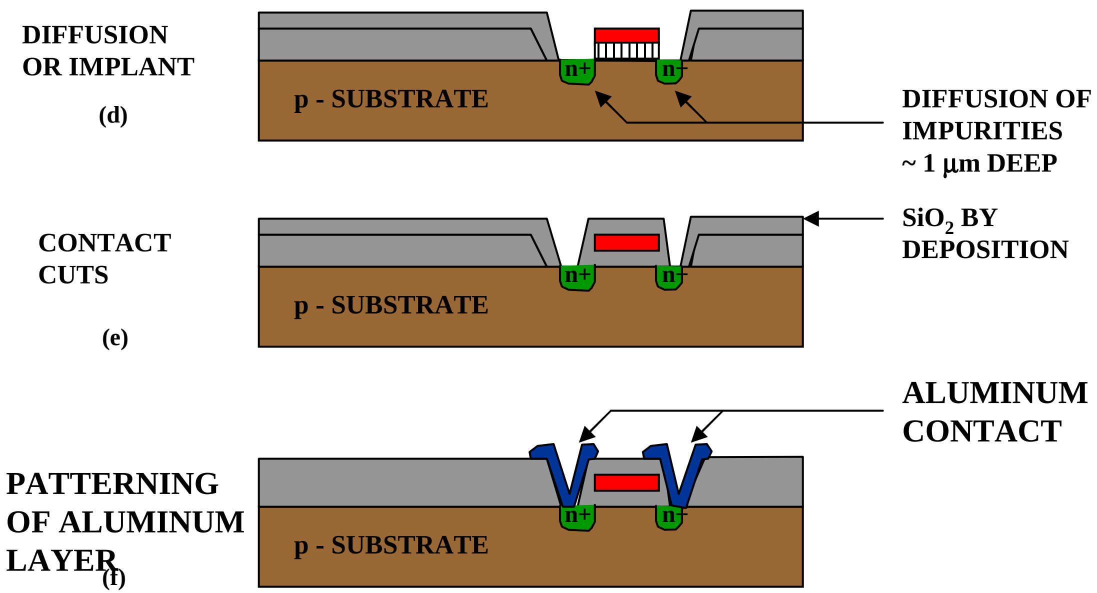


8.2 Entstehung eines NMOS Transistors

- **Zunächst wird der Wafer mit einer dicken SiO2-Schicht überdeckt**
- **An den Stellen, an denen Transistoren entstehen sollen, werden diese freigelegt (a)**
- **Die gesamte Fläche wird mit einer dünnen, sehr einheitlichen SiO2-Schicht überdeckt (b)**
- **Der Wafer wird mit einem Photolack überzogen und an den Stellen, an denen Gates entstehen sollen, freigelegt. Polykristallines Silizium wird aufgedampft (c)**

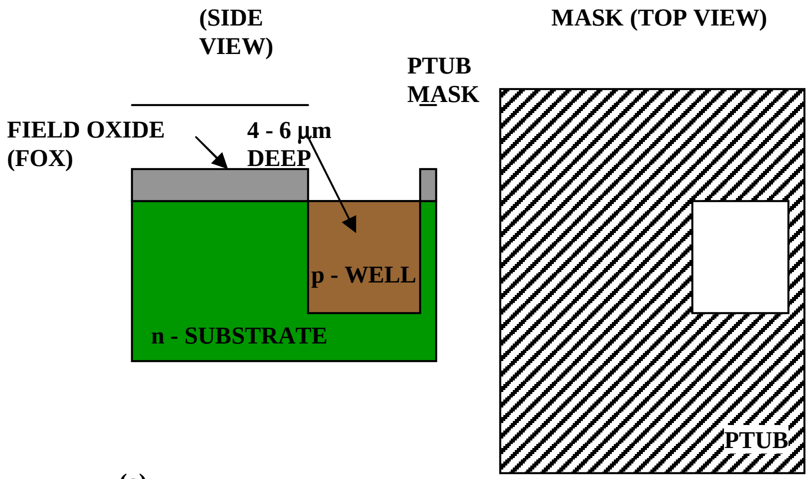


- Mit den gleichen Arbeitsschritten werden die Flächen für die negative Dotierung freigelegt.Die freigelegten Flächen werden negativ dotiert (d).Der Wafer wird erneut mit einer SiO2-Schicht überdeckt
- Die Kontaktstellen werden durch Ätzung freigelegt.
- Die Metallbahnen zur Verbindung werden aufgedampft.

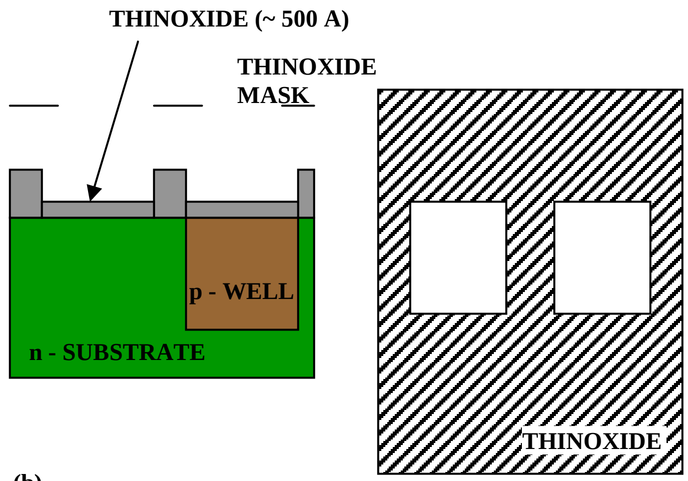


8.3 Entstehung eines CMOS-Inverters

- **Beim CMOS-Prozeß müssen negativ dotierte Flächen für pMOS-Transistoren geschaffen werden (p-Well, p-Wannen).**

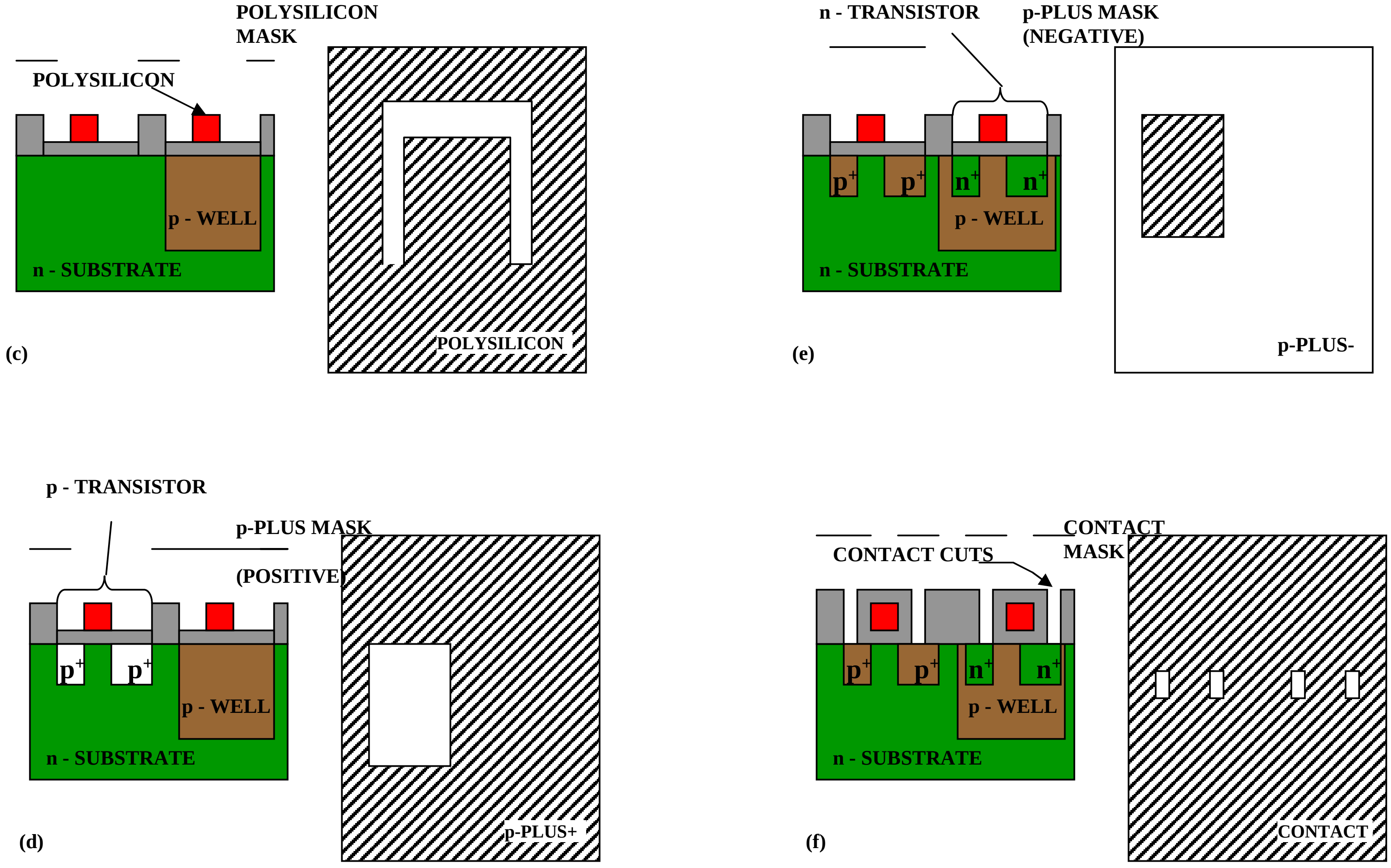


(a)



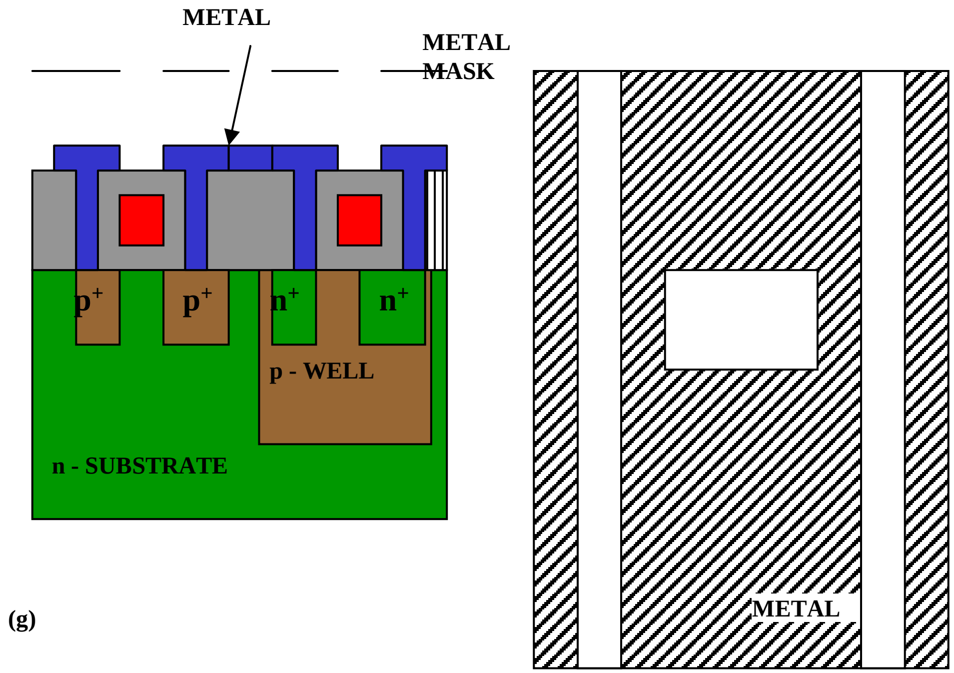
(b)

Entstehung eines CMOS-Inverters

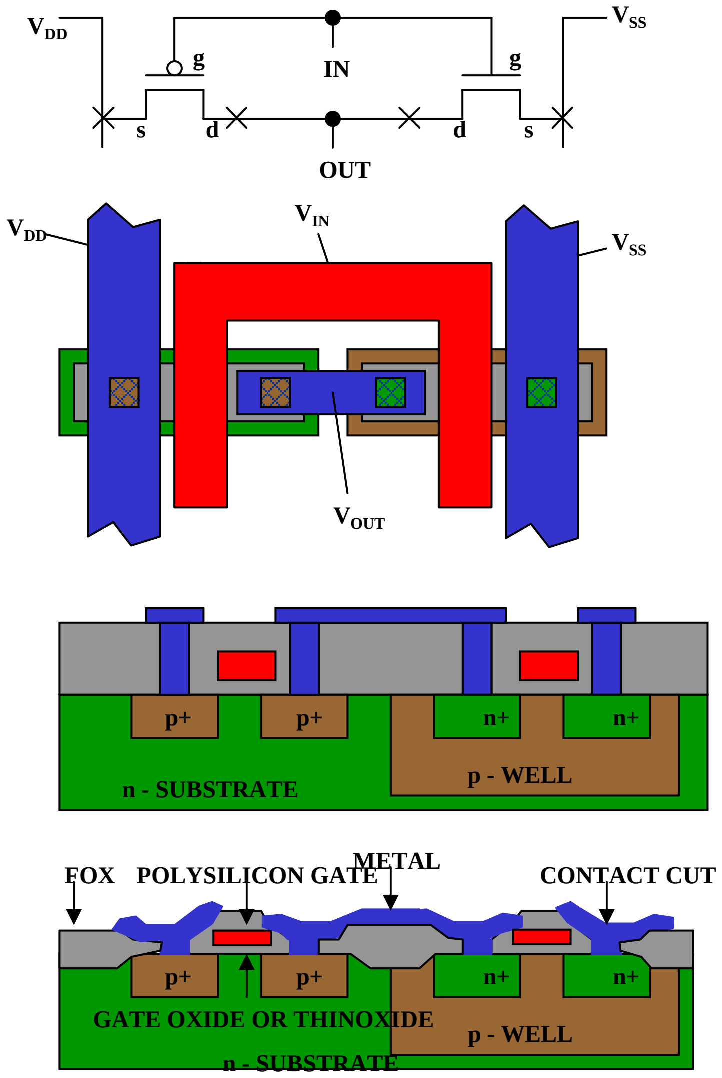


U. Kebschull

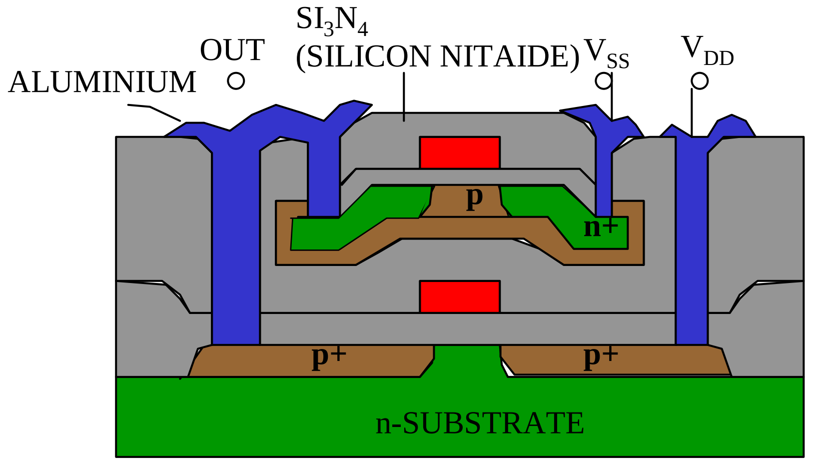
Entstehung eines CMOS-Inverters

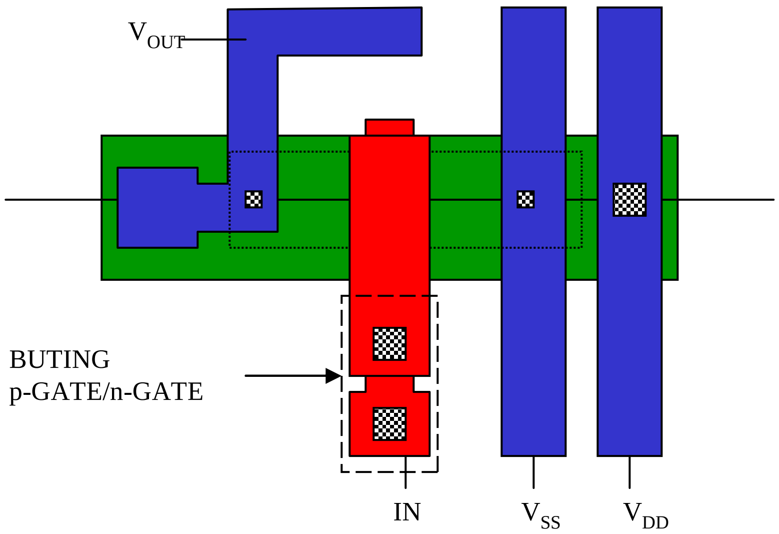


Zusammenhang zwischen Schaltplan und Realisierung



Moderne CMOS-Techniken: ein 3D-CMOS-Inverter





9 Schaltnetze

- **Entwurf und Realisierung digitaler Schaltnetze**
  - ⇨ **Formale Grundlagen**
  - ⇨ **Realisierung**
  - ⇨ **Entwurf**
  - ⇨ **Laufzeiteffekte**

9.1 Formale Grundlagen

- **George Boole (1815-1864)**
  - ⇨ **Algebra der Logik (Boolesche Algebra)**

> **Def. 9.1: Eine <u>Boolesche Algebra</u> ist eine Menge *V={a,b,c,...}*, auf der zwei zweistellige Operationen ◊ und # so definiert sind, dass durch ihre Anwendung auf Elemente aus V wieder Elemente aus V entstehen (<u>Abgeschlossenheit</u>).**
> **Es müssen die <u>Huntingtonschen Axiome</u> gelten.**

Huntingtonschen Axiome

- **Kommutativgesetze:**

$$a \lozenge b = b \lozenge a$$

$$a \# b = b \# a$$

- **Distributivgesetze:**

$$a \lozenge (b \# c) = (a \lozenge b) \# (a \lozenge c)$$

$$a \# (b \lozenge c) = (a \# b) \lozenge (a \# c)$$

- **Neutrale Elemente:**

Es existieren zwei Elemente *e*, *n* $\in$ *V*, so dass gilt:

$a \lozenge e = a$ **(*e* wird <u>Einselement</u> genannt)**

$a \# n = a$ **(*n* wird <u>Nullelement</u> genannt)**

- **Inverse Elemente:**

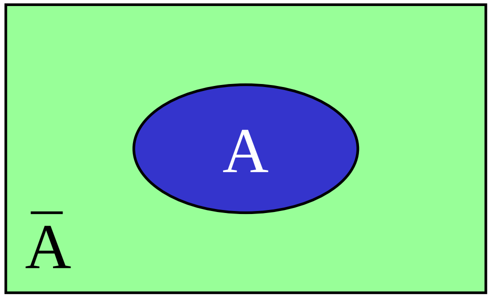
Für alle *a* $\in$ *V* gibt es ein $\overline{a}$, so dass gilt:

$$a \lozenge \overline{a} = n$$

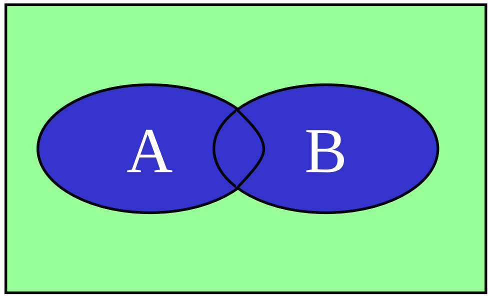
$$a \# \overline{a} = e$$

Beispiel: Mengenalgebra

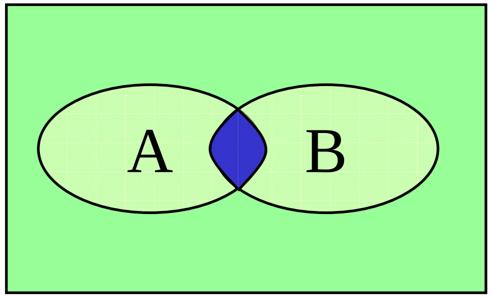
Boolesche Algebra	Mengenalgebra	
V	$P(T)$	**Potenzmenge einer Grundmenge T**
#	$\cup$	**Vereinigung**
◊	$\cap$	**Schnitt**
n	$\varnothing$	**Leere Menge**
e	T	**Grundmenge**
$\overline{a}$	$\overline{\text{A}}$	**Komplementmenge von A**



Komplement



$A \cup B$



$A \cap B$

Beispiel: Mengenalgebra

- **Grundmenge**

  T={,,}

- **Potenzmenge**

  P(T)= {∅,{}, {}, {}, {,}, {,}, {,}, {,,}}

- **Für alle A, B, C ∈ T gilt:**
  - **Abgeschlossenheit**

    $A \cup B \in P(T)$ $\qquad$ $A \cap B \in P(T)$
  - **Kommutativgesetze**

    $A \cap B = B \cap A$ $\qquad$ $A \cup B = B \cup A$
  - **Distributivgesetze**

    $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $\qquad$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  - **Neutrale Elemente**

    $A \cap T = A$ $\qquad$ $A \cup \emptyset = A$
  - **Inverse Elemente**

    $A \cap \overline{A} = \emptyset$ $\qquad$ $A \cup \overline{A} = T$

Schaltalgebra

- **Boolesche Algebra bei der die folgende Zuordnungstabelle gilt:**

Boolesche Algebra	**Schaltalgebra**	
V	$\boldsymbol{B} = \{0,1\}$	**Boolesche Grundmenge**
$\#$	$\vee$	**Oder**
$\lozenge$	$\wedge$	**Und**
n	0	**neutrales Element**
e	1	**Einselement**
$\overline{a}$	$\overline{x_i}$	**Negation**

- **Andere Schreibweisen**
  - **Oder:** $x_1 + x_2$, $x_1 \mid x_2$
  - **Und:** $x_1 \bullet x_2$, $x_1 * x_2$, $x_1 . x_2$, $x_1 \& x_2$, $x_1 x_2$
  - **Negation:** $/x_1$, $`x_1$, $\neg x_1$

Funktionstabellen

- Aus den Huntigtonschen Axiomen lassen sich bereits die Funktionstabellen der in der Algebra definierten Verknüpfungen ableiten

Oder

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Und

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Nicht

x_1	$\overline{x_1}$
0	1
1	0

Weitere Sätze

- **Aus den vier Huntigtonschen Axiomen lassen sich weitere Sätze ableiten**
  - **Assoziativgesetze**

    $(x_1 \wedge x_2) \wedge x_3 = x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3)$ $\quad$ $(x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3)$
  - **Idempotenzgesetze**

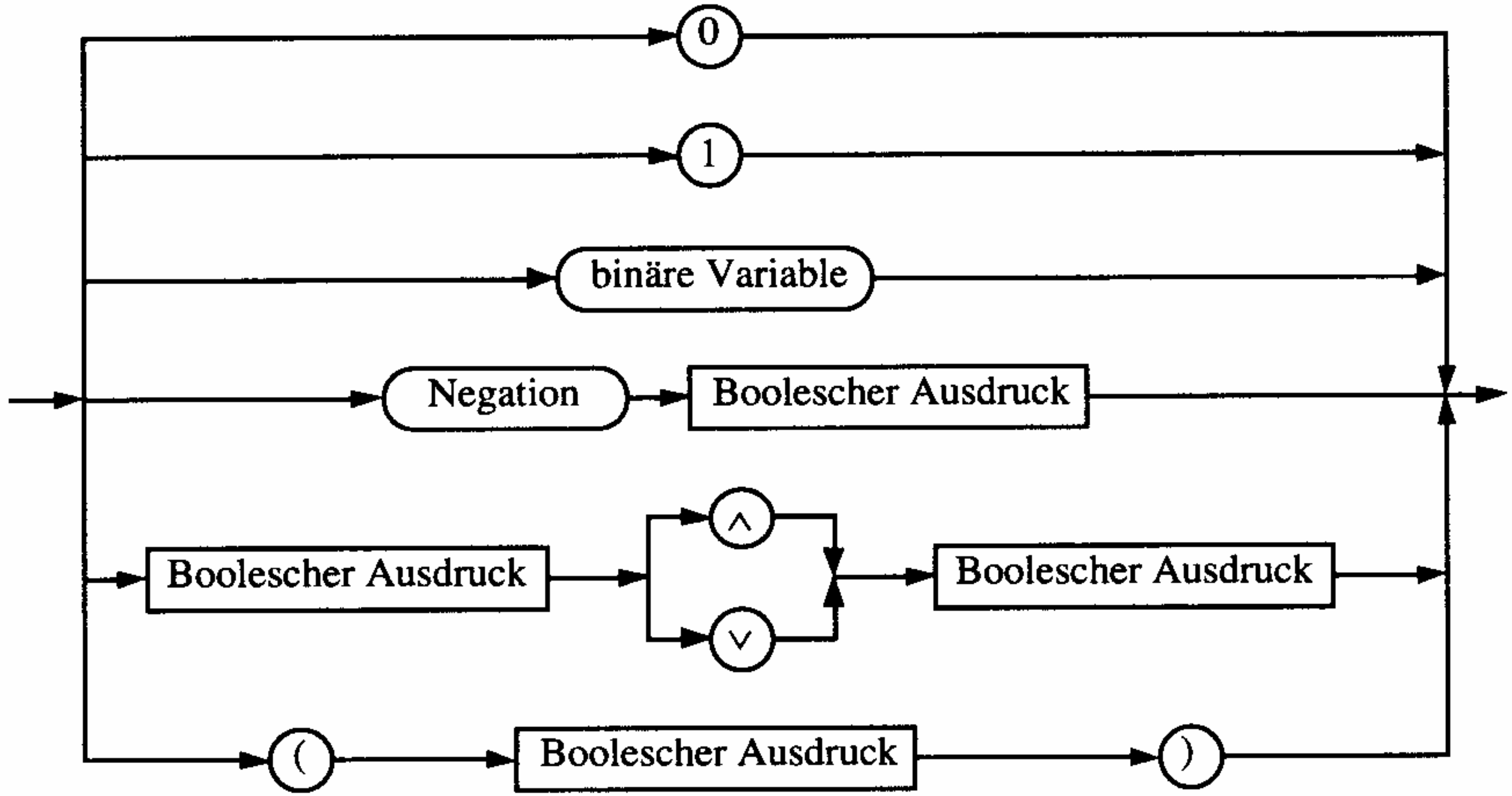
    $(x_1 \wedge x_1) = x_1$ $\quad$ $(x_1 \vee x_1) = x_1$
  - **Absorptionsgesetze**

    $x_1 \wedge (x_1 \vee x_2) = x_1$ $\quad$ $x_1 \vee (x_1 \wedge x_2) = x_1$
  - **DeMorgan-Gesetze**

    $\overline{x_1 \wedge x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$ $\quad$ $\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$

Boolescher Ausdruck

- **Zeichenfolge, die aus binären Variablen, den Operatoren $\wedge$, $\vee$ und Klammern besteht und den folgenden syntaktischen Regeln folgt:**



Boolescher Ausdruck

- **Boolesche Ausdrücke sind nur eine syntaktische Konstruktion**
  - **Bedeutung erhält ein Boolescher Ausdruck erst, wenn den Konstanten 0 und 1 die Wahrheitswerte „falsch“ oder „wahr“ zugeordnet wird**
- **Interpretation**
  - **Belegung der der binären Variablen eines Booleschen Ausdrucks mit Wahrheitswerten**
  - **Liefert eine Aussage, die entweder „wahr“ oder „falsch“ sein kann**
  - **Anwendung: Simulation**
- **Tautologie**
  - **Boolescher Ausdruck, bei dem alle Belegungen der binären Variablen den Wahrheitswert „wahr“ liefern**
  - $(x_1 \vee x_2) \vee (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2)$
  - **Anwendung: Verifikation von Schaltungen**

Boolesche Funktion

Def. 9.2: Es sei ein n-Tupel von binären Variablen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **gegeben. Eine <u>n-stellige Boolesche Funktion</u> ordnet jeder Belegung der Variablen** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **mit den Wahrheitswerten „wahr“ oder „falsch“ genau einen Wahrheitswert zu.**

$f:\{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ **oder** $f: B^n \rightarrow B$

Satz 9.1: Es gibt genau 2^n **verschiedene Belegungen der Variablen einer n-stelligen Booleschen Funktion. Die Anzahl verschiedener n-stelliger Boolescher Funktionen beträgt** $2^{(2^n)}$

Bew: Über Funktionstabelle

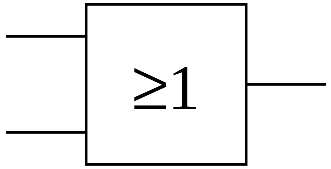
Übersicht der 2-stelligen Booleschen Funktionen

Benennung der Verknüpfung	Funktionswert $y = f(x_1, x_2)$ $x_1 = 0\,1\,0\,1$ $x_2 = 0\,0\,1\,1$	Schreibweise mit den Zeichen $\wedge \vee -$	Bemerkung
Null	$y_0 = 0\,0\,0\,0$	0	Null
UND–Verknüpfung	$y_1 = 0\,0\,0\,1$	$x_1 \wedge x_2$	x_1 UND x_2
Inhibition	$y_2 = 0\,0\,1\,0$	$\overline{x}_1 \wedge x_2$	
Transfer	$y_3 = 0\,0\,1\,1$	x_2	
Inhibition	$y_4 = 0\,1\,0\,0$	$x_1 \wedge \overline{x}_2$	
Transfer	$y_5 = 0\,1\,0\,1$	x_1	
Antivalenz	$y_6 = 0\,1\,1\,0$	$(x_1 \wedge \overline{x}_2) \vee (\overline{x}_1 \wedge x_2)$	Exclusiv–ODER
ODER–Verknüpfung	$y_7 = 0\,1\,1\,1$	$x_1 \vee x_2$	x_1 ODER x_2
NOR–Verknüpfung	$y_8 = 1\,0\,0\,0$	$\overline{x_1 \vee x_2}$	NICHT–ODER
Äquivalenz	$y_9 = 1\,0\,0\,1$	$(x_1 \wedge x_2) \vee (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2)$	
Komplement	$y_{10} = 1\,0\,1\,0$	$\overline{x}_1$	
Implikation	$y_{11} = 1\,0\,1\,1$	$\overline{x}_1 \vee x_2$	
Komplement	$y_{12} = 1\,1\,0\,0$	$\overline{x}_2$	
Implikation	$y_{13} = 1\,1\,0\,1$	$x_1 \vee \overline{x}_2$	
NAND–Verknüpfung	$y_{14} = 1\,1\,1\,0$	$\overline{x_1 \wedge x_2}$	NICHT–UND
Eins	$y_{15} = 1\,1\,1\,1$	1	Eins

Darstellung einiger zweistelliger Funktionen

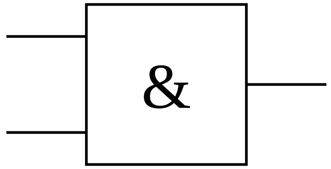
ODER

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



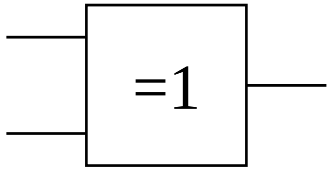
UND

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Exklusiv-Oder

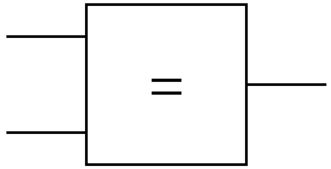
x_1	x_2	$x_1 \oplus x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



Darstellung einiger zweistelliger Funktionen

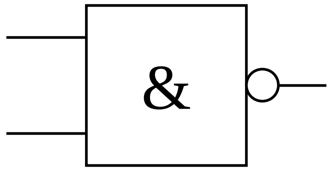
Äquivalenz

x_1	x_2	$x_1 \equiv x_2$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



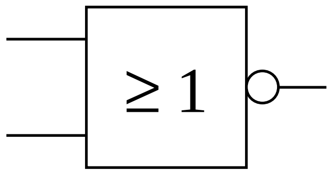
NAND

x_1	x_2	$x_1 \overline{\wedge} x_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



NOR

x_1	x_2	$x_1 \overline{\vee} x_2$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



Operatorensysteme

Def. 9.3: Ein vollständiges Operatorensystem erlaubt die Darstellung beliebiger Boolescher Funktionen mit einer beschränkten Anzahl von Operatoren

- **Beispiele für vollständige Operatorensysteme:**

Operatorensystem	Negation	Konjunktion	Disjunktion
$(\wedge,\vee,\bar{\ })$	$\overline{x_1}$	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$
$(\wedge,\bar{\ })$	$\overline{x_1}$	$x_1 \wedge x_2$	$\overline{\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}}$
$(\vee,\bar{\ })$	$\overline{x_1}$	$\overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2}}$	$x_1 \vee x_2$
$(\overline{\wedge})$	$x_1 \overline{\wedge} x_1$	$(x_1 \overline{\wedge} x_2) \overline{\wedge} (x_1 \overline{\wedge} x_2)$	$(x_1 \overline{\wedge} x_1) \overline{\wedge} (x_2 \overline{\wedge} x_2)$
$(\overline{\vee})$	$x_1 \overline{\vee} x_1$	$(x_1 \overline{\vee} x_1) \overline{\vee} (x_2 \overline{\vee} x_2)$	$(x_1 \overline{\vee} x_2) \overline{\vee} (x_1 \overline{\vee} x_2)$
$(\wedge,\oplus)$	$x_1 \oplus 1$	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \wedge x_2 \oplus x_1 \oplus x_2$
$(\vee,\equiv)$	$x_1 \equiv 0$	$(x_1 \vee x_2) \equiv x_1 \equiv x_2$	$x_1 \vee x_2$

Auswertung

- **Zum Wahrheitswert einer Aussage gelangt man durch rekursives Auswerten der Booleschen Funktionen in einem Ausdruck**
  - ⇨ **Negation vor Konjunktion**
  - ⇨ **Konjunktion vor Disjunktion**
  - ⇨ **Klammerung beachten**
- **Beispiel: Ist die folgende Funktion eine Tautologie?**

$$f(x_1, x_2) = (x_1 \wedge x_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2) \equiv (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2)$$

9.2 Normalformen

- **Eine Funktion kann durch verschiedene Boolesche Ausdrücke beschrieben werden**
  - ⇨ **Auch bei der Beschränkung auf ein vollständiges Operatorensystem ergeben sich noch mehrere Darstellungsmöglichkeiten**
- **Normalformen bilden eine Standarddarstellung in einem vollständigen Operatorensystem**
  - ⇨ **Disjunktive Normalform**
  - ⇨ **Konjunktive Normalform**
- **Es gibt weitere Normalformen, die in dieser Vorlesung nicht behandelt werden**
  - ⇨ **Reed-Muller-Form**
  - ⇨ **Äquivalenzpolynom**

Literal und Produktterm

Def. 9.4: Ein Literal L_i ist entweder eine Variable x_i oder ihre Negation $\overline{x}_i$. $L_i \in \{x_i, \overline{x}_i\}$

Def. 9.5: Ein Produktterm $K(x_1,\ldots,x_m)$ ist die Konjunktion von Literalen oder den Konstanten 0 oder 1:

$$\bigwedge_{i=1}^{m} L_i = L_1 \wedge \ldots \wedge L_m$$

- **Jeder Produktterm $K(x_1,\ldots,x_m)$ kann so dargestellt werden, dass eine Variable x in höchstens einem Literal vorkommt.**
  - **Falls $Lj=x$ und $L_k=x$ ist, gilt** $L_j \wedge L_k = x$
  - **Falls $Lj=\overline{x}$ und $L_k=\overline{x}$ ist, gilt** $L_j \wedge L_k = \overline{x}$
  - **Falls $Lj=x$ und $L_k=\overline{x}$ ist, gilt** $L_j \wedge L_k = 0$

Implikant und Minterm

Def. 9.6: Ein Produktterm $K(x_1,\ldots,x_m)$ heißt <u>Implikant</u> einer Booleschen Funktion $f(x_1,\ldots,x_n)$, wenn aus $K(x_1,\ldots,x_m)=1$ für eine Belegung $x_1,\ldots,x_m \in B^n$ folgt, dass $f(x_1,\ldots,x_n)=1$.

Def. 9.7: Ein Implikant $K(x_1,\ldots,x_n)$ heißt <u>Minterm</u> (m), wenn ein Literal jeder Variablen x_i der Funktion $f(x_1,\ldots,x_n)$ genau einmal in K vorkommt.

- **Implikanten haben ein oder mehrere 1-Stellen in der Funktion**
  - ⇨ **mehrere Implikanten können sich überdecken**
- **Ein Minterm ist genau bei einer Belegung der Variablen gleich 1**
  - ⇨ **Ein Minterm trägt zu genau einer 1-Stelle der Funktion bei**
  - ⇨ **Die Minterme einer Funktion können sich nicht überdecken**

Mintermtabelle

Satz 9.2: Zu einer Booleschen Funktion $f(x_1,\ldots,x_n)$ mit n Literalen gibt es maximal 2^n verschiedene Minterme m_i.

Bew: Durch Aufzählung aller Kombinationen und Induktion über n.

- **Man definiert eine Reihenfolge aller Minterme über den Index i**

i_{10}	i_2	**Minterm** m_i
0	000	$\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_0$
1	001	$\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_0$
2	010	$\bar{x}_2 \wedge x_1 \wedge \bar{x}_0$
3	011	$\bar{x}_2 \wedge x_1 \wedge x_0$
4	100	$x_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_0$
5	101	$x_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_0$
6	110	$x_2 \wedge x_1 \wedge \bar{x}_0$
7	111	$x_2 \wedge x_1 \wedge x_0$

Disjunktive Normalform

Def. 9.8: Es sei eine Boolesche Funktion $f(x_1,\ldots,x_n): B^n \rightarrow B$ **gegeben. Ein Boolescher Ausdruck heißt disjunktive Normalform (DNF) der Funktion** f**, wenn er aus einer disjunktiven Verknüpfung von Mintermen** K_i **besteht.**

$$f(x_1,\ldots,x_n) = K_0 \vee K_1 \vee \ldots \vee K_k \text{ mit } 0 \le k \le 2^n - 1$$

$$= \bigvee_{0}^{2^n-1} \alpha_i \wedge K_i \text{ mit } \alpha_i \in \{0,1\}$$

- α_i **heißt** **<u>Mintermkoeffizient</u>**
  - ⇨ $\alpha_i = 1$**, wenn der Minterm** m_i **zu** f **gehört,**
  - ⇨ $\alpha_i = 0$**, sonst**
- **Beispiele**

$$f(x_2,x_1,x_0) = x_2x_1x_0 \vee x_2\bar{x}_1x_0 \vee \bar{x}_2x_1\bar{x}_0 \vee \bar{x}_2\bar{x}_1\bar{x}_0 \quad \textbf{ist eine DNF}$$

$$f(x_2,x_1,x_0) = x_2x_1x_0 \vee x_2\bar{x}_1 \vee x_1(x_2x_0 \vee \bar{x}_2\bar{x}_0) \quad \textbf{ist keine DNF}$$

Disjunktion und Maxterm

Def. 9.9: Es sei $D(x_1,\ldots,x_m)$ **eine Disjunktion von Literalen, wobei die Konstanten** 0 **und** 1 **auftreten dürfen.** $D(x_1,\ldots,x_m)$ **heißt <u>Implikat</u> einer Booleschen Funktion** $f(x_1,\ldots,x_n)$**, wenn aus** $D(x_1,\ldots,x_m)=0$ **für eine Belegung** $x_1,\ldots,x_n \in B^n$ **folgt, dass** $f(x_1,\ldots,x_n)=0$.

Def. 9.10: Ein Implikat $D(x_1,\ldots,x_n)$ **heißt <u>Maxterm</u> (**M**), wenn ein Literal jeder Variablen** x_i **der Funktion** $f(x_1,\ldots,x_n)$ **genau einmal in** D **vorkommt.**

- **Implikate haben ein oder mehrere Nullstellen in der Funktion**
  - ⇨ **mehrere Implikaten können sich überdecken**
- **Ein Maxterm ist genau bei einer Belegung der Variablen gleich 0**
  - ⇨ **Ein Maxterm trägt zu genau einer Nullstelle der Funktion bei**
  - ⇨ **Die Maxterme einer Funktion können sich in den 1-Stellen überdecken**

Min- und Maxtermtabelle

Satz 9.3: Zu einer Booleschen Funktion $f(x_1,\dots,x_n)$ mit n Literalen gibt es maximal 2^n verschiedene Maxterme M_i.

Bew: Durch Aufzählung aller Kombinationen und Induktion über n

- **Man definiert eine Reihenfolge aller Maxterme über den Index i analog zu den Mintermen**

i_{10}	i_2	**Minterm** m_i	**Maxterm** M_i
0	000	$\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_0$	$x_2 \vee x_1 \vee x_0$
1	001	$\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_0$	$x_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0$
2	010	$\bar{x}_2 \wedge x_1 \wedge \bar{x}_0$	$x_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0$
3	011	$\bar{x}_2 \wedge x_1 \wedge x_0$	$x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0$
4	100	$x_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_0$	$\bar{x}_2 \vee x_1 \vee x_0$
5	101	$x_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_0$	$\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0$
6	110	$x_2 \wedge x_1 \wedge \bar{x}_0$	$\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0$
7	111	$x_2 \wedge x_1 \wedge x_0$	$\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0$

Konjunktive Normalform

Def. 9.11: Es sei eine Boolesche Funktion $f(x_1,\dots,x_n): B^n \rightarrow B$ **gegeben. Ein Boolescher Ausdruck heißt Konjunktive Normalform (KNF) der Funktion** f**, wenn er aus einer konjunktiven Verknüpfung von Maxtermen** D_i **besteht.**

$$f(x_1,\dots,x_n) = D_0 \wedge D_1 \wedge \dots \wedge D_k \text{ mit } 0 \le k \le 2^n - 1$$

$$= \bigwedge_{0}^{2^n-1} (\beta_i \vee D_i) \text{ mit } \beta_i \in \{0,1\}$$

- β_i **heißt <u>Maxtermkoeffizient</u>**
  - ⇨ $\beta_i = 0$**, wenn der Maxterm** m_i **zu** f **gehört,**
  - ⇨ $\beta_i = 1$**, sonst**
- **Beispiel**

$f(x_2, x_1, x_0) = (x_2 \vee x_1 \vee x_0) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0)$ **ist eine KNF**

KNF-DNF Umwandlung

Satz 9.4: Für jede Boolesche Funktion $f(x_1,\ldots,x_n)$ gilt $\alpha_i = \beta_i$.

Bew: (Skizze) 2 Fälle

- **Fall 1:** $\alpha_i=1$
  - $\Rightarrow$ m_i **gehört zur DNF der Funktion** f
  - $\Rightarrow$ M_i **gehört nicht zur KNF der Funktion** f
  - $\Rightarrow$ $\beta_i=1$
- **Fall 2:** $\alpha_i=0$
  - $\Rightarrow$ m_i **gehört nicht zur DNF der Funktion** f
  - $\Rightarrow$ M_i **gehört zur KNF der Funktion** f
  - $\Rightarrow$ $\beta_i=0$

Das allgemeine Identifikationsproblem

- **Identifikationsproblem:**
  - ⇨ **Erkennen der semantischen Gleichwertigkeit syntaktisch verschiedener Ausdrücke**

$$s \equiv t$$

- **Anwendungen beim Entwurf digitaler Systeme:**
  - ⇨ **Verifikation**
  - ⇨ **Simulation**
  - ⇨ **Technologieabbildung**
  - ⇨ **Optimierung**

Schreibweise

- **Menge aller Ausdrücke $\mathcal{E}$**
  - ⇨ **Beispiel: Menge aller booleschen Ausdrücke *f*, *g* über *n* Variablen**
- **Äquivalenzrelation $\equiv$**
  - ⇨ **Beispiel: Äquivalenz boolescher Funktionen**

$$f \equiv g \Leftrightarrow \forall (x_{n-1}, \cdots, x_0) \in B^n : f(x_{n-1}, \cdots, x_0) = g(x_{n-1}, \cdots, x_0)$$

- **Normalformoperator N**
  - ⇨ **Simplifikator**
  - ⇨ **Berechenbare Funktion**

$$N : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$$

  - ⇨ **Erfüllt die Normalformtheoreme**

Normalformtheoreme

- **Normalformtheoreme:**
  - **Idempotenz**
  - **Äquivalenz**
  - **Normalformeigenschaft**

$$\forall t \in \mathcal{E}$$

$$N(N(t)) = N(t)$$

$$N(t) \equiv t$$

$$t \equiv 0 \Leftrightarrow N(t) = 0$$

- **Satz 9.5:** $\forall s,t \in \mathcal{E} : s \equiv t \Rightarrow N(s) \equiv N(t)$

  Bew:

$$s \equiv N(s), t \equiv N(t), s \equiv t$$

$$\Rightarrow N(s) \equiv s \equiv t \equiv N(t)$$

$$\Rightarrow s \equiv t \equiv N(s) \equiv N(t)$$

●

Kanonische Normalform

- Eine Normalform N(t) eines Ausdrucks t wird durch die Anwendung eines Normalformoperators N auf t erzeugt
- Normalformoperatoren werden häufig durch ein endliches Regelsystem beschrieben
  - ⇨ Ersetzungsregeln
  - ⇨ Termersetzungssysteme
- Kanonizität
  - ⇨ Ein kanonischer Normalformoperator erfüllt zusätzlich die folgende Bedingung

$$\forall s,t \in \mathcal{E} : s \equiv t \Leftrightarrow N(s) = N(t)$$

- Er erlaubt, semantisch äquivalente Ausdrücke an Hand der syntaktischen Übereinstimmung der entsprechenden Normalform eindeutig zu identifizieren

Nicht kanonische Normalformen

- **Kanonische Normalformen sind in vielen Anwendungen nicht zu erreichen**
  - ⇨ **Schwächere Form der Normalformdefinition über das Nullelement**
  - ⇨ **Differenz zweier Ausdrücke**

$$s \equiv t \Leftrightarrow M(s,t) \equiv 0$$

- **Das Identifikationsproblem kann mit Hilfe des Minusoperators auch so gelöst werden**
  - ⇨ **es gilt aufgrund der Normalformeigenschaft:**

$$s \equiv t \Leftrightarrow N(M(s,t)) = 0$$

Beispiele: Boolesche Normalformen

- **Beispiele für drei Variablen (n=3):**
  - **Disjunktive Normalform**

$$f(x_1,x_2,x_3)=(\alpha_0 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_0)\vee(\alpha_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_0)\vee\ldots\vee(\alpha_7 \wedge x_2 \wedge x_1 \wedge x_0)$$

  - **Konjunktive Normalform**

$$f(x_1,x_2,x_3)=(\beta_0 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0)\wedge(\beta_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0)\wedge\ldots\wedge(\beta_7 \vee x_2 \vee x_1 \vee x_0)$$

  - **Reed-Muller Normalform**

$$f(x_1,x_2,x_3)=(\gamma_0 \wedge 1)\oplus(\gamma_1 \wedge x_0)\oplus\ldots\oplus(\gamma_7 \wedge x_2 \wedge x_1 \wedge x_0)$$

  - **Äquivalenzpolynom**

$$f(x_1,x_2,x_3)=(\delta_0 \vee 0)\equiv(\delta_1 \vee x_0)\equiv\ldots\equiv(\delta_7 \vee x_2 \vee x_1 \vee x_0)$$

Regelsystem für die Reed-Muller Normalform

- **Ersetzungsregeln**

$$s \wedge t \rightarrow s \wedge t$$

$$\bar{t} \rightarrow t \oplus 1$$

$$s \vee t \rightarrow s \wedge t \oplus s \oplus t$$

$$t \oplus t \rightarrow 0$$

$$t \oplus 0 \rightarrow t$$

- **Sowie die üblichen Rechenregeln**
  - ⇨ **Kommutativität**
  - ⇨ **Assoziativität**
  - ⇨ **Distribution**

Zusammenfassung der wichtigsten Begriffe

- **Literal:** **Boolesche Variable**
- **Produktterm:** **UND-Verknüpfung von Literalen**
- **Implikant:** **Produktterm, der eine oder mehrere „1“-Stellen einer booleschen Funktion beschreibt (impliziert)**
- **Implikat:** **Disjunktion (ODER-Verknüpfung) von Literalen**
- **Minterm:** **Implikant, der genau eine „1“-Stelle einer booleschen Funktion beschreibt**
- **Maxterm:** **Implikat, der genau eine „0“-Stelle einer booleschen Funktion beschreibt**
- **Normalform:** **Darstellung einer Booleschen Funktion durch Minterme (DNF) oder Maxterme (KNF)**

9.3 Der Shannonsche Entwicklungssatz

- **DNF und KNF können durch einfache logische Umformungen in gewöhnliche disjunktive und konjunktive Formen gebracht werden**
  - ⇨ **DF und KF**
- **Zur Berechnung der Normalformen ist der shannonsche Entwicklungssatz hilfreich**

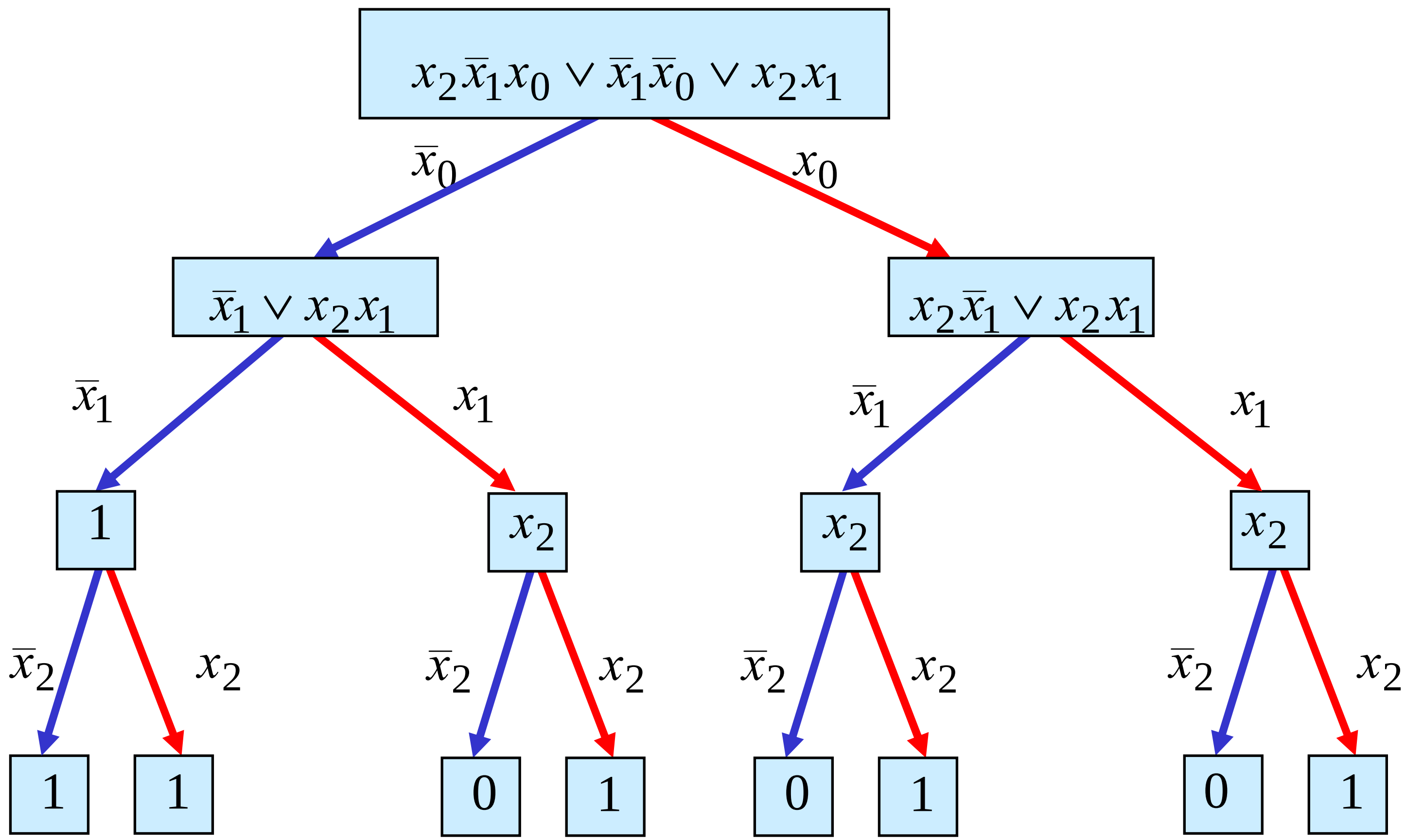
Satz 9.5: Für jede Boolesche Funktion $f(x_1,\ldots,x_n)$ **gilt**

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \left(x_i \wedge f(x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_n)\right) \vee \left(\bar{x}_i \wedge f(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n)\right)$$

- **Beispiel:**

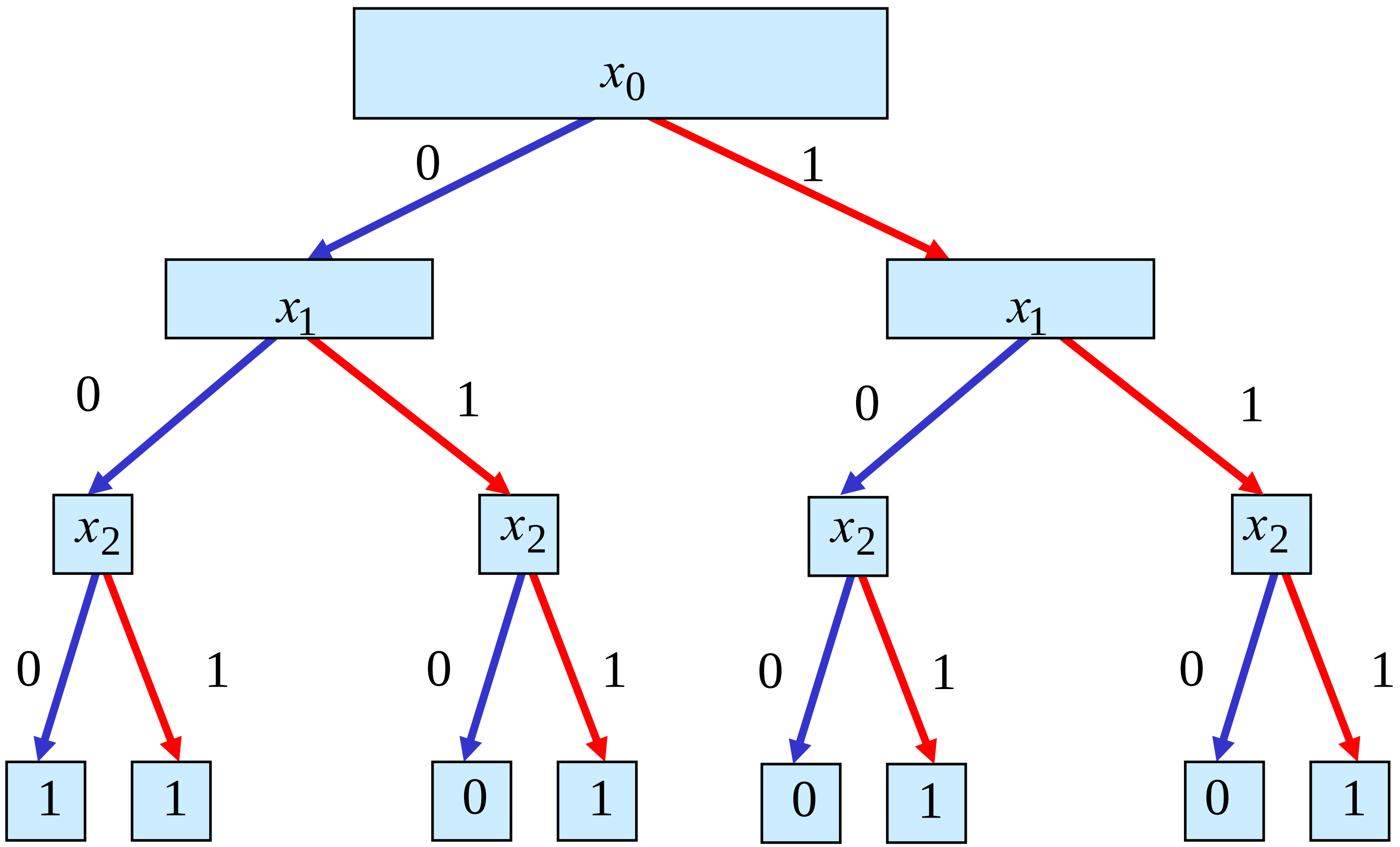
$$\begin{aligned}
f(x_2,x_1,x_0) &= x_2\bar{x}_1x_0 \vee \bar{x}_1\bar{x}_0 \vee x_2x_1 \\
&= x_0(x_2\bar{x}_1 \vee x_2x_1) \vee \bar{x}_0(\bar{x}_1 \vee x_2x_1) \\
&= x_2\bar{x}_1x_0 \vee x_2x_1x_0 \vee \bar{x}_1\bar{x}_0 \vee x_2x_1\bar{x}_0 \\
&= x_2(\bar{x}_1x_0 \vee x_1x_0 \vee \bar{x}_1\bar{x}_0 \vee x_1\bar{x}_0) \vee \bar{x}_2(\bar{x}_1\bar{x}_0) \\
&= x_2x_1x_0 \vee x_2\bar{x}_1x_0 \vee x_2x_1\bar{x}_0 \vee x_2\bar{x}_1\bar{x}_0 \vee \bar{x}_2\bar{x}_1\bar{x}_0
\end{aligned}$$

Baumdarstellung



Binary Decision Diagram (BDD)

- **Andere Interpretation der Shannon-Entwicklung**

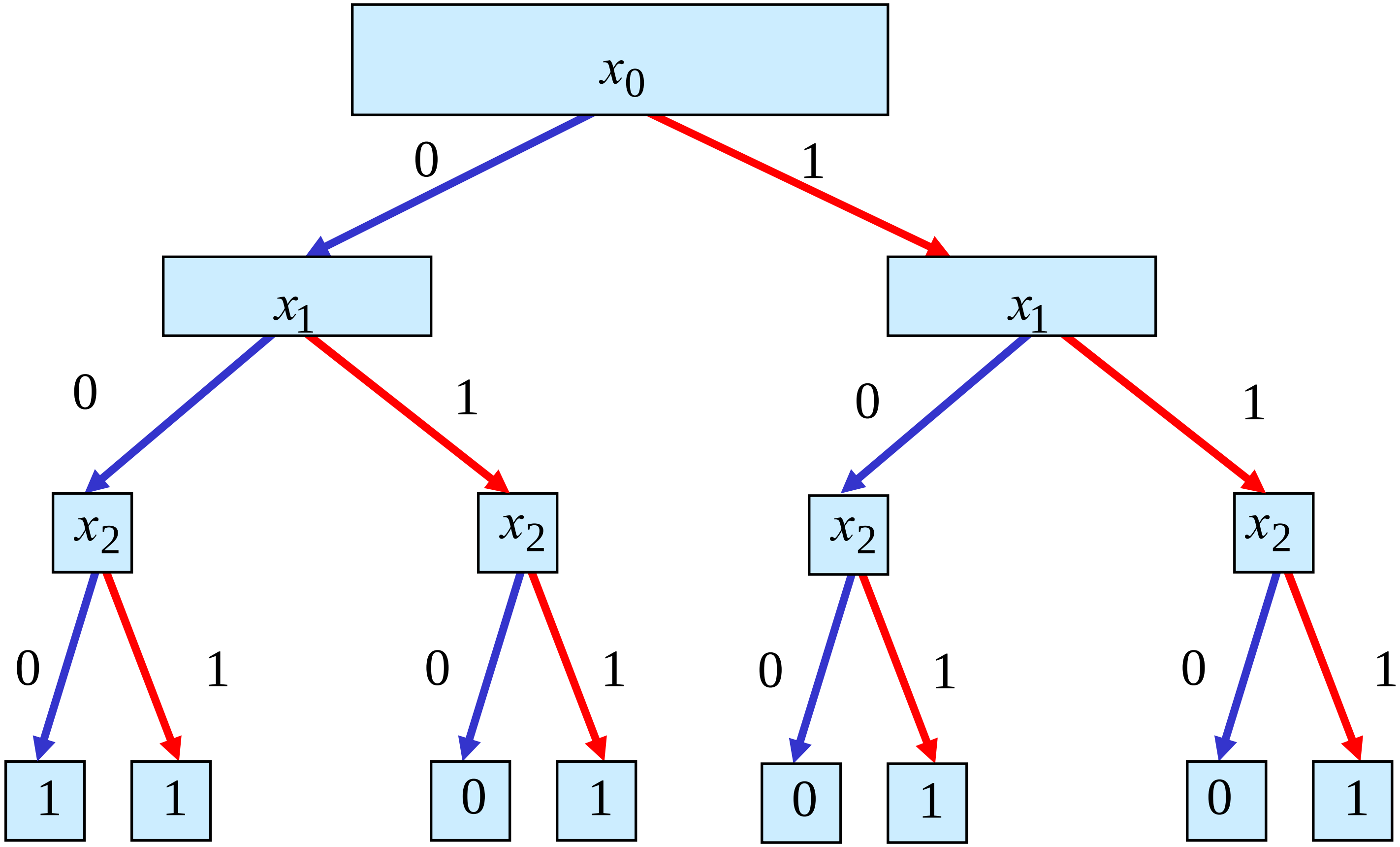


Reduzierte Baumdarstellungen

- **Da die Variablen in allen Pfaden in der gleichen Reihenfolge auftauchen, spricht man auch von einem <u>ordered BDD</u> (OBDD)**
- **Ein BDD benötigt** 2^n **Knoten bei** n **Variablen**
  - ⇨ **Für viele Anwendung ist die Speicherung aller Knoten nicht notwendig**
  - ⇨ **Knoten, deren Nachfolger gleich sind, können eliminiert werden (Regel 1)**
  - ⇨ **Teile des Baumes, die genau so noch einmal vorkommen, können gemeinsam genutzt werden (Regel 2)**
- **Es entsteht ein bezüglich einer Ordnung der Variablen eindeutiger reduzierter Baum**

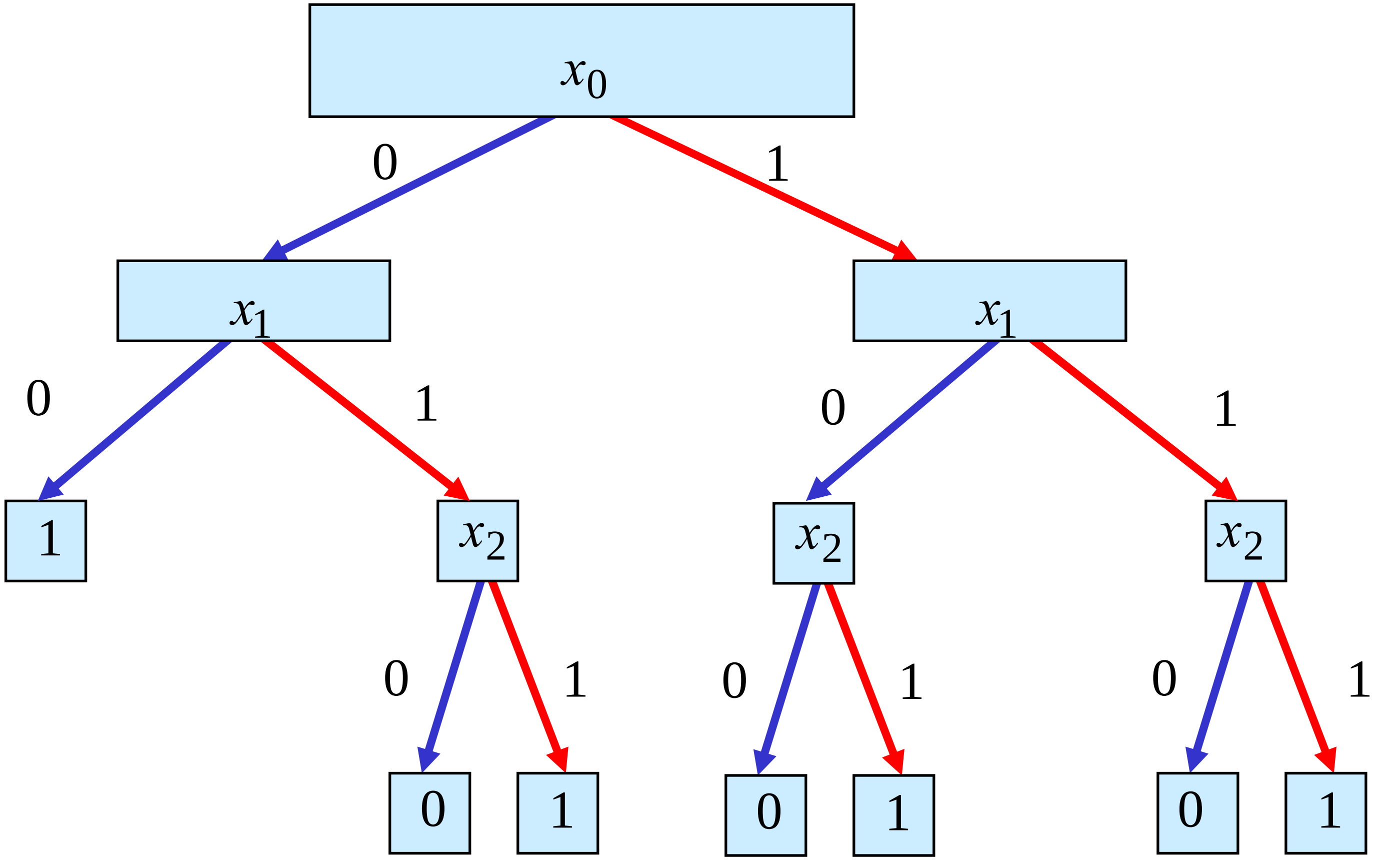
Reduced Ordered BDD (ROBDD)

Ausgangsgraph



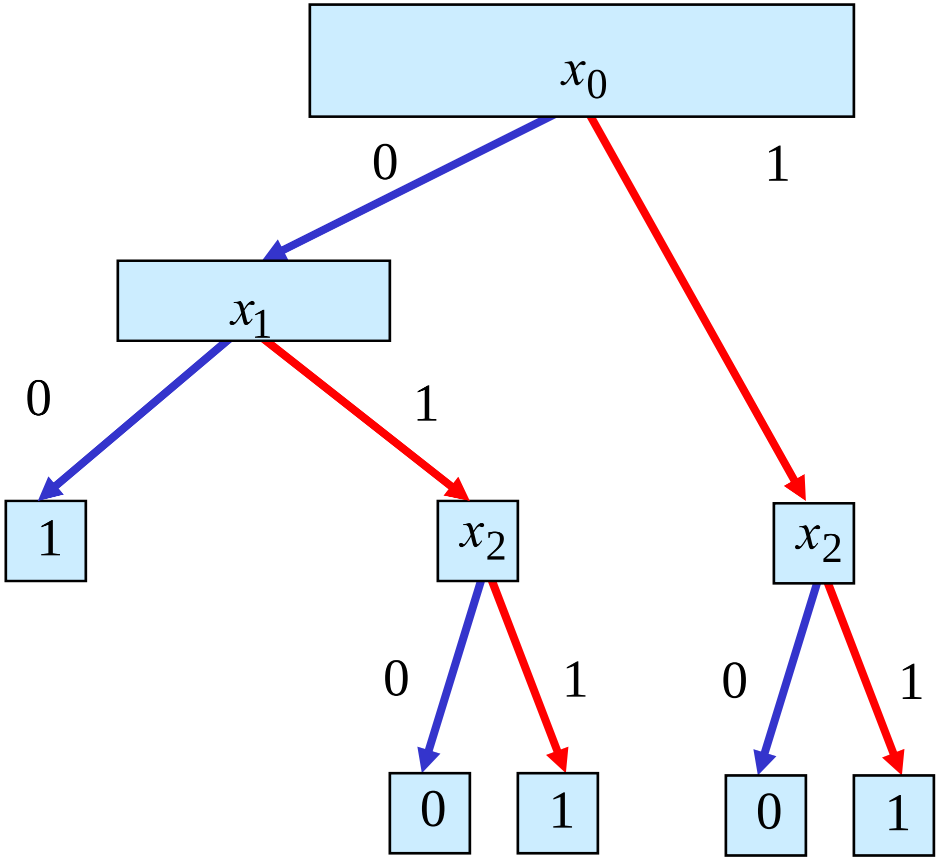
Reduced Ordered BDD (ROBDD)

Regel 1



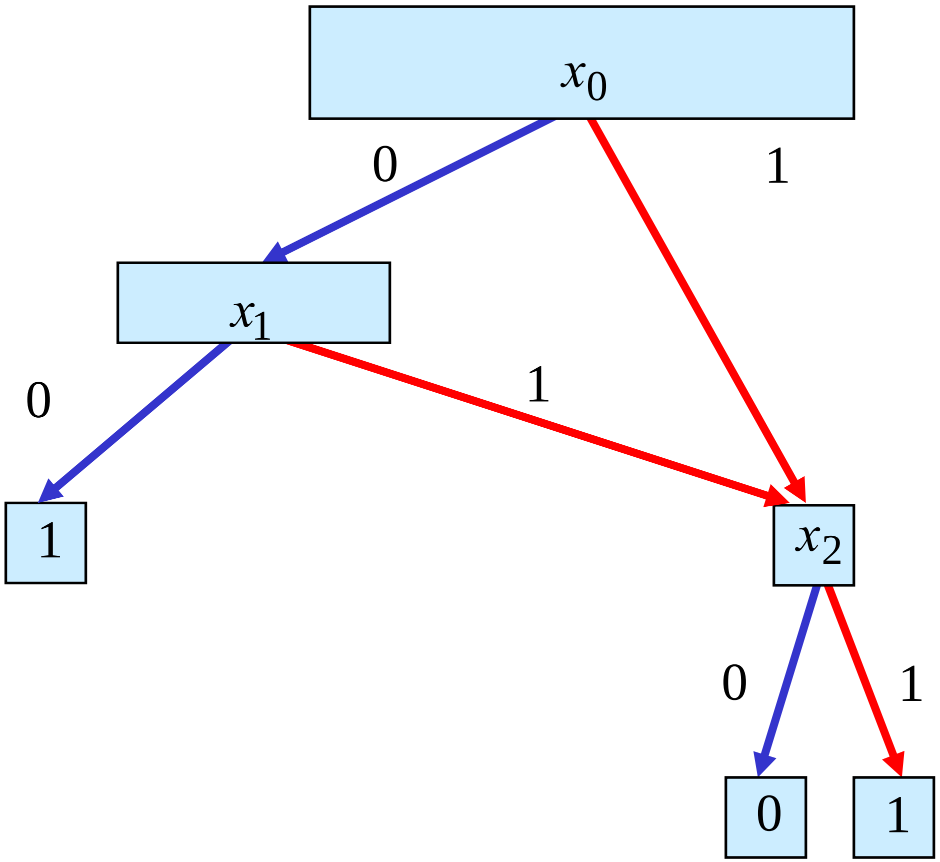
Reduced Ordered BDD (ROBDD)

Regel 1



Reduced Ordered BDD (ROBDD)

Regel 2

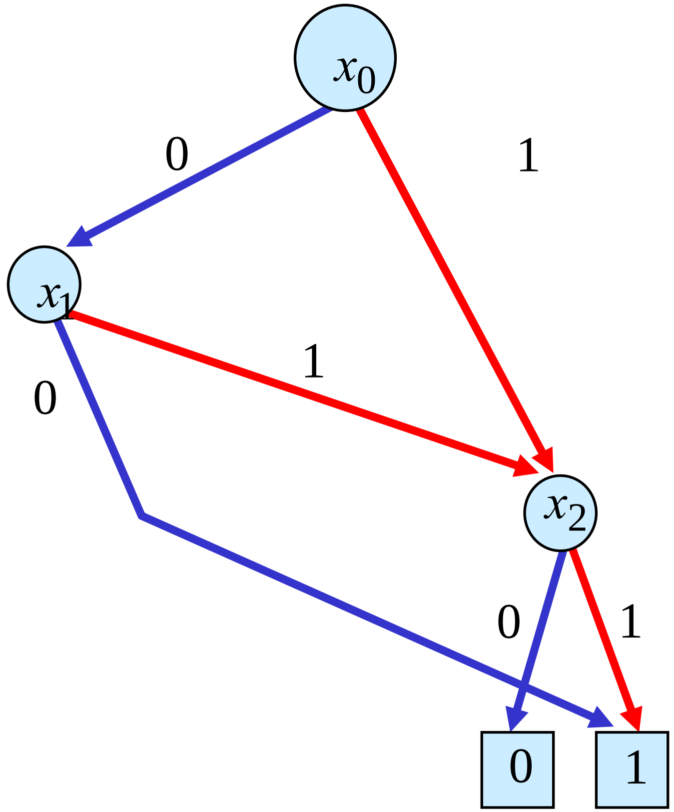


Anwendung 1: Simulation

- **Der Funktionswert wird ausgehend von der Wurzel ermittelt**

  ⇨

$$f(x_2, x_1, x_0) = 0 \quad \text{für } x_2 = 0, x_1 = 1, x_0 = 0$$



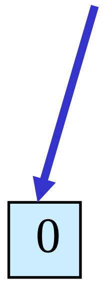
Anwendung 2: Verifikation

- **Die Gleichung**

$$s \equiv t \Leftrightarrow N(M(s,t)) = 0$$

kann umgeschrieben werden zu

$$s \equiv t \Leftrightarrow BDD(s \oplus t) = 0$$



DNF/KNF-Konversion

- **Statt der Min- und Maxterme kann man auch deren Indizes angeben**
  - f=MINt(0,3,4,7)
  - f=MAXt(1,2,5,6)
- **Für die Umwandlung der DNF einer Funktion f in die entsprechende KNF folgt direkt aus Satz 9.4:**
  - **Die Indizes der Minterme, die nicht in der Funktionsdarstellung der DNF der Funktion verwendet werden, sind Indizes der Maxterme der KNF der Funktion**

DNF/KNF-Konversion

i_{10}	$x_2 x_1 x_0$	**Minterme**	**Maxterme**
0	000	$\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_0$	
1	001		$x_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0$
2	010		$x_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0$
3	011	$\bar{x}_2 \wedge x_1 \wedge x_0$	
4	100	$x_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_0$	
5	101		$\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0$
6	110		$\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0$
7	111	$x_2 \wedge x_1 \wedge x_0$	

DNF : $f(x_2, x_1, x_0) = \bar{x}_2\bar{x}_1\bar{x}_0 \vee \bar{x}_2 x_1 x_0 \vee x_2\bar{x}_1\bar{x}_0 \vee x_2 x_1 x_0$

KNF : $f(x_2, x_1, x_0) = (x_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0)$

NAND-NOR-Konversion

- **Sowohl NAND- als auch NOR-System sind vollständige Operatorensysteme**
  - ⇨ **alle Booleschen Funktionen lassen sich mit mit diesen Operatoren darstellen**
  - ⇨ **da sowohl NAND- als auch NOR-Gatter besonders einfach realisiert werden, haben diese Darstellungen eine besondere Bedeutung im Schaltkreisentwurf**
- **NAND-Konversion aus der DNF:**

$$
\begin{aligned}
f(x_2, x_1, x_0) &= x_2 x_1 \bar{x}_0 \vee x_2 \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_2 x_1 x_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \\
&= \overline{\overline{x_2 x_1 \bar{x}_0 \vee x_2 \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_2 x_1 x_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0}} \\
&= \overline{\overline{x_2 x_1 \bar{x}_0} \wedge \overline{x_2 \bar{x}_1 x_0} \wedge \overline{\bar{x}_2 x_1 x_0} \wedge \overline{\bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0}} \\
&= \mathbf{NAND_4}(\mathbf{NAND_3}(x_2 x_1 \bar{x}_0), \mathbf{NAND_3}(x_2 \bar{x}_1 x_0), \\
&\quad \mathbf{NAND_3}(\bar{x}_2 x_1 x_0), \mathbf{NAND_3}(\bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0))
\end{aligned}
$$

NAND-NOR-Konversion

- **NOR-Konversion aus der KNF:**

$$f(x_2,x_1,x_0) = x_2x_1\bar{x}_0 \vee x_2\bar{x}_1x_0 \vee \bar{x}_2x_1x_0 \vee \bar{x}_2\bar{x}_1\bar{x}_0 \qquad \textbf{(DNF)}$$

$$= (x_2 \vee x_1 \vee x_0)(x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0)(\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0) \qquad \textbf{(KNF)}$$

$$= \overline{\overline{(x_2 \vee x_1 \vee x_0)(x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0)(\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0)}}$$

$$= \overline{\overline{(x_2 \vee x_1 \vee x_0)} \vee \overline{(x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0)} \vee \overline{(\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0)} \vee \overline{(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0)}}$$

$$= \mathbf{NOR_4}(\mathbf{NOR_3}(x_2,x_1,x_0), \mathbf{NOR_3}(x_2,\bar{x}_1,\bar{x}_0),$$

$$\mathbf{NOR_3}(\bar{x}_2,x_1,\bar{x}_0), \mathbf{NOR_3}(\bar{x}_2,\bar{x}_1,\bar{x}_0))$$

9.4 Minimalformen

- **Boolesche Ausdrücke für eine Boolesche Funktion *f* in einer kürzestmöglichen Darstellung**
  - ⇨ **technische Realisierung mit möglichst geringen Kosten**
- **Disjunktive und konjunktive Minimalformen**
  - ⇨ **Disjunktion von Implikanten (DMF)**
  - ⇨ **Konjunktion von Implikaten (KMF)**
- **Die DMF und KMF sind nicht eindeutig**

$f(x_1, x_0) = \bar{x}_1 x_0 \vee x_1 \bar{x}_0$	**DMF**
$g(x_1, x_0) = \bar{x}_1 x_0 \vee x_1 x_0$	**keine DMF**
$= x_0$	**DMF**
$h(x_2, x_1, x_0) = (x_1 \vee \bar{x}_0) \wedge (x_2 \vee x_0)$	**KMF**
$k(x_2, x_1, x_0) = \bar{x}_0 \wedge (x_2 \vee \bar{x}_0) \wedge (x_2 \vee x_1)$	**keine KMF**
$= \bar{x}_0 \wedge (x_2 \vee x_1)$	**KMF**

Minimalformen

- Das Finden einer Minimalform ist nicht trivial
  - ⇨ besonders bei Funktionen mit vielen Variablen
  - ⇨ oft nur suboptimale Lösungen
  - ⇨ Einsatz von Heuristiken
- Allgemeines zweischrittiges Vorgehen:
  - ⇨ Finden einer Menge von Implikanten bzw. Implikate mit einer möglichst geringen Anzahl von Literalen
  - ⇨ Auswahl aus dieser Menge, so dass deren Disjunktion bzw. Konjunktion die gesuchte Funktion erhält

Ökonomische Kriterien für den Entwurf von Schaltnetzen

- **Geringe Kosten für den Entwurf (Entwurfsaufwand)**
  - ⇨ **Lohnkosten**
  - ⇨ **Rechnerbenutzung, Softwarelizenzen**
- **Geringe Kosten für die Realisierung (Realisierungsaufwand)**
  - ⇨ **Bauelemente, Gehäuseformen**
  - ⇨ **Kühlung**
- **Geringe Kosten für die Inbetriebnahme**
  - ⇨ **Kosten für den Test**
  - ⇨ **Fertigstellung programmierbarer Bauelemente**
- **Geringe Kosten für den Betrieb**
  - ⇨ **Wartung**
  - ⇨ **Energie**

Entwurfsziele

- **Manche Kriterien stehen im Widerspruch**
  - ⇨ **zuverlässigere Schaltungen erfordern einen höheren Realisierungsaufwand**
  - ⇨ **Verringerung des Realisierungsaufwand erfordert eine Erhöhung der Entwurfskosten**
- **Ziel des Entwurfs ist das Finden des günstigsten Kompromisses**
  - ⇨ **Korrektheit der Realisierung**
  - ⇨ **Einhaltung der technologischen Grenzen**
  - ⇨ **ökonomische Kriterien**

☞ **Wir betrachten in dieser Vorlesung nur die Minimierung des Realisierungsaufwands**

10 Minimierungsverfahren

- **Finden von Minimalformen Boolescher Funktionen**
  - ⇨ **ohne Betrachtung der Zieltechnologie**
  - ⇨ **mit Betrachtung der Zieltechnologie**
- **Drei Minimierungsansätze**
  - ⇨ **algebraische Verfahren**
  - ⇨ **graphische Verfahren**
  - ⇨ **tabellarische Verfahren**
- **Man unterscheidet**
  - ⇨ **exakte Minimierungsverfahren (z.B. Quine McCluskey), deren Ergebnis das absolute Minimum einer Schaltungsdarstellung ist**
  - ⇨ **heuristische Minimierungsverfahren auf der Basis von iterativen Minimierungsschritten**

Darstellung Boolescher Funktionen durch Funktionstabellen

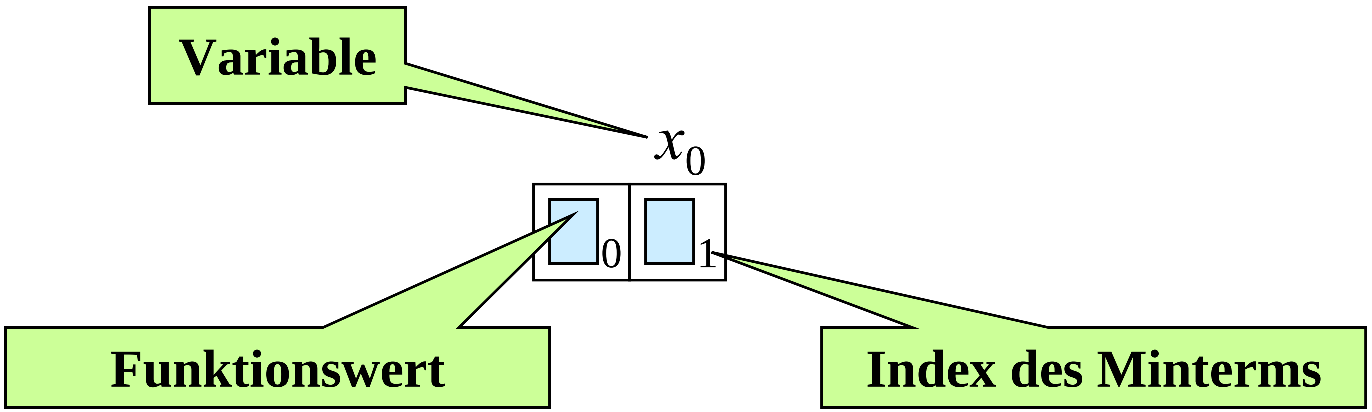
- **Darstellung des Verhaltens einer Booleschen Funktion mit Hilfe einer vollständigen Funktionstabelle**
  - ⇨ **Jeder Belegung der Booleschen Variablen wird ein Funktionswert zugeordnet**
  - ⇨ $f(x_2, x_1, x_0) \rightarrow y$, *mit* $x_i, y \in \{0,1\}$

Index	x_2	x_1	x_0	y
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

$$f(x_2, x_1, x_0) = x_1\bar{x}_0 \vee x_2 x_1 \vee x_2\bar{x}_1\bar{x}_0$$

10.1 KV-Diagramme

- Nach Karnaugh und Veitch
- Möglichkeit, Boolesche Funktionen übersichtlich darzustellen
  - ⇨ bis 6 Variablen praktisch einsetzbar
- Ausgangspunkt ist ein Rechteck mit 2 Feldern



KV-Diagramme

- **Beispiele**

	x_0
0_0	1_1

$$f(x_0) = x_0$$

	x_0
1_0	0_1

$$f(x_0) = \bar{x}_0$$

- **Erweiterung durch Spiegelung**
  - ⇨ **für jede zusätzliche Variable verdoppelt sich die Zahl der Felder**

	x_0	
0	1	
2	3	x_1

	x_0	x_0		
0	1	5	4	
2	3	7	6	x_1
		x_2	x_2	

		x_0	x_0		
	0	1	5	4	
	2	3	7	6	x_1
x_3	10	11	15	14	x_1
x_3	8	9	13	12	
			x_2	x_2	

Eigenschaften von KV-Diagrammen

- Jedes Feld ist ein Funktionswert
  - ⇨ Ein Minterm der Funktion
  - ⇨ Eindeutige Variablenzuordnung
- Oft werden x_1 und x_2 vertauscht
  - ⇨ Lediglich eine andere Numerierung der Felder
  - ⇨ Kein Einfluss auf das Minimierungsverfahren
- Aufstellen der KV-Diagramme über die Funktionstabelle:

Index	x_2	x_1	x_0	y
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

$$f(x_2, x_1, x_0) = x_1\bar{x}_0 \vee x_2 x_1 \vee x_2\bar{x}_1\bar{x}_0$$

	x_0	x_0		
0_0	0_1	0_5	1_4	
1_2	0_3	1_7	1_6	x_1
		x_2	x_2	

U. Kebschull

KV-Diagramme über die KNF

- **Argumentation über die Nullstellen der Funktion**
  - ⇨ **Jede Nullstelle entspricht einem Maxterm**
- **Beispiel**

$$f(x_2, x_1, x_0) = x_1\bar{x}_0 \vee x_2 x_1 \vee x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0$$

x_0

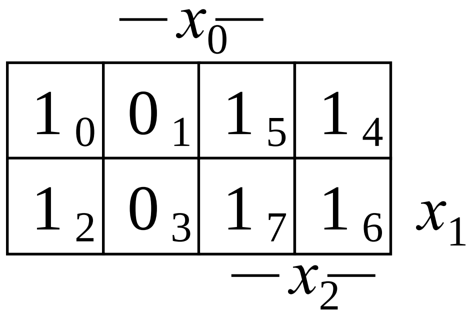
0_0	0_1	0_5	1_4	
1_2	0_3	1_7	1_6	x_1

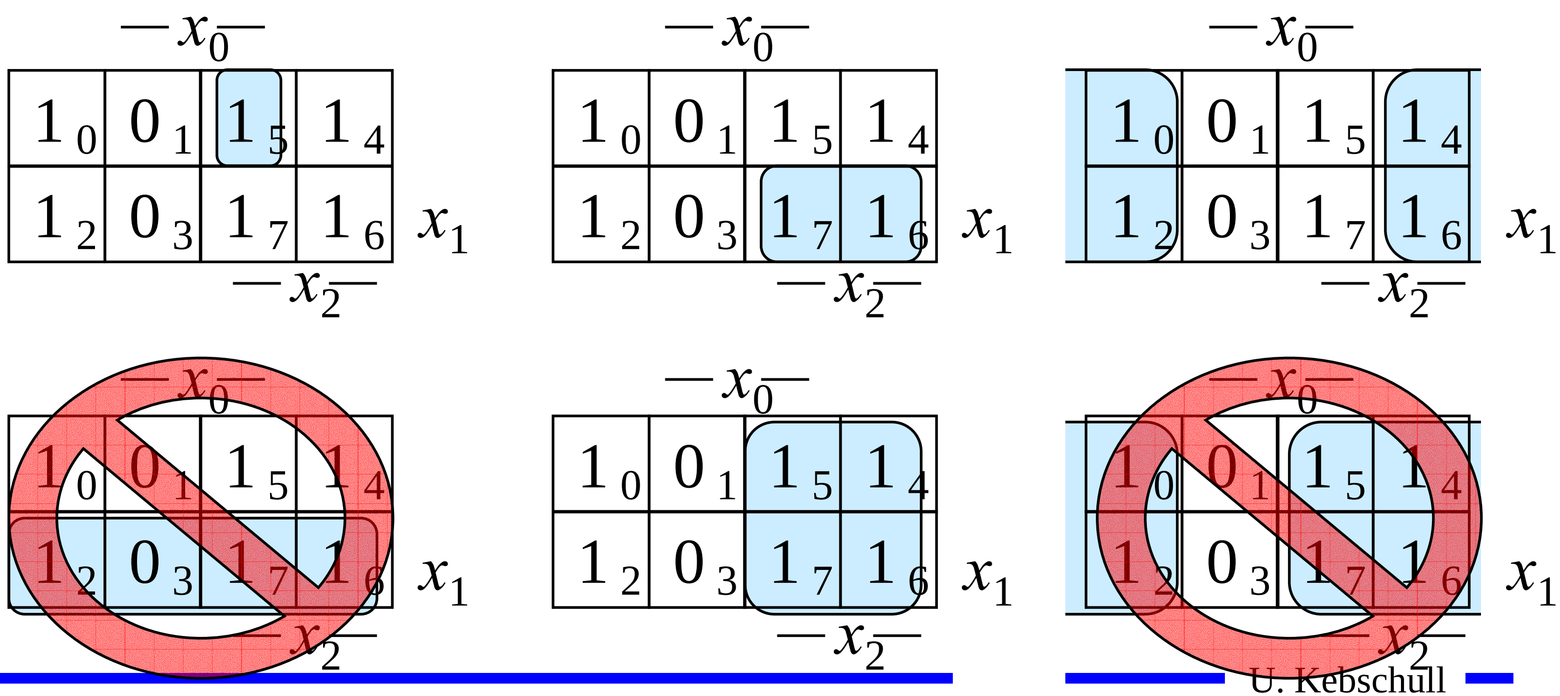
x_2

$$f(x_2, x_1, x_0) = (x_2 \vee x_1 \vee x_0) \wedge (x_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0)$$

Minimalformen aus KV-Diagrammen

- **Zusammenfassen von Mintermen zu Implikanten**
- **Beispiel:**





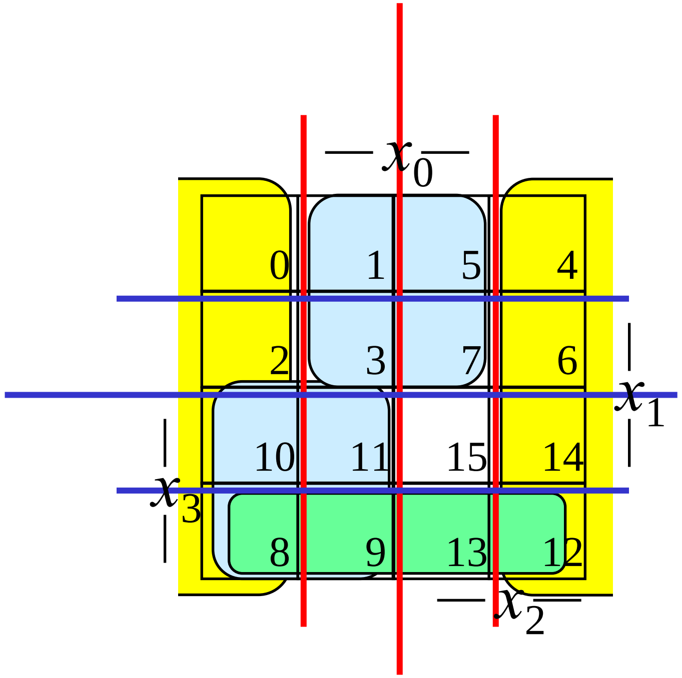
Implikant k-ter Ordnung

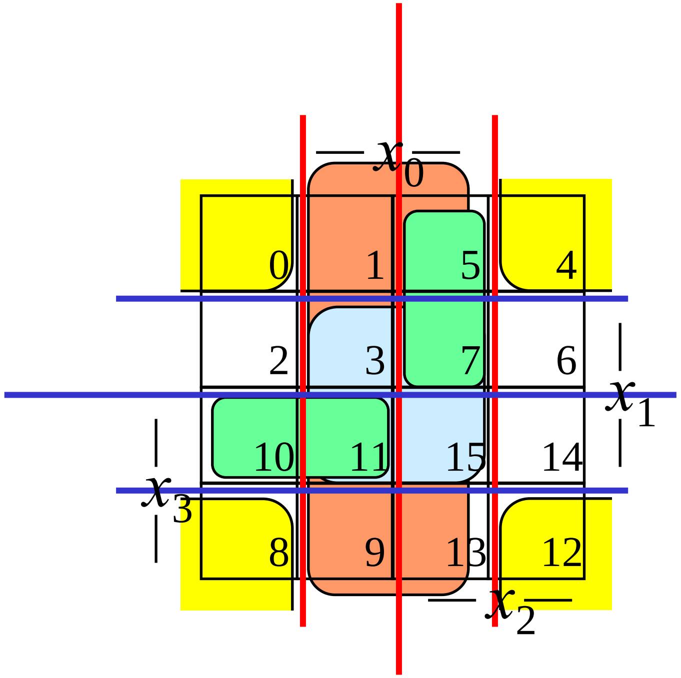
Def. 10.1: Es sei eine Boolesche Funktion $f(x_0,\ldots,x_{n-1}):B^n \rightarrow B$ **gegeben. Ein <u>Implikant k-ter Ordnung</u> umfaßt** 2^k **Felder eines KV-Diagramms.**

- **Man erhält**
  - ⇨ **Implikanten 0-ter Ordnung** — **Minterme**
  - ⇨ **Implikanten 1-ter Ordnung** — **Zusammenfassung zweier Minterme**
  - ⇨ **Implikanten 2-ter Ordnung** — **Zusammenfassung zweier Implikanten 1-ter Ordnung**
  - ⇨ **usw.**

Finden möglicher Zusammenfassungen

- **Finden von 1-Blöcken, die symmetrisch zu denjenigen Achsen, an denen eine Variable von 0 auf 1 wechselt**
- **Jede Funktion läßt sich als disjunktive Verknüpfung solcher Implikanten darstellen**
- **Beispiele**



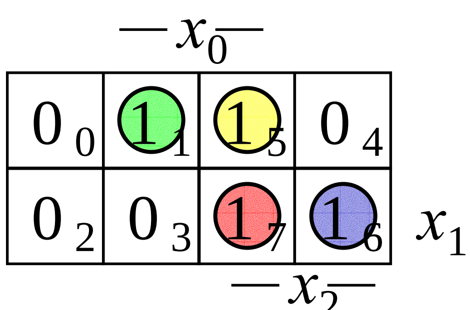


Primimplikant

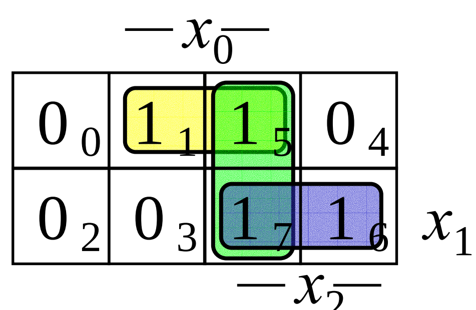
Def. 10.2: Es sei eine Boolesche Funktion $f(x_0,\ldots,x_{n-1}):B^n \rightarrow B$ **gegeben. Ein Implikant** p **heißt <u>Primimplikant</u>, wenn es keinen Implikanten** q **gibt, der** p **impliziert.**

- **Ein Primimplikant** p **ist von größtmöglicher Ordnung**
  - ⇨ **Primimplikanten sind einfach aus einem KV-Diagramm herauszulesen**
  - ⇨ **man sucht die größtmöglichen Implikanten**

$$f(x_2, x_1, x_0) = x_2 x_1 \bar{x}_0 \vee x_2 x_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 x_0$$



Minterme



Primimplikanten

Überdeckung

Satz 10.1: Zu jeder Booleschen Funktion f gibt es eine minimale Überdeckung aus Primimplikanten

Bew. (Skizze):

Angenommen wir haben eine minimale Überdeckung der Funktion, die einen Implikanten k besitzt, der kein Primimplikant ist.

$\Rightarrow$ **Dieser Implikant k kann durch einen Primimplikant p ersetzt werden, der k enthält**

$\Rightarrow$ **Das Ergebnis ist eine Überdeckung der Funktion f aus Primimplikanten mit der gleichen Anzahl von Termen**

$\Rightarrow$ **Die Überdeckung ist minimal**

- **Einschränkung des Suchraums**
  - ⇨ **man braucht nur die Primimplikanten für die Minimierung betrachten**

Kernprimimplikant

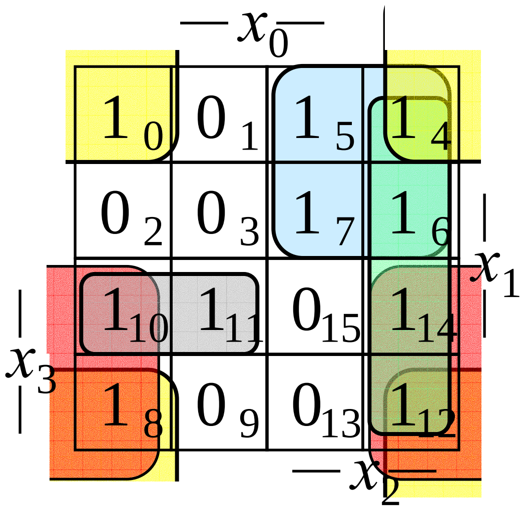
Def. 10.3: Es sei eine Boolesche Funktion $f(x_0,\dots,x_{n-1}) : B^n \rightarrow B$ gegeben. Ein Implikant p heißt <u>Kernprimimplikant</u>, wenn er einen Minterm überdeckt, der von keinem anderen Primimplikant überdeckt wird.

- **Man nennt solche Primimplikanten auch <u>essentielle</u> Primimplikanten**
  - ⇨ **Ein Kernprimimplikant muss auf jeden Fall in der disjunktiven Minimalform vorkommen**
- **Ziel der Minimierung:**
  - ⇨ **Überdecken der Funktion durch Kernprimimplikanten und möglichst wenigen zusätzlichen Primimplikanten**
- **Zwei Schritte**
  1. **Finde alle Primimplikanten**
  2. **Suche eine Überdeckung der Funktion mit möglichst wenigen Primimplikanten**

Beispiel

$$f(x_3,x_2,x_1,x_0) = \bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1\bar{x}_0 \lor \bar{x}_3x_2\bar{x}_1\bar{x}_0 \lor \bar{x}_3x_2\bar{x}_1x_0 \lor$$
$$\bar{x}_3x_2x_1\bar{x}_0 \lor \bar{x}_3x_2x_1x_0 \lor x_3\bar{x}_2\bar{x}_1\bar{x}_0 \lor$$
$$x_3\bar{x}_2x_1\bar{x}_0 \lor x_3\bar{x}_2x_1x_0 \lor x_3x_2\bar{x}_1\bar{x}_0 \lor x_3x_2x_1\bar{x}_0$$
$$= MINt(0,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11,\ 12,\ 14)$$

DNF

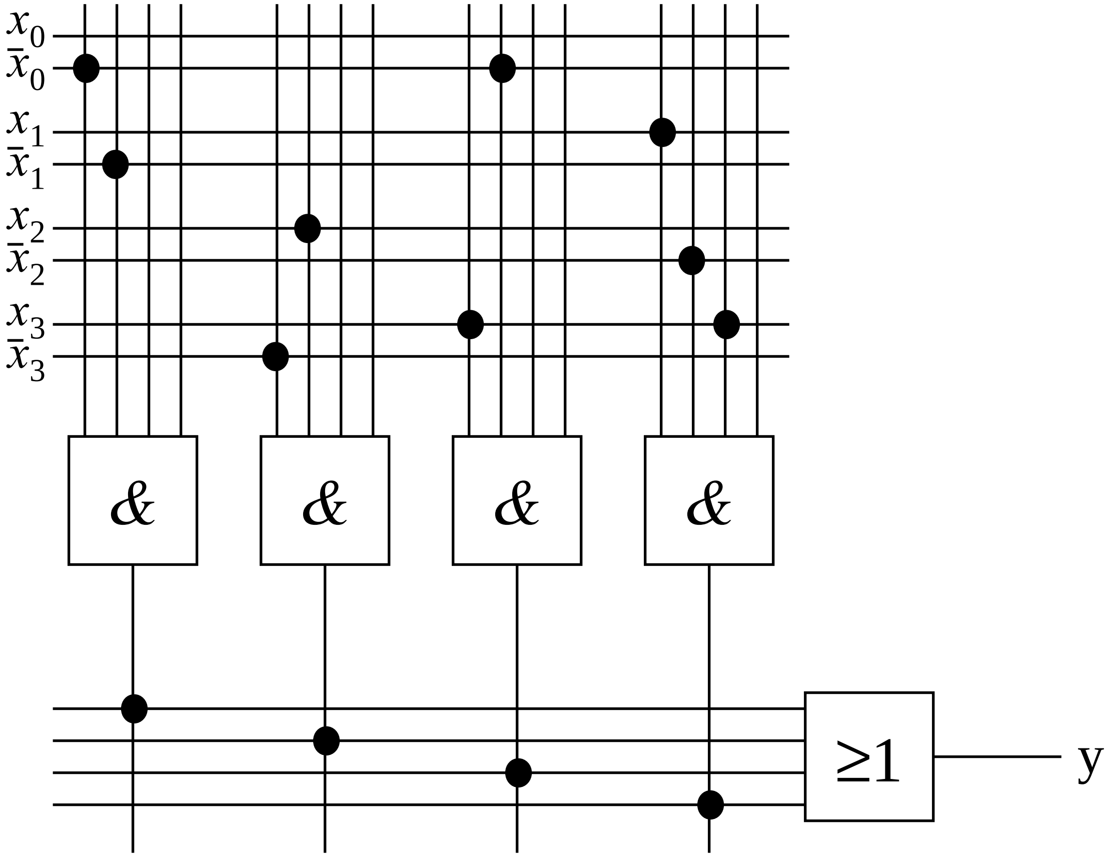


e	$\bar{x}_1\bar{x}_0$	(0,4,8,12)
e	$\bar{x}_3x_2$	(4,5,6,7)
	$x_2\bar{x}_0$	(4,6,12,14)
	$x_3\bar{x}_0$	(8,10,12,14)
e	$x_3\bar{x}_2x_1$	(10,11)

$$f(x_3,x_2,x_1,x_0) = \bar{x}_1\bar{x}_0 \lor \bar{x}_3x_2 \lor x_3\bar{x}_0 \lor x_3\bar{x}_2x_1$$
$$= \bar{x}_1\bar{x}_0 \lor \bar{x}_3x_2 \lor x_2\bar{x}_0 \lor x_3\bar{x}_2x_1$$

DMF

Realisierung als „Programmable Logic Array (PLA)



$$f(x_3, x_2, x_1, x_0) = \bar{x}_1\bar{x}_0 \vee \bar{x}_3 x_2 \vee x_3\bar{x}_0 \vee x_3\bar{x}_2 x_1$$

10.2 Bündelminimierung

- Funktionen mit mehreren Ausgängen werden gemeinsam minimiert
- gemeinsame Implikanten sollten mehrfach genutzt werden
- Beispiel: Transformation eines Codes

- Transformationstabelle

System1			System2	
c	b	a	x	y
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	1	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	0	1

x:

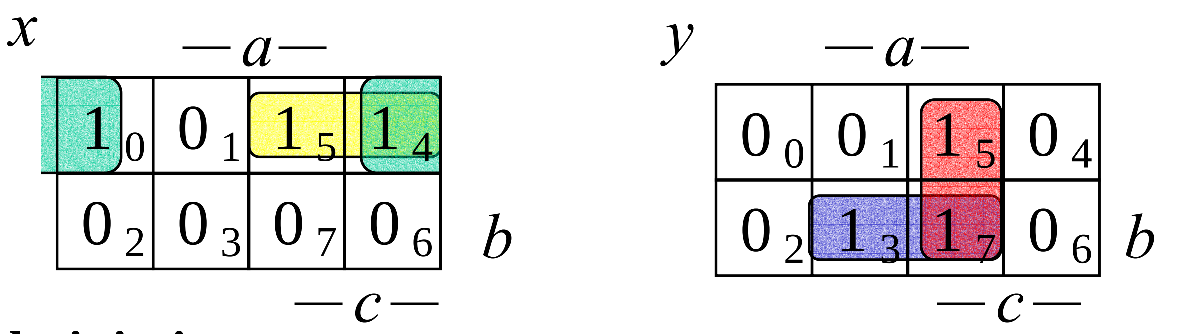
	x_0	x_0		
1_0	0_1	1_5	1_4	
0_2	0_3	0_7	0_6	x_1
		x_2	x_2	

y:

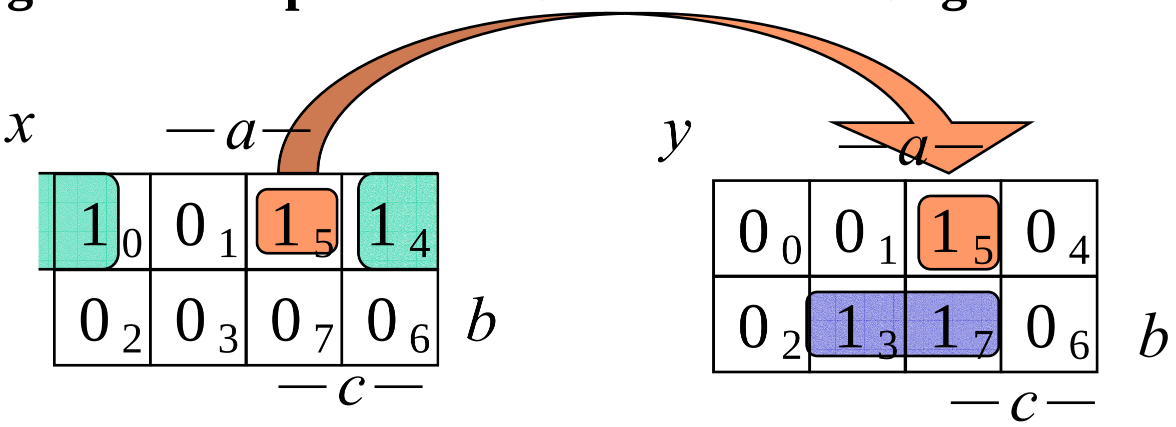
	x_0	x_0		
0_0	0_1	1_5	0_4	
0_2	1_3	1_7	0_6	x_1
		x_2	x_2	

Bündelminimierung

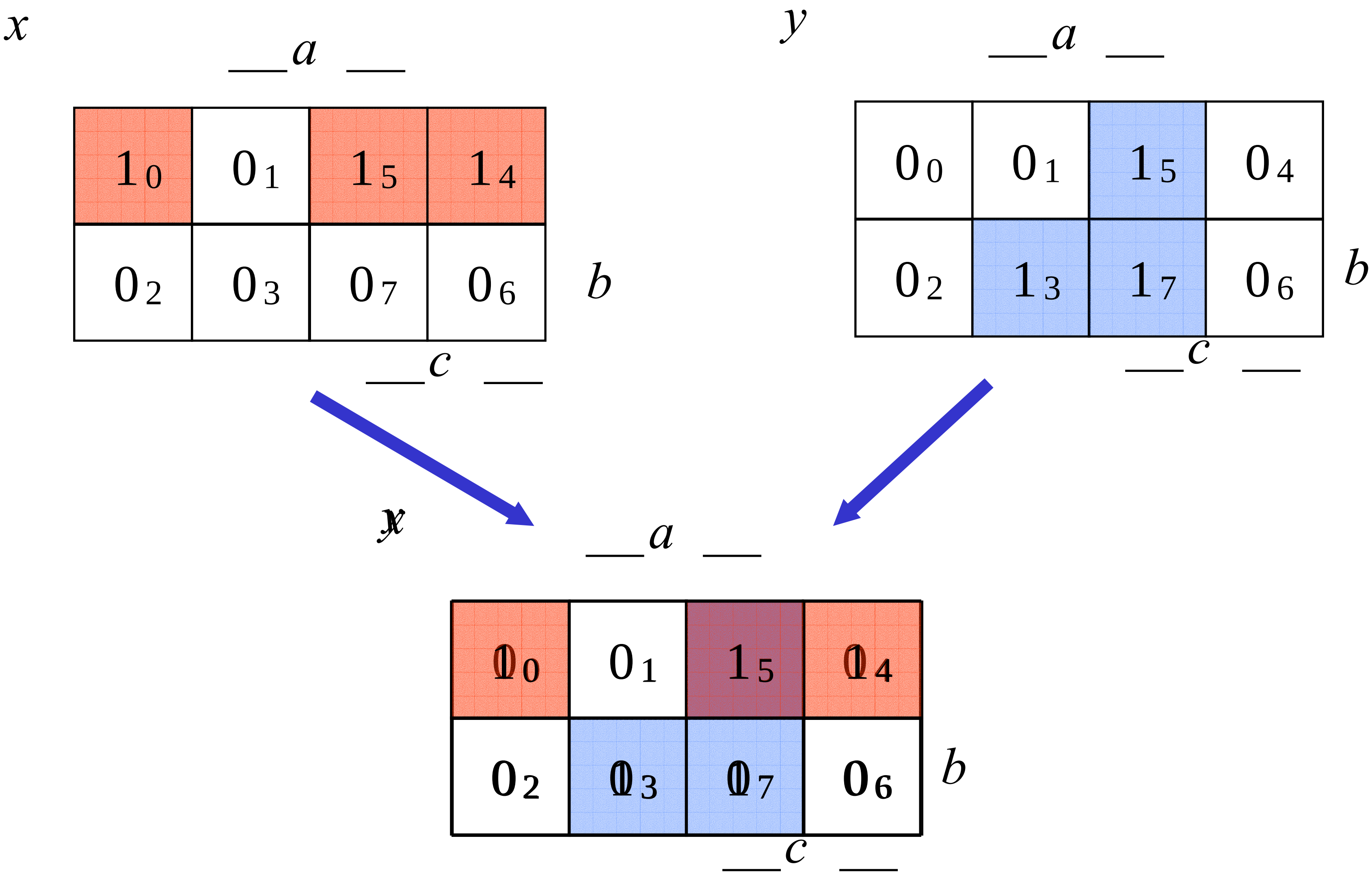
- **Getrennte Minimierung**
  - ⇨ **insgesamt 4 Implikanten für die Realisierung**



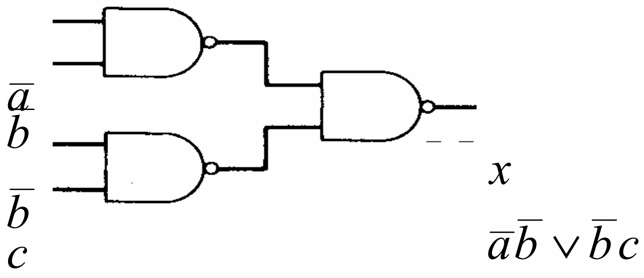
- **Bündelminimierung**
  - ⇨ **insgesamt 3 Implikanten für die Realisierung**

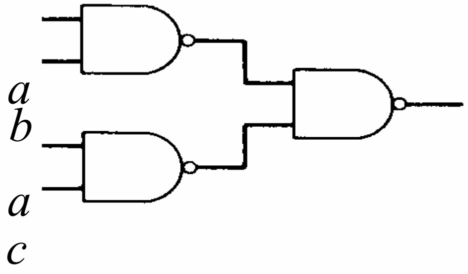


Bündelminimierung



Bündelminimierung

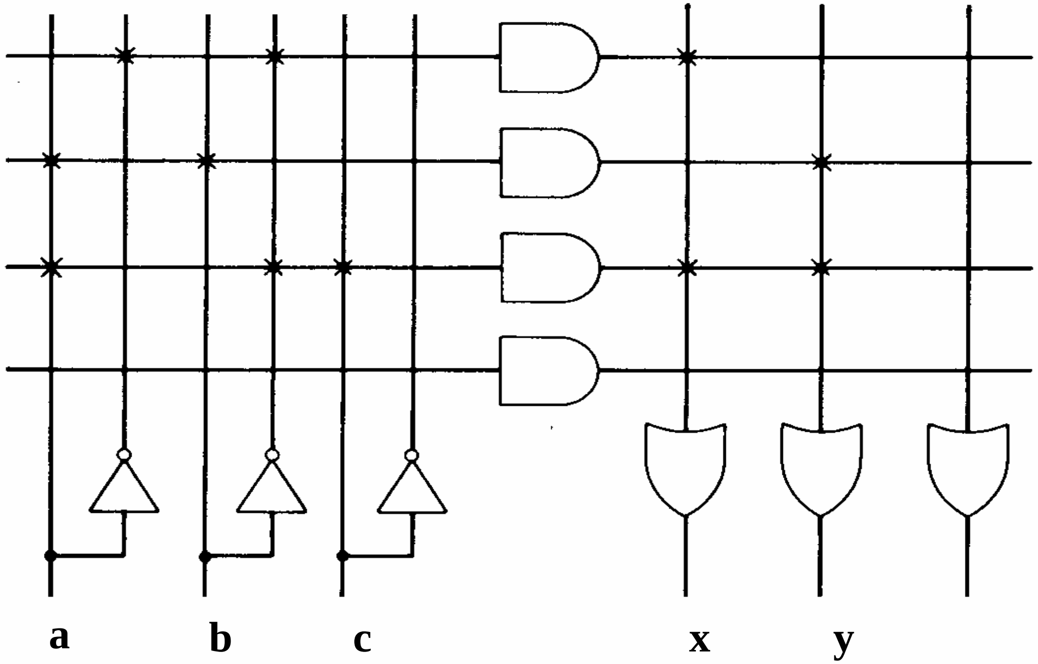




getrennte Minimierung

y

$ab \vee ac$



Bündelminimierung

$x = \bar{a}\bar{b} \vee a\bar{b}c$

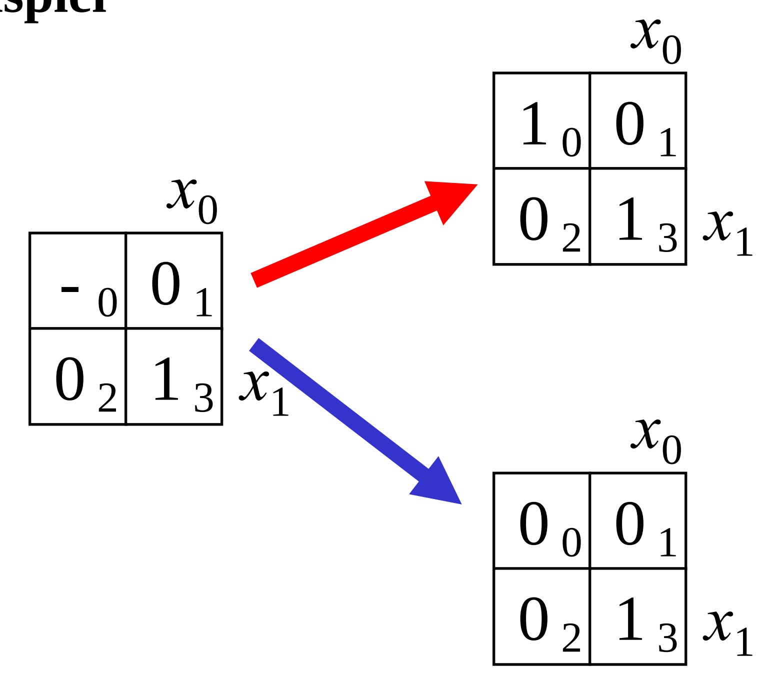
$y = ab \vee a\bar{b}c$

10.3 Unvollständig definierte Funktionen

- **Bisher war für alle Belegungen der Eingänge ein Funktionswert festgelegt**
  - ⇨ **in praktischen Fällen kommt es sehr häufig vor, dass die Funktionswerte für bestimmte Eingangsbelegungen frei wählbar sind**
  - ⇨ **diese Funktionswerte sind frei verfügbar**
- **Solche Funktionen heißen <u>unvollständig</u> oder <u>partiell definierte</u> Funktionen**
  - ⇨ **die nicht verwendeten Eingangsbelegungen heißen auch Don‘t-care-Belegungen**
  - ⇨ **in KV-Diagrammen werden diese Felder mit einem „-“ gekennzeichnet**
- **wichtiges Potential für die Minimierung!**
  - ⇨ **um eine DMF zu erhalten, müssen diese mit „0“ oder „1“ belegt werden**

Minimierung unvollständiger Boolescher Funktionen

- **Beispiel**



$$f(x_1, x_0) = x_1 x_0 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_0$$

$$f(x_1, x_0) = x_1 x_0$$

Minimierung unvollständiger Boolescher Funktionen

		x_0	x_0		
	1_0	0_1	$-_5$	0_4	
	$-_2$	0_3	$-_7$	0_6	x_1
x_3	0_{10}	1_{11}	0_{15}	0_{14}	x_1
x_3	$-_8$	1_9	1_{13}	1_{12}	
			x_2	x_2	

		x_0	x_0		
	1_0	0_1	0_5	0_4	
	0_2	0_3	0_7	0_6	x_1
x_3	0_{10}	1_{11}	0_{15}	0_{14}	x_1
x_3	1_8	1_9	1_{13}	1_{12}	
			x_2	x_2	

$$f = x_3\bar{x}_1 \vee x_3\bar{x}_2x_0 \vee \bar{x}_2\bar{x}_1\bar{x}_0$$

		x_0	x_0		
	1_0	0_1	0_5	0_4	
	1_2	0_3	0_7	0_6	x_1
x_3	0_{10}	1_{11}	0_{15}	0_{14}	x_1
x_3	1_8	1_9	1_{13}	1_{12}	
			x_2	x_2	

$$f = x_3\bar{x}_1 \vee x_3\bar{x}_2x_0 \vee \bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_0$$

10.4 Das Verfahren nach Quine-McCluskey

- **KV-Diagramme mit mehr als 6 Variablen werden sehr groß und unübersichtlich**
  - ⇨ **dieses Problem wurde zuerst von Quine und McCluskey erkannt und gelöst**
  - ⇨ **das Verfahren nach Quine-McCluskey ist ein tabellarisches Verfahren**
  - ⇨ **es führt auf eine DMF (disjunktive minimale Form)**
- **Ausgangspunkt ist die Funktionstabelle der Funktion**
  - ⇨ **nur die Minterme werden berücksichtigt**
- **Der Suchraum wird eingeschränkt, weil der Satz 1.1 gilt:**
  - ⇨ **zu jeder Booleschen Funktion *f* gibt es eine minimale Überdeckung aus Primimplikanten**
- **Verfahren nach Quine McCluskey in 2 Schritten:**

  1. Schritt: berechne alle Primimplikanten

  2. Schritt: suche eine minimale Überdeckung aller Minterme

Beispiel: Die vollständige Funktionstabelle

Nr.	e	d	c	b	a	y
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0
2	0	0	0	1	0	1
3	0	0	0	1	1	0
4	0	0	1	0	0	1
5	0	0	1	0	1	1
6	0	0	1	1	0	1
7	0	0	1	1	1	0
8	0	1	0	0	0	0
9	0	1	0	0	1	0
10	0	1	0	1	0	1
11	0	1	0	1	1	0
12	0	1	1	0	0	1
13	0	1	1	0	1	1
14	0	1	1	1	0	1
15	0	1	1	1	1	0

Nr.	e	d	c	b	a	y
16	1	0	0	0	0	0
17	1	0	0	0	1	0
18	1	0	0	1	0	1
19	1	0	0	1	1	0
20	1	0	1	0	0	0
21	1	0	1	0	1	0
22	1	0	1	1	0	1
23	1	0	1	1	1	0
24	1	1	0	0	0	0
25	1	1	0	0	1	0
26	1	1	0	1	0	1
27	1	1	0	1	1	0
28	1	1	1	0	0	0
29	1	1	1	0	1	0
30	1	1	1	1	0	1
31	1	1	1	1	1	0

1. Schritt: Berechnung aller Primimplikanten

- **Schreibweise**
  - ⇨ `1` steht für eine nicht negierte Variable
  - ⇨ `0` steht für eine negierte Variable
  - ⇨ `-` steht für eine nicht auftretende Variable
- **Man betrachtet nur die Minterme**
  - ⇨ 1-Stellen der Funktion
- **Die Minterme werden geordnet**
  - ⇨ Gruppen mit der gleichen Anzahl von Einsen
  - ⇨ innerhalb der Gruppen: aufsteigende Reihenfolge
  - ⇨ man erhält die 1. Quinesche Tabelle, 0. Ordnung
- **Minterme benachbarter Gruppen die sich nur in 1 Variable unterscheiden werden gesucht**
  - ⇨ diese können durch Streichen der Variable zusammengefaßt werden
  - ⇨ man erhält die 1. Quineschen Tabellen höherer Ordnung

Beispiel: 1. Quinesche Tabelle

Nr.	e	d	c	b	a
2	0	0	0	1	0
4	0	0	1	0	0
5	0	0	1	0	1
6	0	0	1	1	0
10	0	1	0	1	0
12	0	1	1	0	0
18	1	0	0	1	0
13	0	1	1	0	1
14	0	1	1	1	0
22	1	0	1	1	0
26	1	1	0	1	0
30	1	1	1	1	0

0. Ordnung

Nr.	e	d	c	b	a
2,6	0	0	-	1	0
2,10	0	-	0	1	0
2,18	-	0	0	1	0
4,5	0	0	1	0	-
4,6	0	0	1	-	0
4,12	0	-	1	0	0
5,13	0	-	1	0	1
6,14	0	-	1	1	0
6,22	-	0	1	1	0
10,14	0	1	-	1	0
10,26	-	1	0	1	0
12,13	0	1	1	0	-
12,14	0	1	1	-	0
18,22	1	0	-	1	0
18,26	1	-	0	1	0
14,30	-	1	1	1	0
22,30	1	-	1	1	0
26,30	1	1	-	1	0

1. Ordnung

Nr.	e	d	c	b	a	
2,6,10,14	0	-	-	1	0	
2,6,18,22	-	0	-	1	0	
2,10,18,26	-	-	0	1	0	
4,5,12,13	0	-	1	0	-	*A*
4,6,12,14	0	-	1	-	0	*B*
6,14,22,30	-	-	1	1	0	
10,14,26,30	-	1	-	1	0	
18,22,26,30	1	-	-	1	0	

2. Ordnung

Nr.	e	d	c	b	a	
2,6,10,14 18,22,26,30	-	-	-	1	0	*C*

3. Ordnung

U. Kebschull

2. Schritt: Suche einer minimalen Überdeckung

- **Aufstellen der 2. Quineschen Tabelle**
  - ⇨ **alle Primimplikanten werden zusammen mit der Nummer des Minterms aus dem sie hervorgegangen sind in eine Überdeckungstabelle eingetragen**
- **Kosten für einen Primimplikanten:**
  - ⇨ **Anzahl der UND-Eingänge (Anzahl der Variablen des Terms)**

Primimplikant	2	4	5	6	10	12	13	14	18	22	26	30	Kosten
A		X	X			X	X						3
B		X		X		X		X					3
C	X			X	X			X	X	X	X	X	2

- **Aufgabe: Finden einer Überdeckung aller Minterme mit minimalen Kosten**

Systematische Lösung des Überdeckungsproblems

- **Aufstellung einer Überdeckungsfunktion $\ddot{u}_f$**
  - ⇨ w_A, w_B **und** w_C **sind Variablen, die kennzeichnen, ob ein entsprechender Primimplikant in der vereinfachten Darstellung aufgenommen wird, oder nicht**
  - ⇨ **Konjunktive Form über alle den jeweiligen Minterm überdeckenden Primimplikanten**

Primimplikant	2	4	5	6	10	12	13	14	18	22	26	30
A		X	X			X	X					
B		X		X		X		X				
C	X			X	X			X	X	X	X	X

$$\ddot{u}_f = w_C(w_A \vee w_B)w_A(w_B \vee w_C)w_C(w_A \vee w_B)w_A(w_B \vee w_C)w_C w_C w_C w_C$$

$$= w_C(w_A \vee w_B)w_A(w_B \vee w_C)$$

$$= (w_C w_A \vee w_C w_B)(w_A w_B \vee w_A w_C)$$

$$= w_C w_B w_A \vee w_A w_C$$

$$(= w_A w_C)$$

Systematische Lösung des Überdeckungsproblems

- **Ergebnis nach der Vereinfachung:** $\ddot{u}_f = w_C w_B w_A \vee w_A w_C$

- **Damit f ganz überdeckt ist, muss $\ddot{u}_f$ eine Tautologie sein**
  - ⇨ **man sucht einen konjunktiven Term mit minimalen Kosten**

$$w_C w_B w_A \quad \textbf{Kosten:}\ 3+3+2=8$$

$$w_A w_C \quad \textbf{Kosten:}\ 3+2=5$$

- **Als Endergebnis der Minimierung für die Funktion f erhält man**

$$f(e,d,c,b,a) = \bar{e}c\bar{b} \vee b\bar{a}$$

Vereinfachung des Überdeckungsproblems

- **Die Primimplikantentabelle kann reduziert werden, indem essentielle Primterme (Kernprimimplikanten) und die von ihnen überdeckten Minterme gestrichen werden**
  - ⇨ **tragen mit einem einzigen „X“ zu einer Spalte bei**
  - ⇨ **müssen auf jeden Fall in der Überdeckung enthalten sein**
- **In diesem Beispiel sind dies die beiden Primimplikanten A und C**

Primimplikant	2	4	5	6	10	12	13	14	18	22	26	30	Kosten
A		X	X			X	X						3
B		X		X		X		X					3
C	X			X	X			X	X	X	X	X	2

  - ⇨ **A: 5, 13**
  - ⇨ **C: 2, 10, 18, 22, 26, 30**
  - ⇨ **B ist vollständig überdeckt und kann ebenfalls gestrichen werden**

Aufwandsbetrachtungen

- **Alle Verfahren benötigen 2 Schritte**
  - ⇨ **1. Erzeugen aller Primimplikanten (Primimplikate)**
  - ⇨ **2. Auswahl der Primiplikanten (Primimplikate), welche die Minterme (Maxterme) mit minimalen Kosten überdecken**
- **Die Anzahl der Primimplikanten (Primimplikaten) kann exponentiell steigen**
  - ⇨ **Es gibt Funktionen mit** $\frac{3^n}{n}$ **Primimplikanten**
- **Das Überdeckungsproblem ist NP-Vollständig**
  - ⇨ **es besteht wenig Hoffnung einen Algorithmus zu finden, der dieses Problem polynomial mit der Zahl der Eingabevariablen löst**

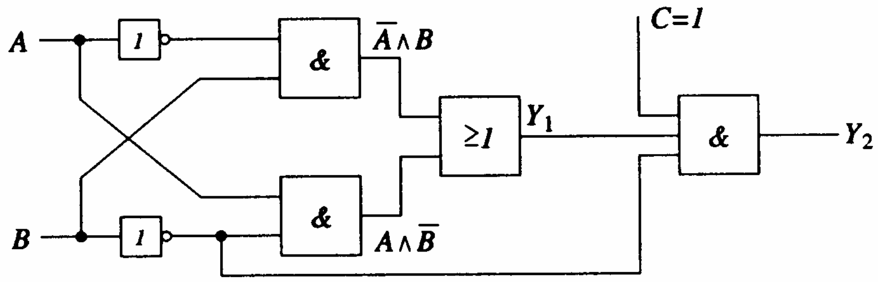
Heuristische Verfahren

- **Heuristische Minimierungsverfahren werden eingesetzt,**
  - ⇨ **wenn die zweistufige Darstellung optimiert werden muss, aber**
  - ⇨ **nur begrenzte Rechenzeit und Speicherplatz zur Verfügung steht**
- **Die meisten heuristischen Minimierungsansätze basieren auf einer schrittweisen Verbesserung der Schaltung**
- **Unterschiede zu exakten Verfahren:**
  - ⇨ **man wendet eine Menge von Transformationen direkt auf die Überdeckung des *ON-Sets* an**
  - ⇨ **man definiert die Optimierung als beendet, wenn diese Transformationen keine Verbesserungen mehr bringen**

12 Laufzeiteffekte in Schaltnetzen

- **Bisher wurden Schaltnetze mit idealen Verknüpfungsgliedern betrachtet**
  - ⇨ **die Verknüpfungsgliedern besaßen keine Signallaufzeit**
- **Bei realen Verknüpfungsgliedern dürfen Signallaufzeiten nicht vernachlässigt werden**
  - ⇨ **Schaltvariablen können Werte annehmen, die theoretisch oder bei idealen Verknüpfungsgliedern nie auftreten könnten**
- **Solche Störimpulse nennt man Hazards**
  - ⇨ **sie treten als Antwort auf die Änderung der Werte der Eingangsvariablen auf**

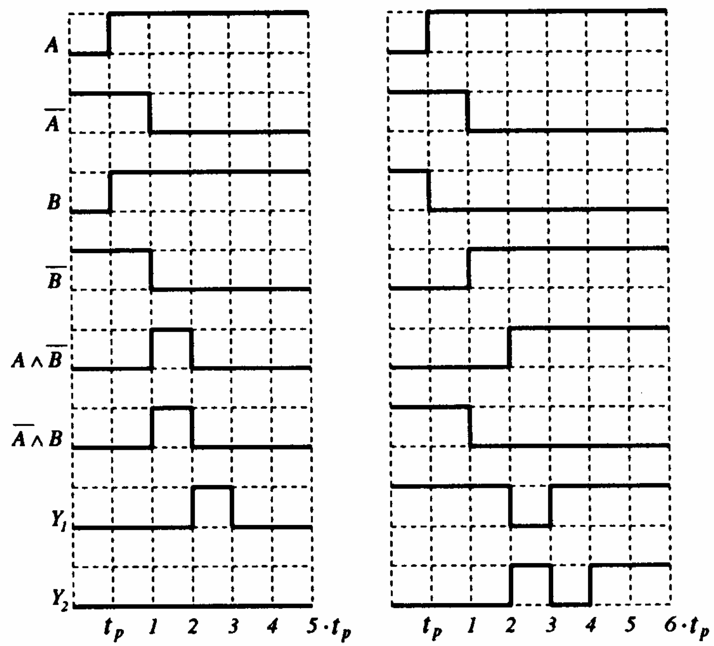
Entstehung von Hazards



a) Schaltnetz

B	A	Y_1	Y_2
0	0	0	0
1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	1	1

b) Funktionstabelle



a) Impulsdiagramm

Statische Hazards

- **Statische Hazards sind Störimpulse aus einer Verknüpfung, die theoretisch konstant Null oder Eins liefern müsste**

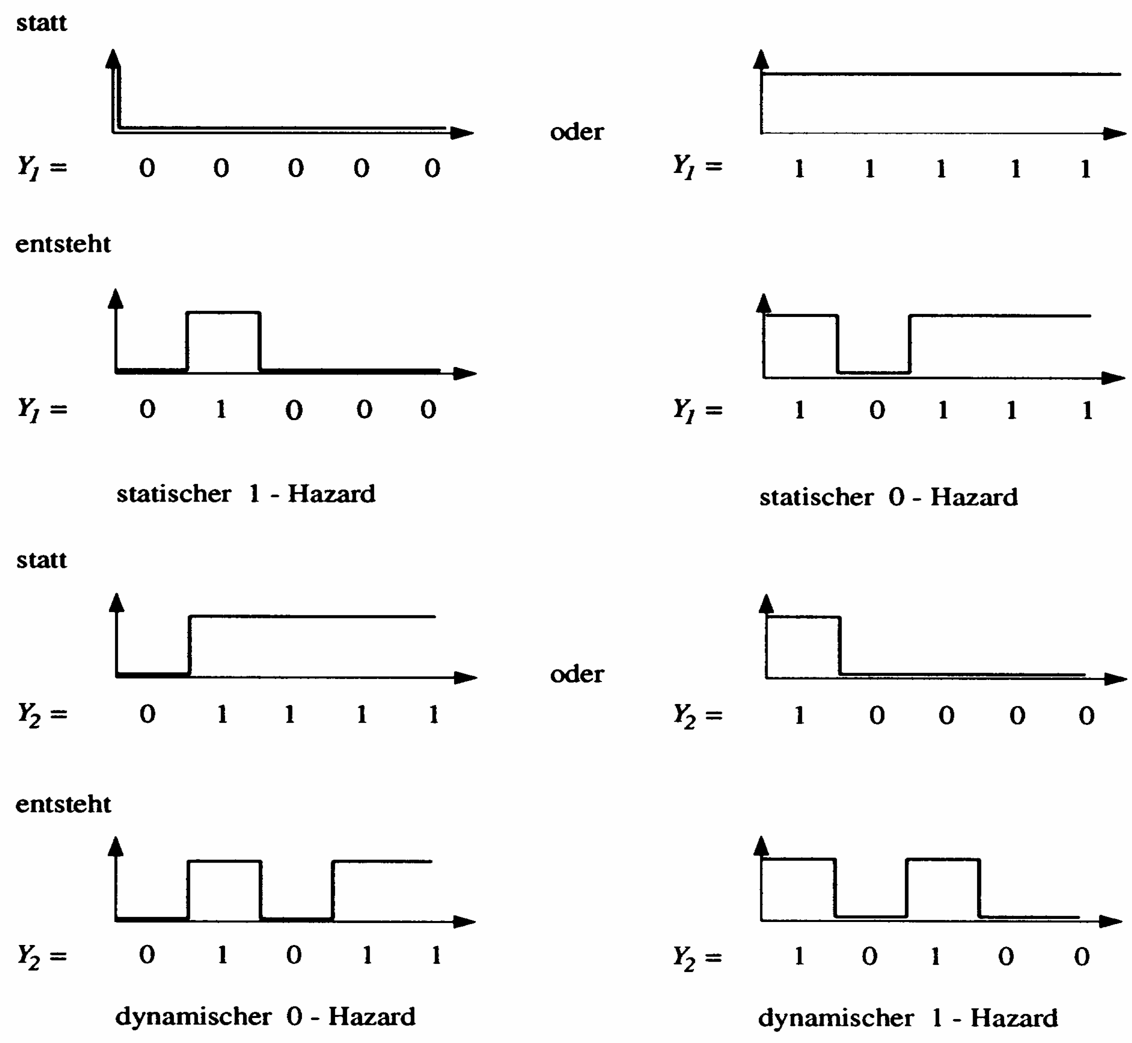
$X_t \wedge \overline{X}_{t-k}$ **müsste Null liefern**
statischer 1-Hazard bei einem Übergang von X: 0→1

$X_t \vee \overline{X}_{t-k}$ **müsste Eins liefern**
statischer 0-Hazard bei einem Übergang von X: 1→0

Dynamische Hazards

- **Dynamische Hazards entstehen als zusätzliche Übergänge beim Ausgang eines Schaltnetzes**
- $X_t \wedge \overline{X}_{t-k} \vee X_l$**, mit** $l > k$
  - **bei einem Übergang von** $X=0 \rightarrow X=1$ **darf am Ausgang nur ein zu** X_{t-l} **synchroner 0 →1 Übergang auftreten**
  - **durch den vorgeschalteten statischen Hazard kommt es aber zu einer zusätzlichen 0 →1 Flanke**
- $X_t \wedge (\overline{X}_{t-k} \vee X_l)$**, mit** $l > k$
  - **bei einem Übergang von** $X=0 \rightarrow X=1$ **darf am Ausgang nur ein zu** X_t **synchroner 0 →1 Übergang auftreten**
  - **durch den vorgeschalteten statischen Hazard kommt es aber zu einer zusätzlichen 0 →1 Flanke**

Klassifikation von Hazards



Behebung von Hazards

- **Hazards können die Funktion von Schaltnetzen stören**
  - ⇨ **falsche Werte können an den Eingang eines Schaltnetzes zurückgekoppelt werden**
- **Um solche Fehler zu vermeiden werden taktflankengetriggerte Speicherglieder in die Rückkopplung eingefügt**
- **Die Signale werden erst übernommen, wenn die Hazards abgeklungen sind**
  - ⇨ **nur stabile, gültige Werte werden übernommen**
  - ⇨ **synchrone Schaltwerke: Schaltwerke, die durch einen zentralen Takt gesteuert werden**
- **Hazards haben einen Einfluss auf die maximale Schaltgeschwindigkeit**
  - ⇨ **maximaler Takt**
  - ⇨ **Entfernung von Hazards führt zu einer Erhöhung der Geschwindigkeit einer Schaltung**