

---

# **Technische Informatik I**

## **Elektrotechnische Grundlagen**

**Prof. Dr. U. Keschull**  
**Technische Informatik**

**Sprechstunde: Mi 11:00 -12:00 Uhr**  
**keschull@informatik.uni-leipzig.de**

# Ziele der Vorlesungen TI 1 und TI 2

---

- **Physikalische und elektrotechnische Grundlagen mit Bezug**
  - ⇒ **zum Aufbau von Rechnersystemen**
  - ⇒ **zur Speicherung von Daten**
  - ⇒ **zur Übertragung von Signalen**
- **Realisierung von digitalen Funktionen**
  - ⇒ **der Transistor als Schalter**
  - ⇒ **Darstellung**
  - ⇒ **Entwurf**
  - ⇒ **Optimierung von digitalen Schaltungen**
- **Aufbau von Rechnersystemen**
  - ⇒ **am Beispiel der Komponenten eines PC**

# Inhalt der Vorlesungen TI1 und TI2

---

## ○ Elektrotechnische Grundlagen

⇒ Einfache physikalische Zusammenhänge, die verwendet werden um Schaltvorgänge in Rechnersystemen durchzuführen

## ○ Halbleitertechnologie

⇒ Funktionsweise von Dioden und Transistoren

⇒ Einsatz von Transistoren als Schalter

⇒ Aktive und passive Bauelemente aus denen Rechnersysteme aufgebaut werden

## ○ Digitale Schaltungen

⇒ Entwurf, Darstellung und Optimierung von Schaltnetzen und Schaltwerken

⇒ Einfache Bausteine aus denen Rechnersysteme aufgebaut sind

# Inhalt der Vorlesungen TI1 und TI2

---

- **Einführung in die Rechnerarchitektur**
  - ⇒ **Funktion und Aufbau komplexer Bausteine**
  - ⇒ **Komponenten aus denen Rechnersysteme aufgebaut sind**
- **Rechnerarithmetik**
  - ⇒ **Darstellung von Zahlen und Zeichen in Rechnersystemen**
  - ⇒ **Algorithmen zur Berechnung von Operationen wie die vier Grundrechenarten**

# Übersicht

---

## 1 Geschichtliche Übersicht

## 2 Physikalische Grundlagen

- ⇒ Elektrische Ladung
- ⇒ Gleichstrom, Ohmsches Gesetz, Kirchhoffsche Gesetze
- ⇒ Elektromagnetisches Feld
- ⇒ Wechselstromkreis
- ⇒ Schaltvorgänge

## 3 Halbleitertechnologie

- ⇒ Dioden
- ⇒ Bipolare und FET- Technologie
- ⇒ Der Transistor als Schalter
- ⇒ NMOS- PMOS und CMOS-Schaltkreise
- ⇒ CMOS-Grundsaltungen

# Übersicht

---

## 4 Herstellung elektronischer Schaltungen

- ⇒ Herstellung von Wafern
- ⇒ Entstehung eines n-MOS-Transistors
- ⇒ Entstehung von CMOS-Schaltungen

## 5 Schaltnetze

- ⇒ Boolesche Algebren
- ⇒ Normalformen
- ⇒ Darstellung Boolescher Funktionen

## 6 Minimierung von Schaltnetzen

- ⇒ KV-Diagramme
- ⇒ Minimierung nach Quine MC-Cluskey
- ⇒ Bündelminimierung

# Übersicht

---

## 7 Speicherglieder

- ⇒ **RS-Flipflop**
- ⇒ **D-Flipflop**
- ⇒ **JK-Flipflop**
- ⇒ **T-Flipflop**

## 8 Schaltwerke

- ⇒ **Darstellung endlicher Automaten**
- ⇒ **Minimierung der Zustandszahl**
- ⇒ **Zustandskodierung**

# Literatur zu dieser Vorlesung

---

- Die Vorlesung basiert auf dem Lehrbuch:
  - ⇒ **W. Schiffmann, R. Schmitz: "Technische Informatik 1 Grundlagen der digitalen Elektronik"**  
**Springer-Lehrbuch, Springer-Verlag (1992).**
  
- Weitere Empfehlungen:
  - ⇒ **R.J. Smith, R.C. Dorf: "Circuits, Devices and Systems"**  
**5. Auflage, John Wiley & Sons (1992)**
  - ⇒ **Hütte: "Die Grundlagen der Ingenieurwissenschaften"**  
**29. Auflage, Springer (1992)**  
**"Hütte" ist ein sehr empfehlenswertes Nachschlagewerk für die Gebiete Mathematik, Physik und Technische Informatik**



# 1 Historischer Überblick

---

- **Griechenland 6. Jh. v.Chr.**
  - ⇒ **Mit Seidentuch geriebener Bernstein zieht Staubteilchen, Wollfäden u.a. Körper an. Name: Elektron = Bernstein**
  - Magneteisenstein zieht Eisen an**
- **Gilbert William 1540-1603**
  - ⇒ **führt den Begriff *Elektrizität* ein**
- **Coulomb Charles 1736-1806**
  - ⇒ **Coulombsches Gesetz.**
- **Galvani Luigi 1737-1798**
  - ⇒ **Galvanische Elemente: Stromquellen deren Energie durch chemische Vorgänge frei wird**

# Historischer Überblick

---

- **Volta Alessandro 1745-1827**
  - ⇒ führt die Arbeit Galvanis fort. Konstruiert die **Voltaische Säule**, die erste brauchbare **Elektrizitätsquelle**. Von ihm stammt der Begriff des **stationären elektrischen Stromes**
- **Oerstedt Hans Christian 1777-1851**
  - ⇒ entdeckt 1820 die **Ablenkung der Magnetnadel durch elektrischen Strom (Elektromagnetismus)**
- **Ampere Andre Marie 1775-1836**
  - ⇒ entdeckt die **mechanische Wirkung stromdurchflossener Leiter aufeinander (Elektrodynamisches Gesetz)**. Nach ihm wurde die **Einheit der Basisgröße Stromstärke benannt**
- **Faraday Michael 1791-1867 Elektromagnetische Induktion**
- **Ohm Georg Simon 1787-1854 Ohmsches Gesetz**

# Historischer Überblick

---

- **Siemens Werner 1816-1892**
  - ⇒ Elektrische Maschinen (dynamoelektrisches Prinzip)
- **Kirchhoff Gustav Robert 1824-1887**
  - ⇒ entdeckt die Gesetze der Stromverzweigung.
- **Maxwell James Clerk 1831-1879**
  - ⇒ Maxwellsche Gleichungen: Beschreiben alle Erscheinungen, bei denen Elektrizität und Magnetismus miteinander verknüpft sind
- **Hertz Heinrich 1857-1894**
  - ⇒ entdeckt experimentell die elektromagnetischen Wellen
- **Edison Thomas Alva 1847-1931**
  - ⇒ Erfinder verschiedener Elektrogeräte: Telegraph, Kohlemikrofon, Glühlampe, u.a. Baut 1882 das erste Elektrizitätswerk

# Historischer Überblick

---

## ○ 1886 Lochkarte

⇒ **Herman Hollerith (1860-1929) benutzt die Lochkartentechnik zur Datenverarbeitung. Es handelt sich dabei um ein elektromechanisches Verfahren.**

## ○ 1941 Z 3

⇒ **Konrad Zuse baut die erste funktionsfähige Datenverarbeitungsanlage mit Programmsteuerung in Relais-technik.**

# Historischer Überblick

---

## ○ 1946 Eniac

⇒ Die erste Computergeneration basiert auf der Röhrentechnik  
Die Erfinder sind J. Presper Eckert und J. William Mauchly  
und die logische Konzeption stammt von J. von Neuman

## ○ 1955 Die zweite Computergeneration

⇒ Shockley, Bardeen und Brattain entdecken 1948 die  
Transistorwirkung und legen damit den Grundstein für die  
Mikroelektronik

## ○ 1960 Integrierte Schaltkreise (IC)

⇒ Die Funktionen von Transistoren, Widerständen und Dioden  
werden in Planartechnik auf ein Halbleiter-Plättchen  
aufgebracht

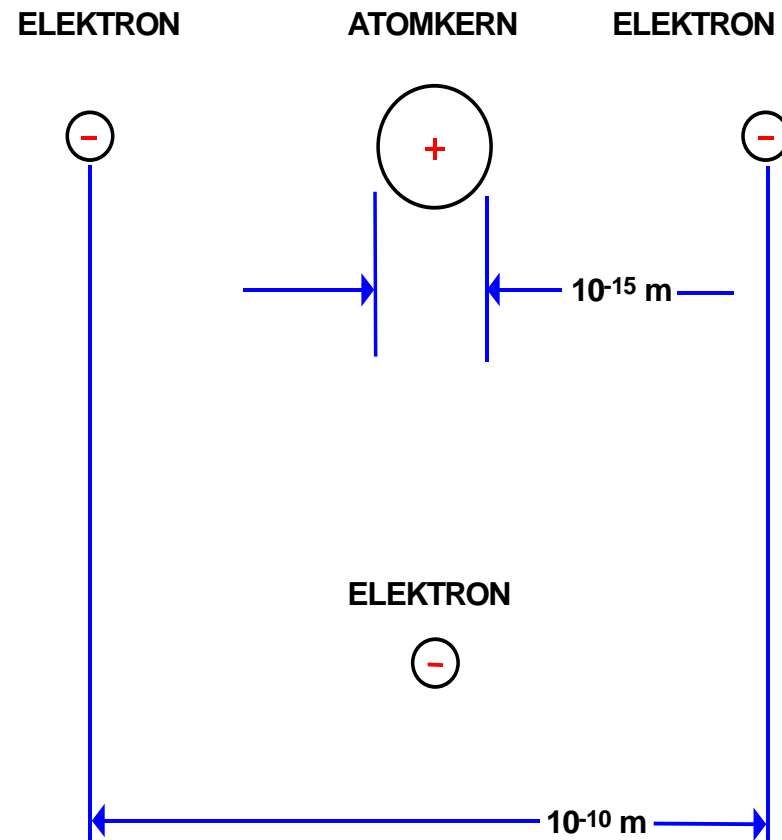
# 2 Physikalische Grundlagen



## 2.1 Elektrische Ladung

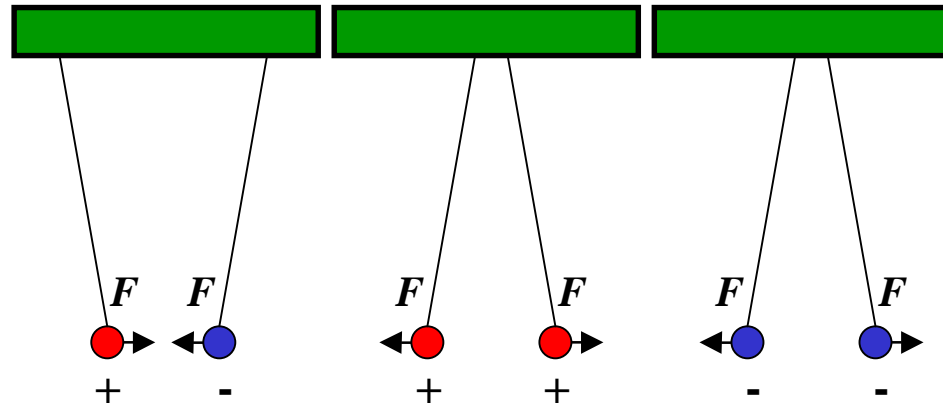
⊖ ELEKTRON

- Die Einheit der elektrischen Ladung ist  
 $1\text{C} = 1\text{As}$
- Die Elektrische Ladung eines Elektrons beträgt  
 $e_0 = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$



U. Keschull

# Elektrische Kraft

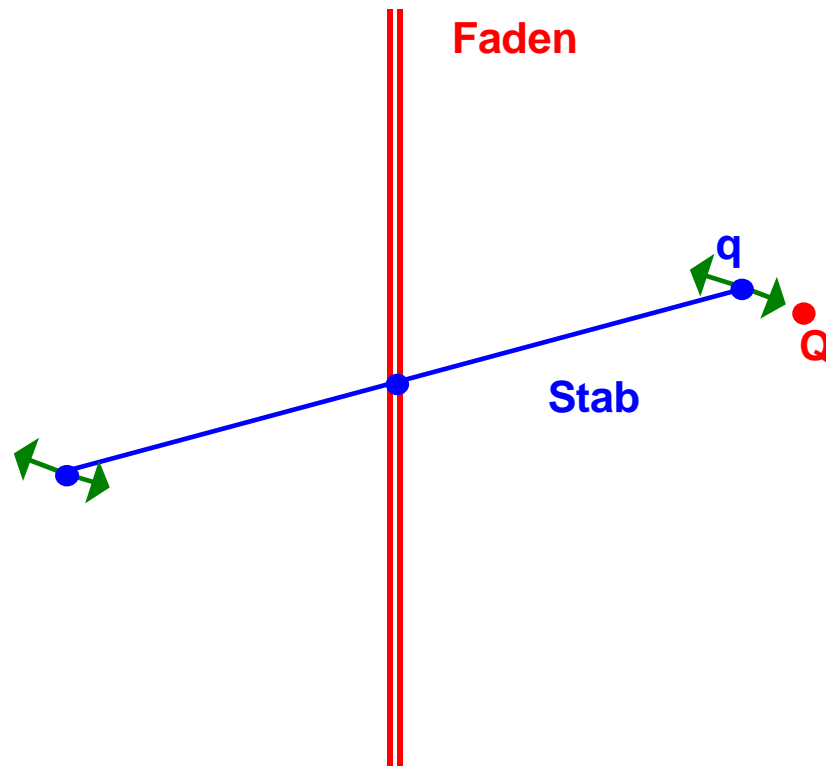


○ Elektrische Ladungen üben Kräfte aufeinander aus

⇒ ungleiche Ladungen ziehen sich an

⇒ gleiche Ladungen stoßen sich ab

# Messung der Kraft



**Torsionswaage (Coulomb, 1785)**

○ Für zwei Punktladungen  $Q$  und  $q$  im Vakuum und im Abstand  $d$  gilt:

⇒ Die Kraft ist proportional dem Produkt der beiden Ladungen  $F \sim Q \cdot q$

⇒ Die Kraft ist umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands

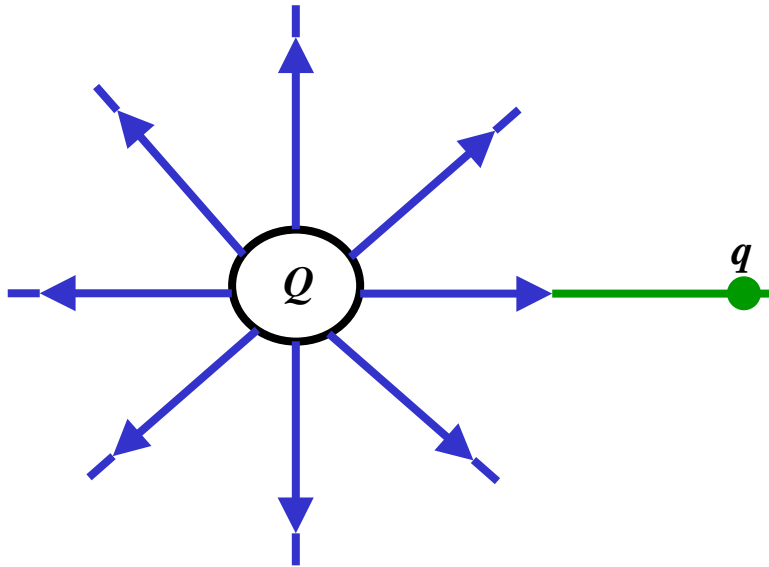
$$F \sim \frac{1}{d^2}$$

⇒ Zusammengefaßt ergibt sich

$$F \sim \frac{Q \cdot q}{d^2}$$



# Elektrisches Feld



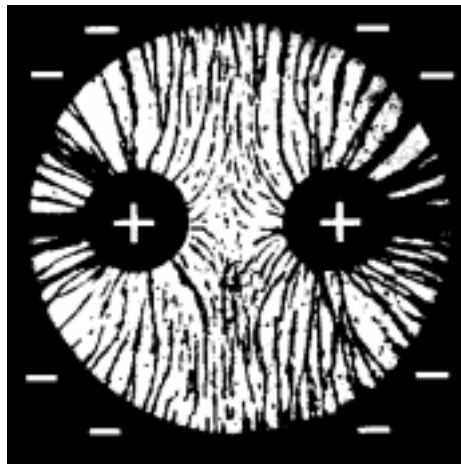
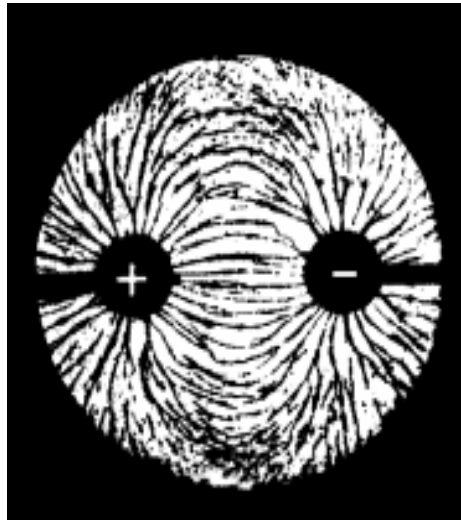
- Jedem Punkt des Raumes um eine vorgegebene Ladung  $Q$  wird eine vektorielle Größe zugeordnet, die um die Probeladung  $q$  normiert wird

$$\vec{F} = q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{d^2} \cdot \vec{r}_0$$
$$= q \cdot \vec{E}$$

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q}$$

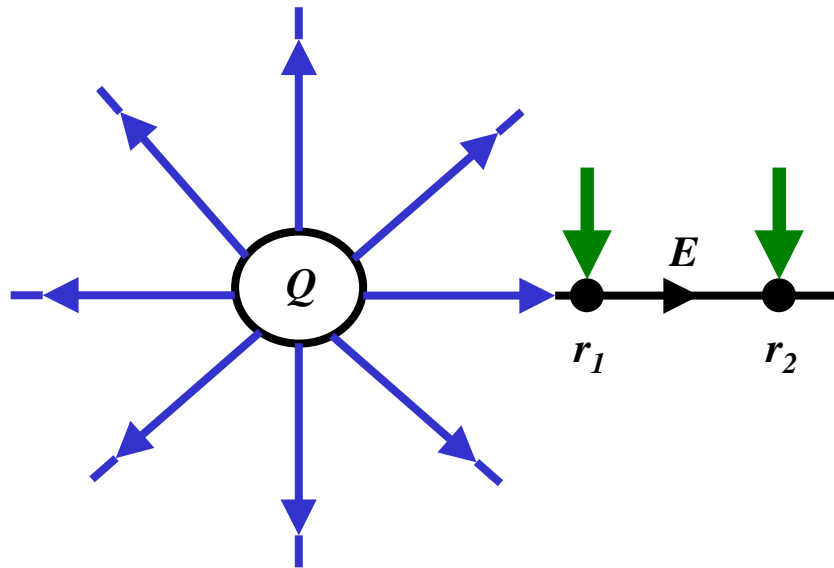
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{d^2} \cdot \vec{r}_0$$

# Elektrische Feldlinien



- Elektrische Feldlinien sind ein Hilfsmittel zur Beschreibung von elektrischen Feldern
  - ⇒ sie zeigen immer in Richtung der wirkenden Kraft
  - ⇒ sie erfüllen den Raum kontinuierlich
  - ⇒ sie beginnen mit einer positiven Ladung und enden mit einer negativen Ladung
  - ⇒ sie sind nicht geschlossen
- Sie sind keine physikalische Realität
  - ⇒ können jedoch sichtbar gemacht werden

# Die elektrische Spannung



- Wird eine Ladung in einem elektrischen Feld entgegen der Richtung der Feldlinien bewegt, so muß Arbeit verrichtet werden

$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$$

- In einem elektrischen Feld wirkt die Kraft

$$\vec{F} = \vec{E} \cdot q$$

- Damit beträgt die Arbeit um eine Ladung  $q$  von  $r_1$  nach  $r_2$  zu bewegen

$$W_{r_1 \rightarrow r_2} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = q \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

# Die elektrische Spannung

---



- Die Spannung zwischen  $r_1$  und  $r_2$  wird definiert als die Arbeit, die verrichtet werden muß, um die Elementarladung  $q$  von  $r_1$  nach  $r_2$  zu bewegen, normiert um die Ladung  $q$

$$U_{r_1 \rightarrow r_2} = \frac{W_{r_1 \rightarrow r_2}}{q} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$\text{Spannung} = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Ladung}}$$

$$1 \text{ V} = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{C}}$$

# Das elektrische Potenzial

---



- Normiert man die Energie auf einen Bezugspunkt, so erhält man das elektrische Potenzial  $\varphi$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \cdot \frac{1}{r_0}$$

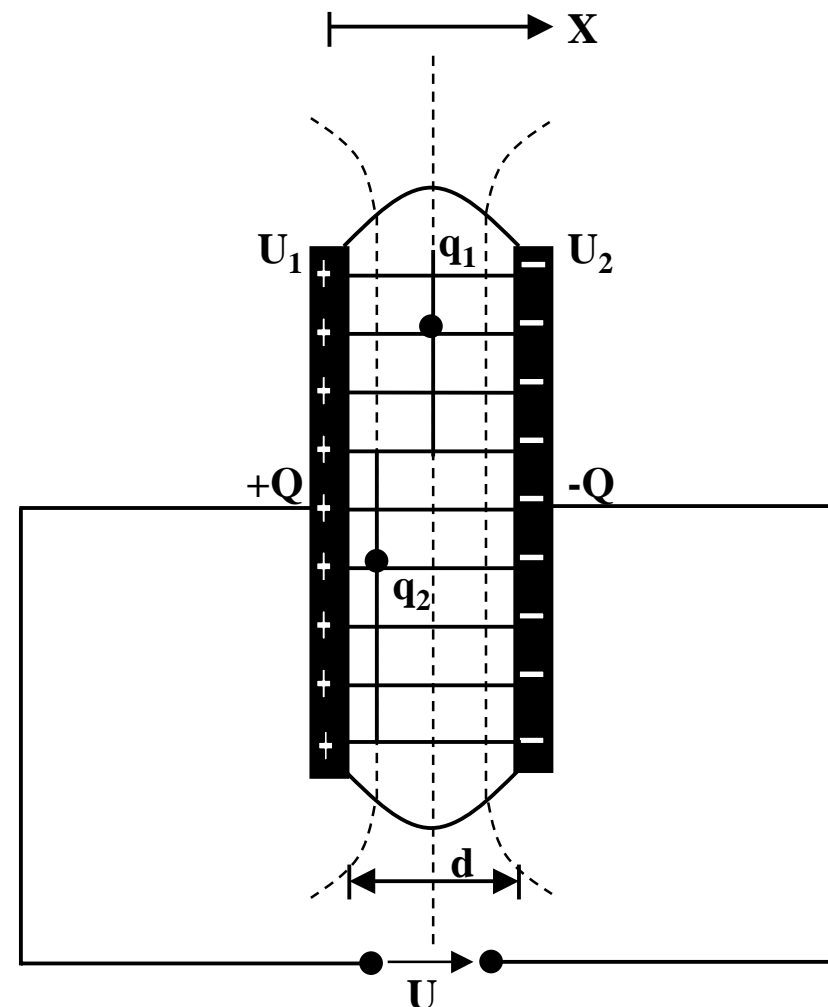
- Die Spannung ergibt sich als Potenzialdifferenz

$$U_{12} = \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2)$$

# Elektrische Ladung auf Leitern



- Auf metallischen Leitern sind Ladungen frei beweglich
  - ⇒ sie stoßen sich ab und verteilen sich gleichmäßig an der Oberfläche
- Alle Feldlinien stehen senkrecht zur Oberfläche
  - ⇒ im Innern eines metallischen Hohlraums ist ein feldfreier Raum (faradayscher Käfig)
- Stehen sich zwei Metallflächen gegenüber, so entsteht ein Plattenkondensator
  - ⇒ Die Flächen bilden Potenzialflächen  $\varphi_1 \varphi_2$



# Elektrische Flußdichte

- Flußdichte  $D$  ist die Ladungsmenge pro Flächeneinheit  $D = \frac{Q}{A}$

- Für eine beliebige Fläche

$$\iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q \quad \text{wenn } Q \text{ innerhalb der von } A \text{ umschlossenen Fläche liegt}$$

$$\iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \text{sonst}$$

- Für eine Kugelfläche bei der die Ladung im Mittelpunkt steht:

$$\iint_{\text{Kugelfläche}} \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q \quad \text{mit } \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{d^2} \cdot \vec{r}_0 \text{ folgt}$$

$$D \cdot 4\pi r^2 = Q$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$

$$D = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

$$[\epsilon_0] = \frac{[D]}{[E]} = \frac{C}{m^2} \cdot \frac{m}{V} = \frac{C}{V \cdot m}$$

# Wirkung eines Dielektrikum



- $\epsilon_0$  gilt für Vakuum
- Die Kraft auf eine Probeladung  $q$  verändert sich, wenn der Raum ausgefüllt ist
  - ⇒ Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_r$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \vec{E}$$

- Beispiele für  $\epsilon_r$

Material	$\epsilon_r$
Vakuum	1,0
Luft	1,006
Papier	5,4
Porzellan	5,5
Glas	3...15
Marmor	8,4...14
Ethylalkohol	25,1
Glycerin	41,1
Wasser	81,0
Bariumtitanat	1000...9000



# Kapazität eines Plattenkondensators



- Näherung  $d \ll A$

⇒ alle Feldlinien laufen parallel und befinden sich innerhalb der Platten

- damit gilt mit der Potenzialdifferenz

$$U = E \cdot d$$

- mit der vereinfachten Gleichung für E

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot A}$$

gilt

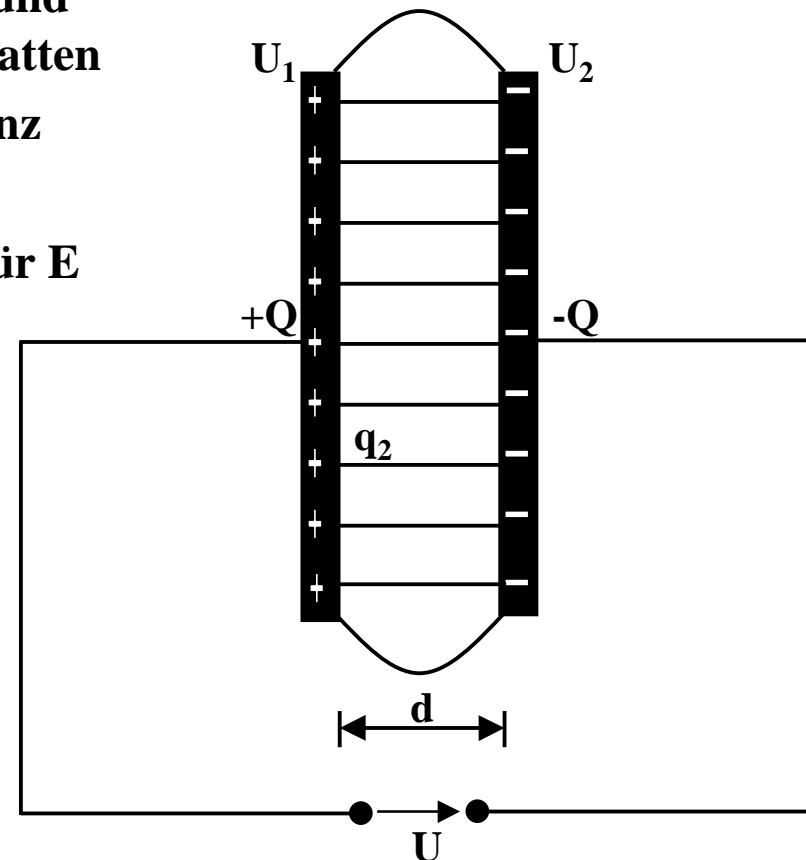
$$U = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot A} \cdot d$$

- Kapazität C ist

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 \cdot A}{d}$$

- Einheit der Kapazität: Farad

$$[C] = \frac{[Q]}{[U]} = \frac{C}{V} = F$$



## 2.2 Elektrischer Strom



- Elektrischer Strom ist der Fluß von Elektronen
- Ladung eines Elektrons  $e_0 = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

$$1 \text{ C} = \frac{1}{1,602} \cdot 10^{19} \text{ Elektronenladungen}$$

- Die Stromstärke  $I$  entspricht der bewegten Ladungsmenge pro Zeiteinheit

$$I = \frac{Q}{t}$$

- Fließen durch einen Leiter pro Sekunde  $n$  Coulomb, so messen wir einen Strom von  $n$  Ampere [A]

$$1 \text{ A} = 1 \frac{\text{C}}{\text{s}} = \frac{1}{1,602} \cdot 10^{19} \frac{\text{Elektronen}}{\text{s}}$$

# Variabler elektrischer Strom

---



- Ist die Stromstärke von der Zeit abhängig, benutzt man die differentielle Schreibweise

$$i(t) = \frac{dQ}{dt}$$

- daraus folgt

$$dQ = i(t) \cdot dt$$

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} i(t) \cdot dt$$

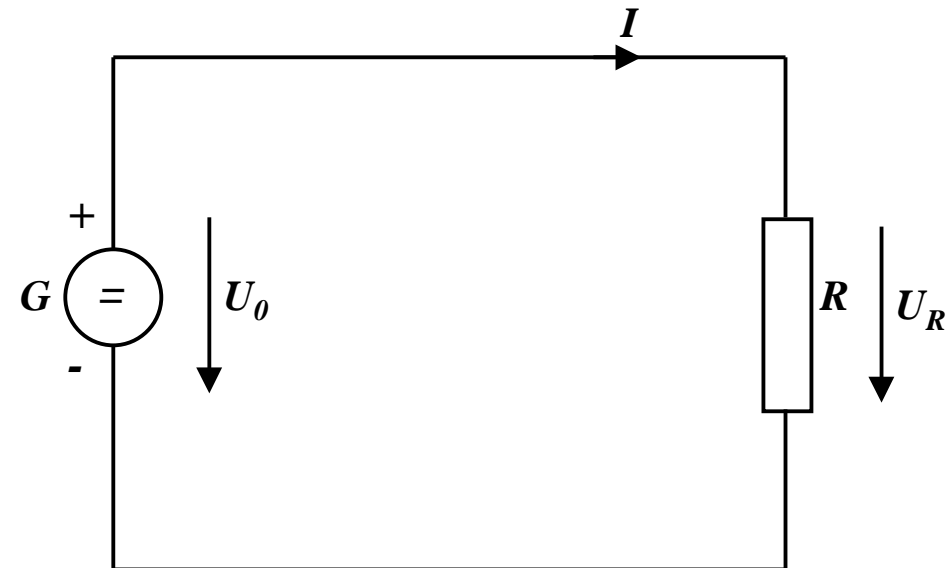
- in Einheiten

$$1 \text{ C} = 1 \text{ As}$$

# Elektrischer Stromkreis



- Ein elektrischer Stromkreis ist eine Anordnung aus
  - ⇒ Stromerzeuger  $G$  (Generator)
  - ⇒ Verbraucher  $R$
  - ⇒ Verbindungsleitungen
- In  $G$  wird Energie aufgewendet
  - ⇒  $(W < 0)$
- In  $R$  wird Energie verbraucht
  - ⇒  $(W > 0)$
- Der elektrische Strom fließt (per Definition) von Plus (+) nach Minus (-)
- Spannung im Stromerzeuger  $G$  bewirkt im Verbraucher  $R$  einen Stromfluß von von Plus nach Minus (Pfeilrichtung)



# Leitwert und Widerstand



- Zahlenmäßiger Zusammenhang zwischen Spannung und Strom an einem Verbraucher

⇒ Der gemessene Strom  $I$  ist proportional zur Spannung  $U$

$$I \sim U$$

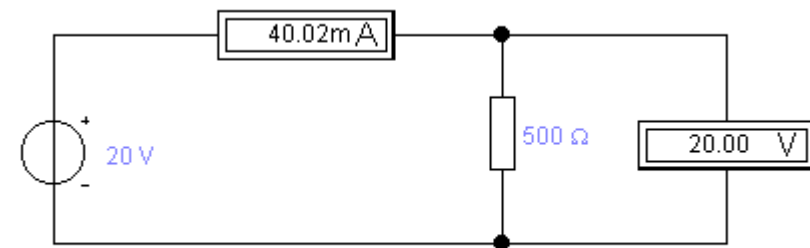
$$I = G \cdot U$$

- Der Proportionalitätsfaktor  $G$  wird Leitwert genannt
- Die Einheit von  $G$  ist *Siemens*

$$1\text{S} = 1 \frac{\text{A}}{\text{V}}$$

- in der Praxis verwendet man den Kehrwert von  $G$ , den Widerstand  $R$

$$R = \frac{1}{G}$$



# Ohmsches Gesetz



- Es gibt einen festen Zusammenhang zwischen dem Strom  $I$  und der Spannung  $U$

⇒ ohmsches Gesetz

$$I = \frac{1}{R} \cdot U$$

$$U = R \cdot I$$

$$R = \frac{U}{I}$$

- Die Einheit für den Widerstand ist Ohm  $\Omega$

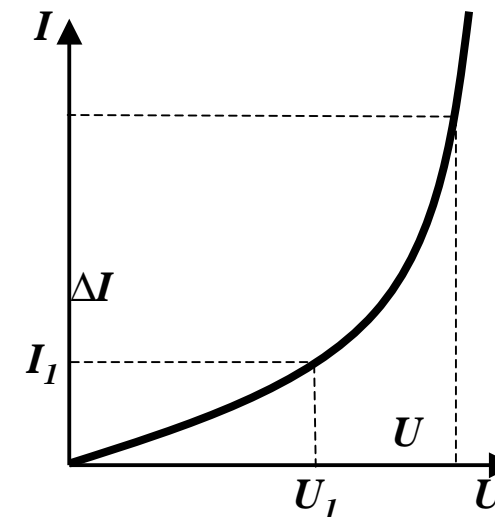
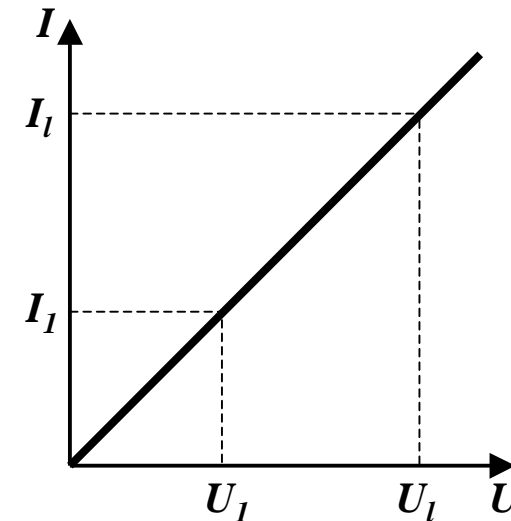
$$1\Omega = 1 \frac{\text{V}}{\text{A}}$$

# Kennlinienfeld



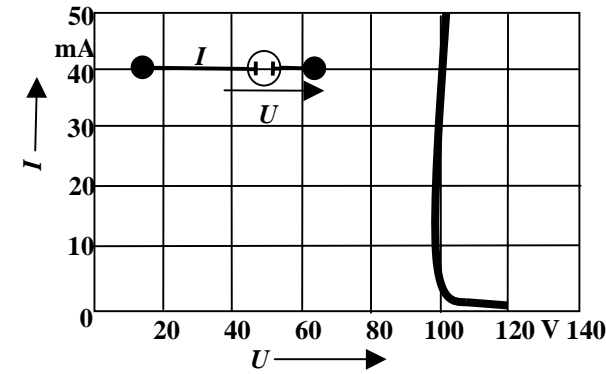
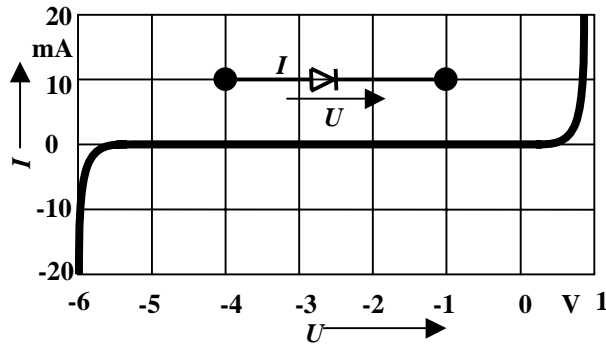
- Der Zusammenhang zwischen dem Strom  $I$  und der Spannung  $U$  kann in einem Kennlinienfeld dargestellt werden
  - ⇒ X-Achse: Spannung  $U$
  - ⇒ Y-Achse: Strom  $I$
- Ist der Proportionalitätsfaktor  $G$  konstant, so spricht man von einem *linearen* Widerstand
- Beispiel: metallische Leiter sind lineare Widerstände; er ist
  - ⇒ proportional zur Länge  $l$
  - ⇒ umgekehrt proportional zur Fläche  $A$
  - ⇒ abhängig vom Material

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad [\rho] = \Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$$



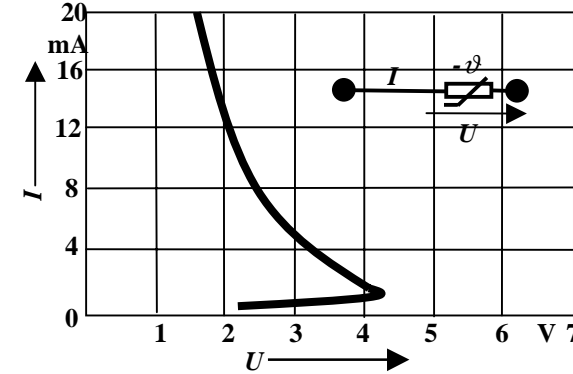
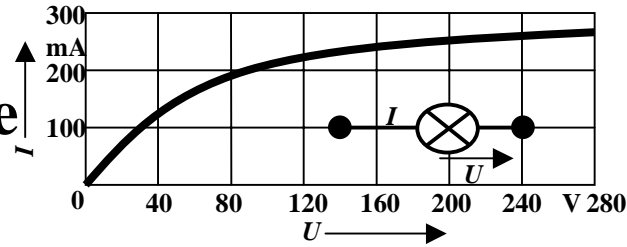
# Kennlinien verschiedener Bauelemente

**Diode**



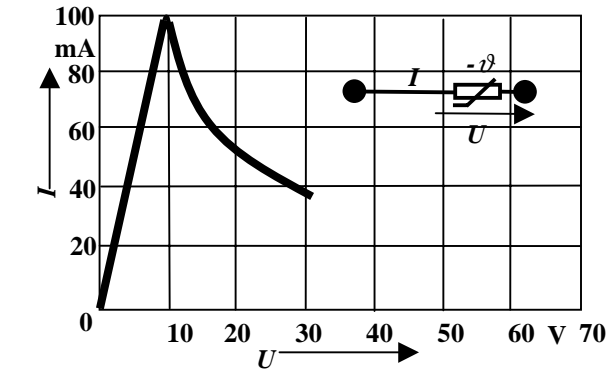
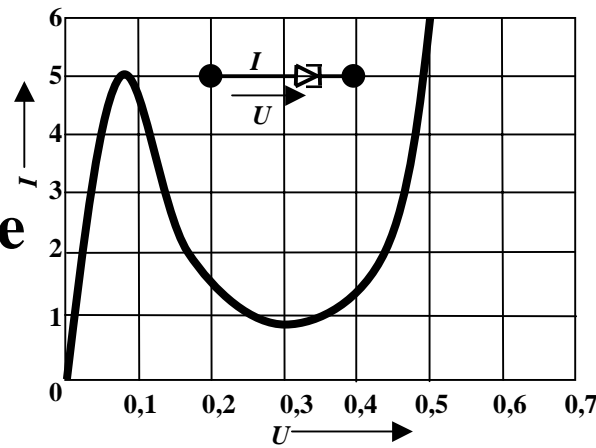
**Glimm-  
lampe**

**Glühbirne**



**Heiß-  
leiter**

**Tunneldiode**



**Kalt-  
leiter**



# Arbeit und Leistung des elektrischen Stroms



- Elektrische Arbeit  $W$  wird verrichtet, wenn eine Ladung  $Q$  von einem Potenzial  $\varphi_1$  zu einem Potenzial  $\varphi_2$  transportiert wird

$$\begin{aligned}W &= q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = Q \cdot U \\ &= I \cdot t \cdot U \\ &= I^2 \cdot R \cdot t\end{aligned}$$

- Die Einheit der elektrischen Arbeit ist Joule (J)

$$1\text{J} = 1\text{Ws} = 1\text{AVs}$$

- Mit  $[\text{V}] = \text{Nm/C}$  und  $[\text{A}] = \text{C/s}$  gilt

$$1\text{J} = 1\text{AVs} = 1 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{C}} \cdot \frac{\text{C}}{\text{s}} \cdot \text{s} = 1 \text{Nm}$$

- Die elektrische Leistung  $P$  entspricht der (elektrischen) Arbeit pro Zeiteinheit

$$P = \frac{W}{t} = U \cdot I = I^2 R = \frac{U^2}{R}$$

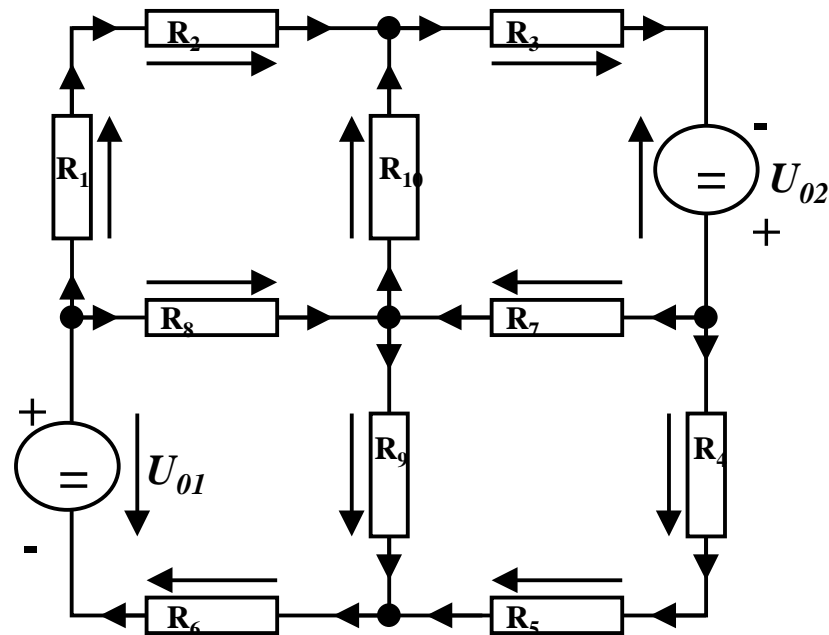
- Die Einheit der elektrischen Leistung ist Watt (W)

$$1\text{W} = 1\text{VA}$$

# Die Kirchhoffschen Sätze



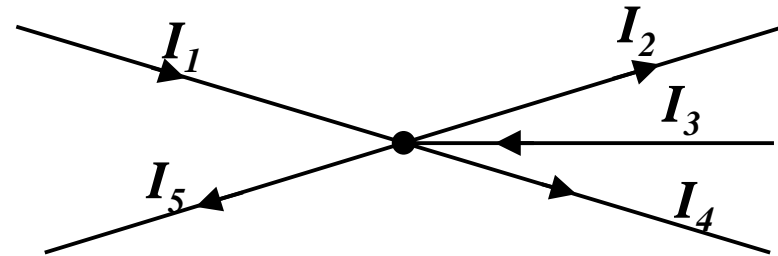
- Nur selten wird an einem Stromerzeuger  $G$  nur ein einzelner Verbraucher  $R$  angeschlossen
- Eine Anordnung aus Spannungsquellen und Verbrauchern heißt Netz
- Es besteht aus Knoten und Maschen
  - ⇒ Knoten: Verzweigungspunkte
  - ⇒ Masche: Pfad, bei dem kein Knoten mehrfach durchlaufen wird
- Richtung der Pfeile (Vorzeichen)
  - ⇒ Spannung ist von Plus nach Minus gerichtet
  - ⇒ Strom fließt von Plus nach Minus



# Knotenregel (1. Kirchhoffscher Satz)



- In einem Knoten ist die Summe aller Ströme Null
  - ⇒ An keiner Stelle des Netzes werden Ladungen angehäuft
- Definition der Stromrichtung für die mathematische Formulierung
  - ⇒ zufließende Ströme werden mit einem **positiven** Vorzeichen behaftet
  - ⇒ abfließende Ströme werden mit einem **negativen** Vorzeichen behaftet



$$0 = I_1 - I_2 + I_3 - I_4 - I_5$$

oder

$$I_2 + I_4 + I_5 = I_1 + I_3$$

allgemein

$$\sum_{i=0}^n I_i = 0$$

# Maschenregel (2. Kirchhoffscher Satz)



- Bei einem geschlossenen Umlauf einer Masche ist die Summe aller Spannungen Null

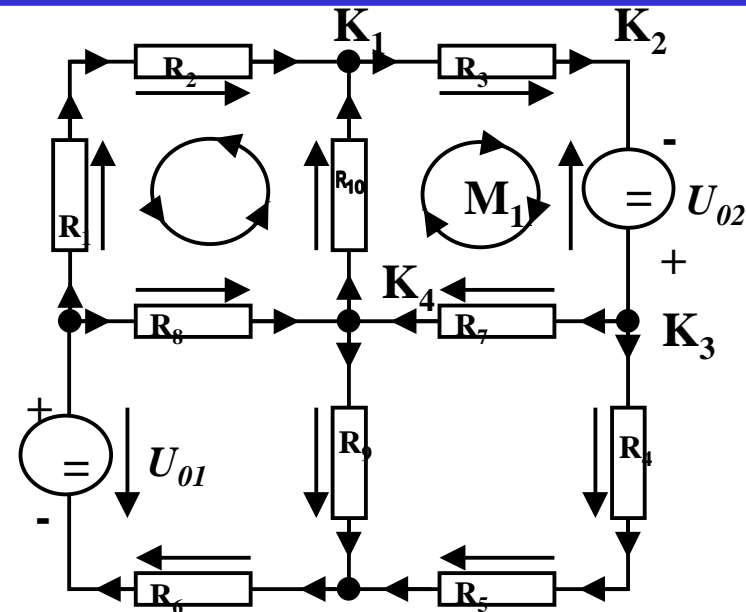
⇒ die Spannungsquellen erzeugen die Spannungen  $U_{01}$  und  $U_{02}$

⇒ durch die Widerstände fließt ein Strom

⇒ nach dem Ohmschen Gesetz gilt für die Spannung

$$U = R \cdot I$$

⇒ die Knotenpunkte  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  und  $K_4$  können deshalb unterschiedliches Potenzial besitzen



$$\varphi_2 - \varphi_1 = U_{K_{12}}$$

$$\varphi_3 - \varphi_2 = U_{K_{23}} = U_{02}$$

$$\varphi_4 - \varphi_3 = U_{K_{34}}$$

$$\varphi_1 - \varphi_4 = U_{K_{14}}$$

# Maschenregel (2. Kirchhoffscher Satz)



- Werden die Potenzialdifferenzen addiert, so folgt:

$$\varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_3 - \varphi_2 + \varphi_4 - \varphi_3 + \varphi_1 - \varphi_4 = 0$$

$$U_{K_{12}} + U_{K_{23}} + U_{K_{34}} + U_{K_{14}} = 0$$

- Vorzeichen der Spannung

⇒ die Spannungsrichtung der Quellen ist vorgegeben  
(von + nach -)

⇒ Umlaufrichtung der Masche wird festgelegt

⇒ Spannungspfeile gegen die Umlaufrichtung werden **negativ**  
gezählt

⇒ Spannungspfeile mit der Umlaufrichtung werden **positiv**  
gezählt

$$U_{K_{12}} - U_{02} + U_{K_{34}} + U_{K_{14}} = 0$$

$$U_{K_{12}} + U_{K_{34}} + U_{K_{14}} = U_{02}$$

# Anwendung 1: Knotenregel

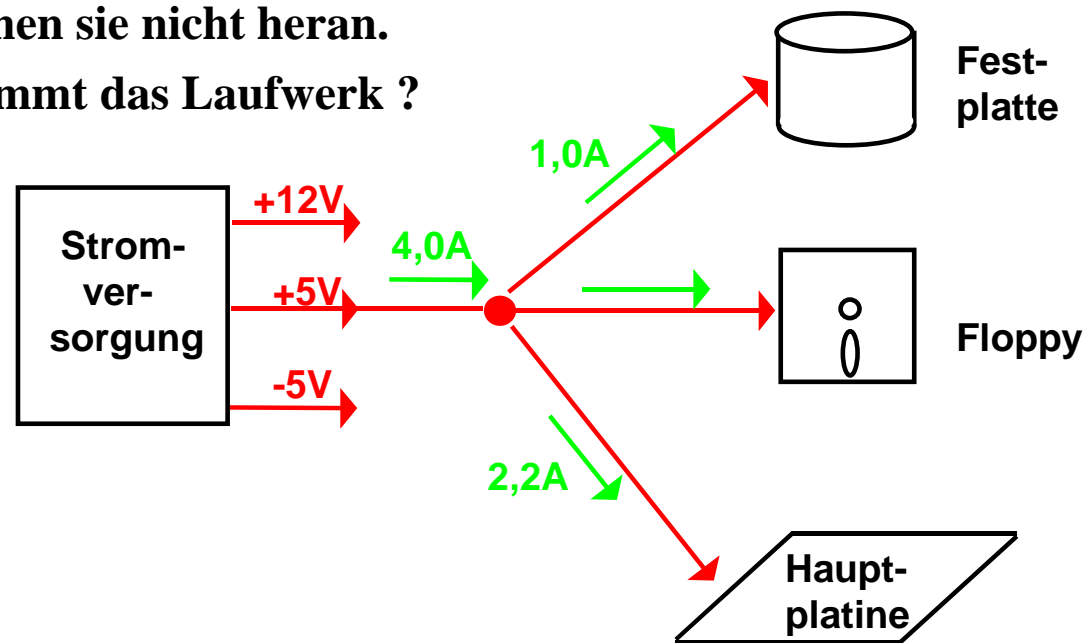
Sie haben einen neuen Personal Computer gekauft.

Sie benutzen ein Strommeßgerät (Ampere-Meter) und stellen damit fest, daß die 5 Volt Stromversorgung Ihres PC im eingeschalteten Zustand 4,0 A liefert. Versorgt wird damit die Hauptplatine, das Festplattenlaufwerk und das Floppy Laufwerk.

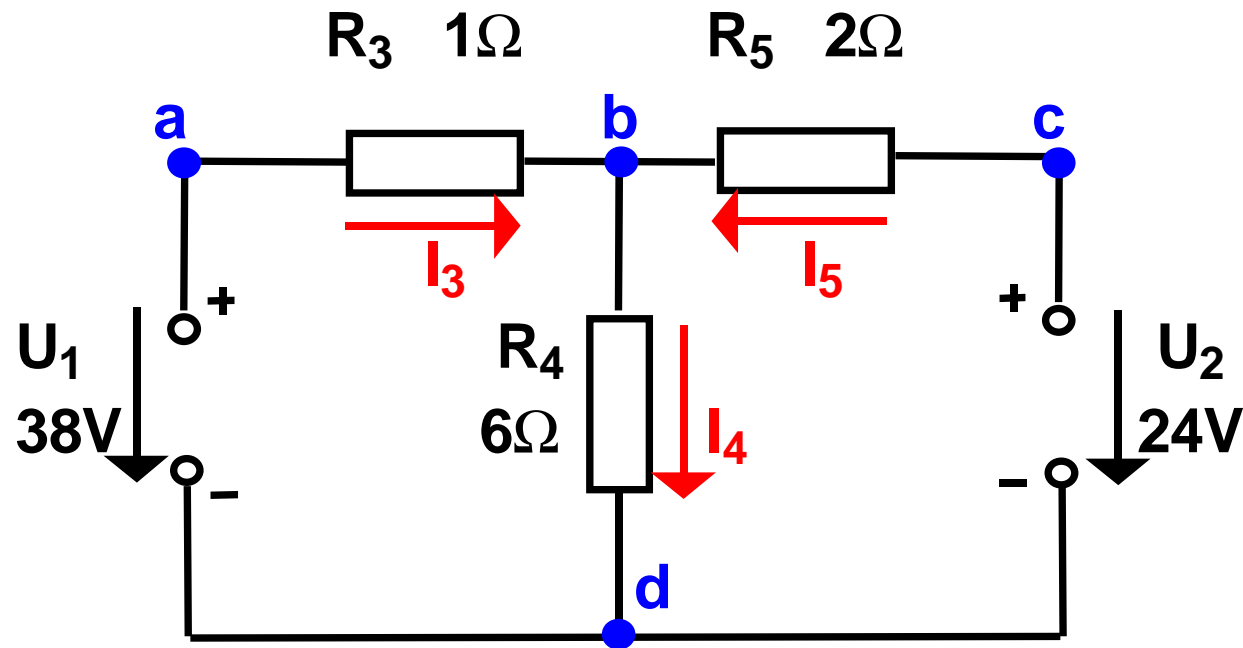
Sie messen, daß der Strom in die Hauptplatine 2,2 A beträgt und der Strom in die Festplatte 1,0 A.

An das Floppylaufwerk kommen sie nicht heran.

Wieviel Strom zu 5 Volt bekommt das Laufwerk ?



## Anwendung 2: Knoten- und Maschenregel



○ Gesucht sind  $I_3$ ,  $I_4$  und  $I_5$

○ Knotenregel:  $\sum I_b = +I_3 - I_4 + I_5 = 0$

○ Maschenregel:  $\sum U_{abd} = U_1 - I_3 R_3 - I_4 R_4 = 0$

$\sum U_{cbd} = U_2 - I_5 R_5 - I_4 R_4 = 0$

$$I_3 - I_4 + I_5 = 0$$

$$1 \cdot I_3 + 6 \cdot I_4 = 38$$

$$2 \cdot I_5 + 6 \cdot I_4 = 24$$

# Substitutionsmethode

---

$$I_3 + I_5 = I_4$$

$$I_4 = 8 - 3 = 5$$

$$1 \cdot I_3 + 6 \cdot (I_3 + I_5) = 38$$

$$2 \cdot I_5 + 6 \cdot (I_3 + I_5) = 24$$

---

$$(1+6) \cdot I_3 + 6 \cdot I_5 = 38$$

$$6 \cdot I_3 + (6+2) \cdot I_5 = 24$$

---

$$I_3 = \frac{38 - 6 \cdot I_5}{7}$$

$$I_3 = \frac{38 - (6 \cdot -3)}{7} = \frac{38 + 18}{7} = \frac{56}{7} = 8$$

$$6 \cdot \frac{38 - 6 \cdot I_5}{7} + 8 \cdot I_5 = 24$$

$$6 \cdot 38 - 36 \cdot I_5 + 56 \cdot I_5 = 24 \cdot 7$$

$$20 \cdot I_5 = 168 - 228$$

$$I_5 = -\frac{60}{20} = -3$$

**Negatives Vorzeichen,  
da falsche Annahme der  
Stromrichtung**



# Lösung über Determinanten

## System von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}X_1 & + & a_{12}X_2 & + & a_{13}X_3 & + & \cdots & a_{1n}X_n & = & b_1 \\ a_{21}X_1 & + & a_{22}X_2 & + & a_{23}X_3 & + & \cdots & a_{2n}X_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ a_{n1}X_1 & + & a_{n2}X_2 & + & a_{n3}X_3 & + & \cdots & a_{nn}X_n & = & b_n \end{array}$$

## Determinante der Koeffizienten des Gleichungssystems

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

## Cramersche Regel

$$X_1 = \frac{1}{D} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{D_1}{D}$$

# Berechnung von Determinanten

---

## ○ Determinante 2. Ordnung

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

## ○ Determinante 3. Ordnung

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

# Berechnung von Determinanten

## ○ Determinante 4. Ordnung

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{41} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

# Für das Beispiel

## ○ Gleichungssystem

$$I_3 - I_4 + I_5 = 0$$

$$I_3 + 6 \cdot I_4 = 38$$

$$6 \cdot I_4 + 2 \cdot I_5 = 24$$

## ○ Determinate D

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 6 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 6 \cdot 1$$

$$- 1 \cdot 6 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 \cdot 2 - 0 \cdot 6 \cdot 1$$

$$= 12 + 6 + 2 = 20$$

## ○ Für $I_5$

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & 38 \\ 0 & 6 & 24 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 6 \cdot 24 + (-1) \cdot 38 \cdot 0 + 1 \cdot 6 \cdot 0$$

$$- 0 \cdot 6 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 \cdot 24 - 38 \cdot 6 \cdot 1$$

$$= 6 \cdot 24 + 24 - 38 \cdot 6 = 144 + 24 - 228 = -60$$

$$I_5 = \frac{D_5}{D} = \frac{-60}{20} = -3$$

# Sonderfall 1: Parallelschaltung von Widerständen

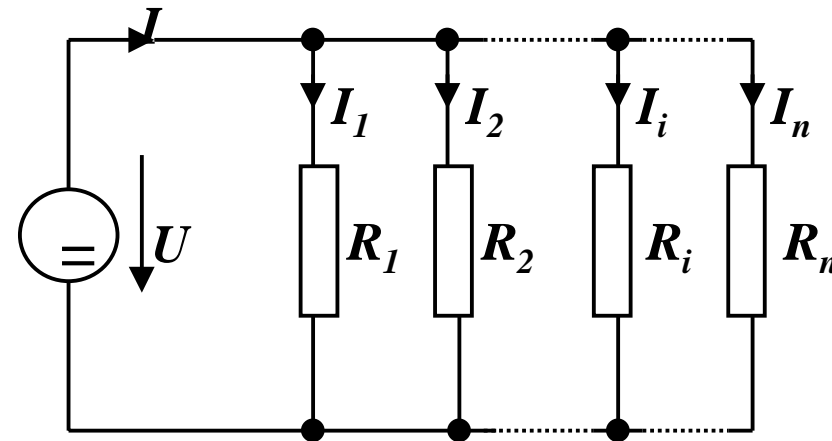


- Für die Teilströme  $I_1, I_2, \dots, I_n$  gilt:

$$I_1 = \frac{U}{R_1}, I_2 = \frac{U}{R_2}, \dots, I_n = \frac{U}{R_n}$$

- Nach der Knotenregel ist der Gesamtstrom:

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + \dots + I_n \\ &= \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \dots + \frac{U}{R_n} \\ &= U \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right) \end{aligned}$$



- Der Ersatzwiderstand der gesamten Schaltung berechnet sich durch:

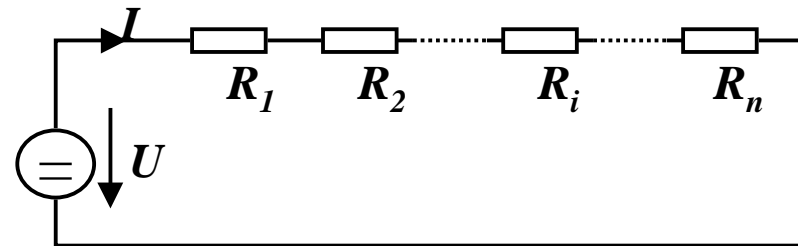
$$\frac{1}{R_{gesamt}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

## Sonderfall 2: Serienschaltung von Widerständen



- Für die Spannungen  $U_1, U_2, \dots, U_n$  an den Widerständen gilt:

$$U_1 = I \cdot R_1, U_2 = I \cdot R_2, \dots, U_n = I \cdot R_n$$



- Nach Maschenregel ist die Gesamtspannung:

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 + \dots + U_n \\ &= I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + \dots + I \cdot R_n \\ &= I \cdot (R_1 + R_2 + \dots + R_n) \end{aligned}$$

- Der Ersatzwiderstand der gesamten Schaltung berechnet sich durch:

$$R_{\text{gesamt}} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

# Sonderfall 3: Spannungsteiler

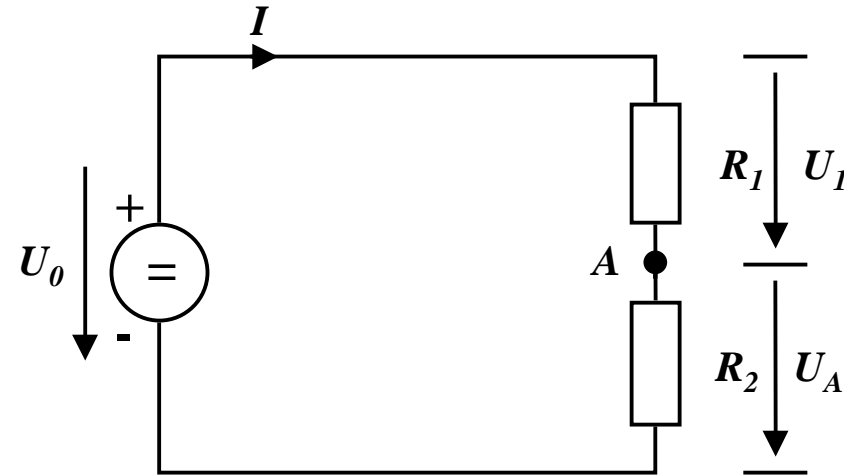


- **Reihenschaltung von zwei Widerständen**
- **Für das Verhältnis der Spannungen  $U_1$  und  $U_2$  gilt:**

$$I = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_A}{R_2} \Rightarrow \frac{U_1}{U_A} = \frac{R_1}{R_2}$$

- **Ist  $U_0$ ,  $R_1$  und  $R_2$  gegeben, so folgt für  $U_A$ :**

$$\begin{aligned} \frac{U_1}{U_A} = \frac{R_1}{R_2}, U_1 = U_0 - U_A &\Rightarrow \frac{U_0 - U_A}{U_A} = \frac{R_1}{R_2} \\ \Rightarrow \frac{U_0}{U_A} - \frac{U_A}{U_A} = \frac{R_1}{R_2} &\Rightarrow U_A = \frac{U_0}{\frac{R_1}{R_2} + 1} \\ \Rightarrow \frac{U_0}{U_A} = \frac{R_1}{R_2} + 1 & \end{aligned}$$



# Sonderfall 4: Potentiometerschaltung

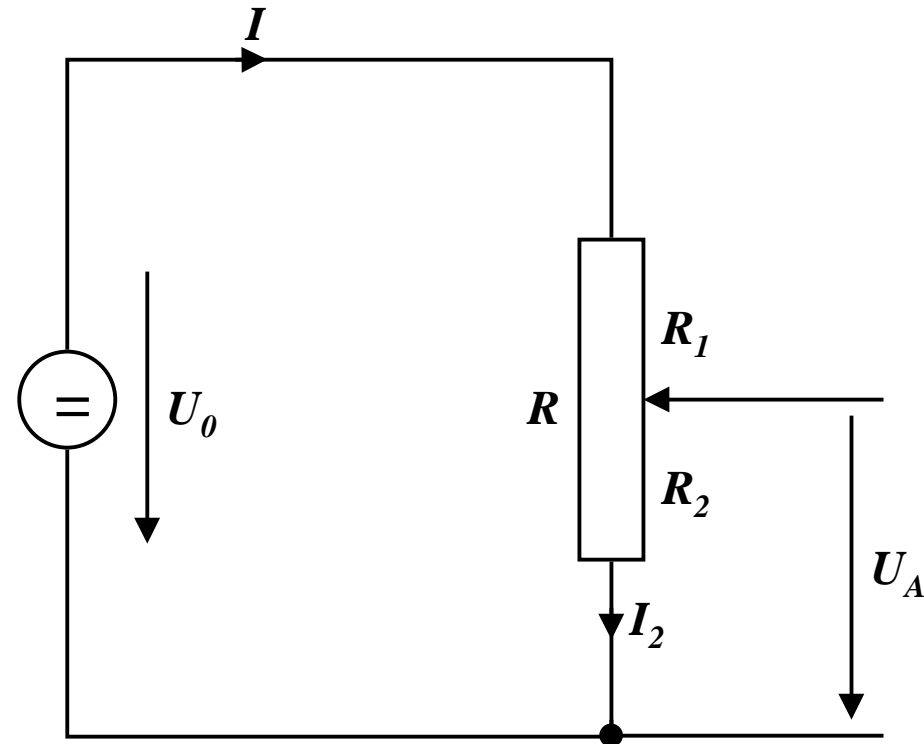


- Bei einem Potentiometer gilt zusätzlich:

$$R_1 = R - R_2$$

- Damit folgt:

$$\begin{aligned} U_A &= \frac{U_0}{\frac{R_1}{R_2} + 1} \\ &= \frac{U_0}{\frac{R - R_2}{R_2} + 1} \\ &= \frac{U_0}{\frac{R - R_2 + R_2}{R_2}} = \frac{U_0}{\frac{R}{R_2}} = U_0 \cdot \frac{R_2}{R} \end{aligned}$$





# Graphische Bestimmung des Arbeitspunkts

- **Praktische Anwendung bei nichtlinearen Kennlinien**

⇒ **Dioden, Transistoren**

- **Vorgehen:**

**1. Kennlinie für R2 einzeichnen**

**2. Kennlinie für R1 in das selbe Diagramm einzeichnen**

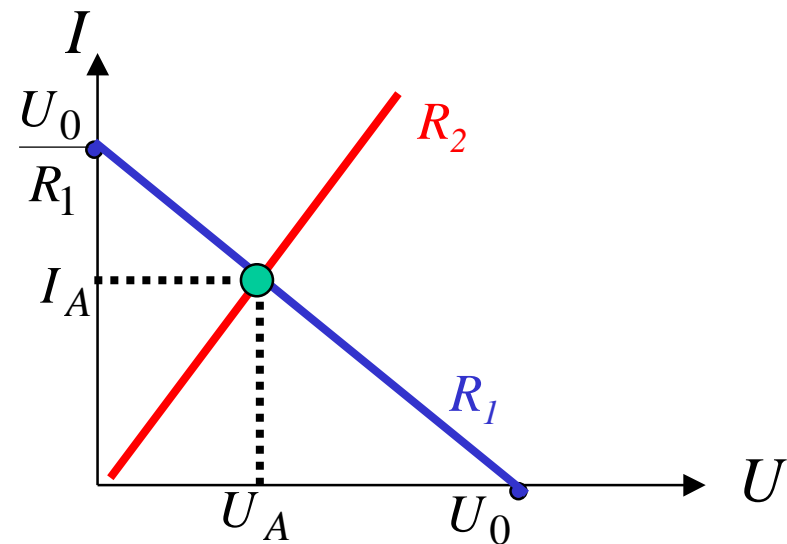
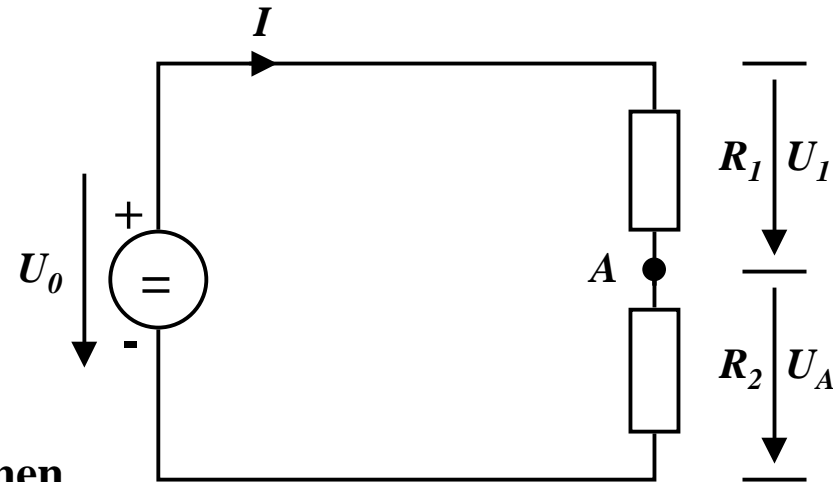
$$I = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_0 - U_A}{R_1}$$

**2 Punkte:**

$$U_A = 0 \Rightarrow I = \frac{U_0}{R_1}$$

$$U_A = U_0 \Rightarrow I = 0$$

**3. Schnittpunkt A ergibt den Arbeitspunkt mit Spannung  $U_A$  und Strom  $I_A$**

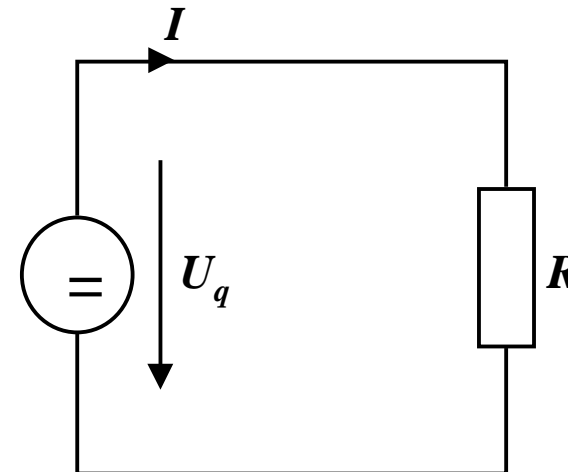


# Quellen- und Klemmenspannung

- **Ideale Spannungsquelle:**

⇒ nach dem Ohmschen Gesetz

$$\lim_{R \rightarrow 0} I = \infty$$

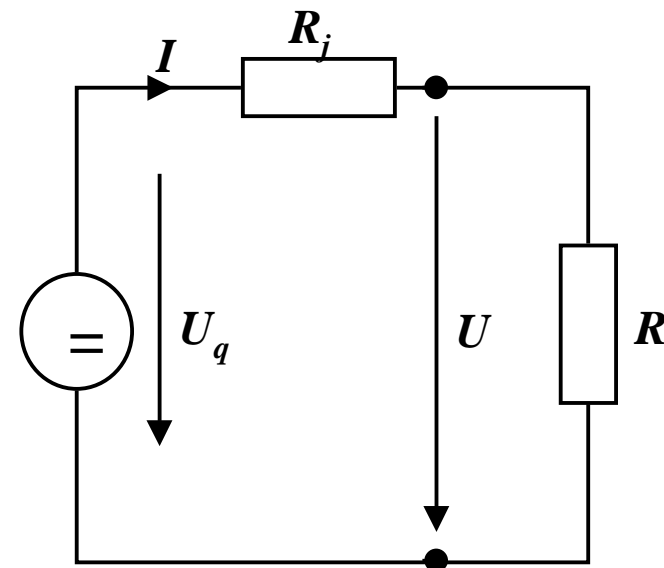


- **Eine reale Spannungsquelle kann durch Hinzufügen eines Innenwiderstands modelliert werden**

⇒ die abgreifbare Spannung heißt **Klemmenspannung**

$$U = U_q - I \cdot R_i$$

$$I = \frac{U_q}{R + R_i}$$

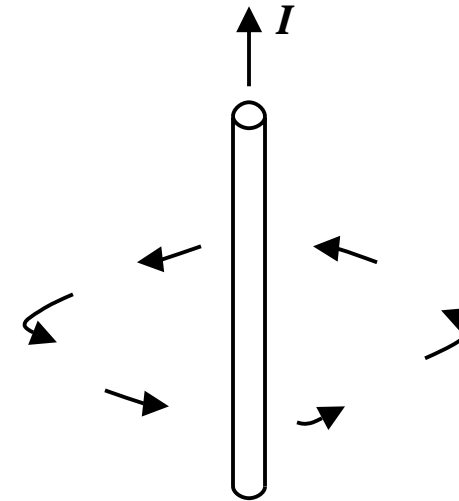


## 2.3 Elektromagnetisches Feld



### ○ Versuch von Oerstedt (1819/1820)

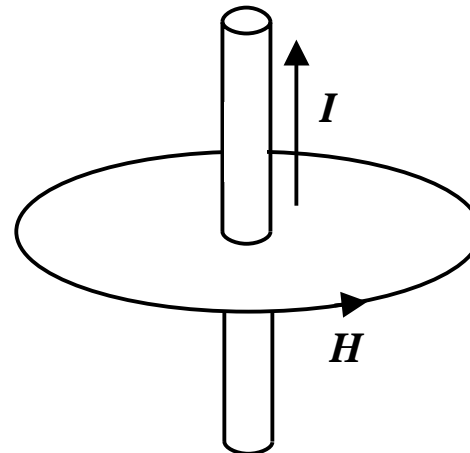
- ⇒ in der Nähe eines stromdurchflossenen Leiters werden Magnetnadeln abgelenkt
- ⇒ alle Magnetnadeln richten sich kreisförmig aus
- ⇒ alle Magnetnadeln haben den gleichen Drehsinn



# Magnetische Feldlinien



- Das magnetische Feld wird wie das elektrische Feld anschaulich durch Feldlinien beschrieben
  - ⇒ die magnetischen Feldlinien umschließen den Leiter ringförmig
  - ⇒ Feldlinien sind konzentrisch um den Leiter angeordnet
- Für die Richtung der Feldlinien gilt die Rechte-Hand-Regel:
  - ⇒ zeigt der Daumen der rechten Hand in Richtung des Stromes im Leiter, so zeigen die Finger, die den Leiter umfassen in Richtung der Feldlinien



# Magnetische Feldstärke



- Grad der Auslenkung der Magnetnadeln als Maß für die Kraft

⇒ Kraft  $F$  proportional zur magnetischen Feldstärke  $H$

$$F \sim H$$

⇒ die magnetische Feldstärke  $H$  ist proportional zum Strom  $I$

$$H \sim I$$

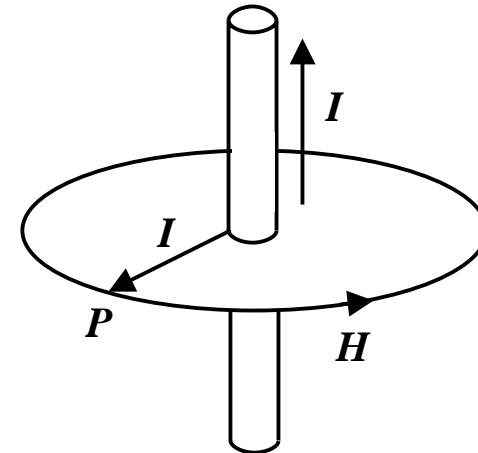
⇒ die magnetische Feldstärke  $H$  ist umgekehrt proportional zum Abstand  $r$

$$H \sim \frac{1}{r}$$

- Die Konstante wird  $\frac{1}{2\pi}$  gesetzt

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

$$[H] = \frac{[I]}{[l]} = \frac{A}{m}$$

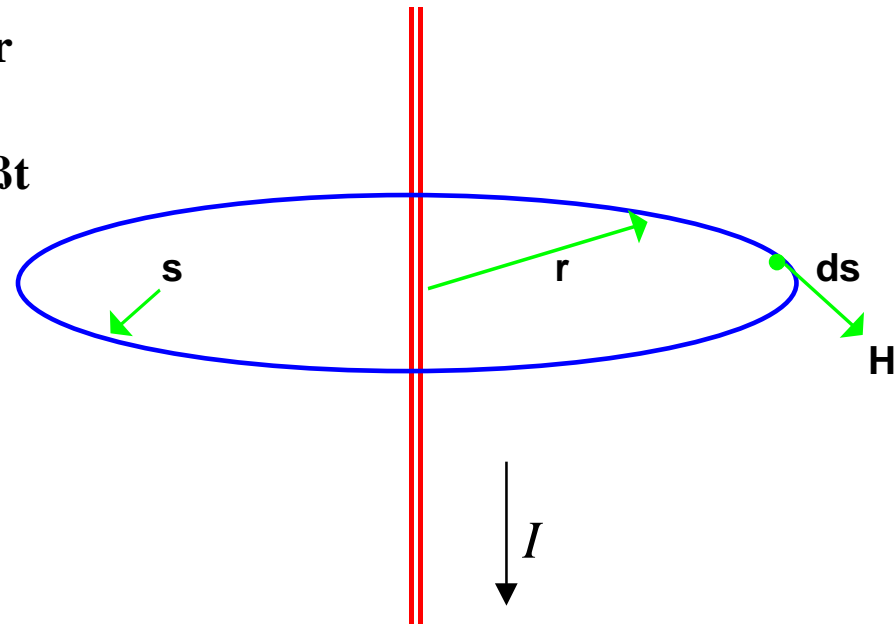


# Das Durchflutungsgesetz

- Zusammenhang zwischen dem magnetischen Feld und dem verursachenden elektrischen Strom
  - ⇒  $A$  = Kreisfläche mit dem Radius  $r$
  - ⇒  $j$  = Strom, der durch das Teilelement  $dA$  der Fläche  $A$  fließt (Stromdichte)
  - ⇒  $s$  = geschlossener Weg (hier Kreisbahn, Radius  $r$ )
  - ⇒  $ds$  = kleines Teilstück von  $s$

$$\oint \vec{H} ds = \int_A j d\vec{A} = \sum_k I_k = I$$

(mathematisch: Linienintegral der magnetischen Feldstärke  $H$  längs des geschlossenen Weges  $s$  = "magnetische Umlaufspannung")



# Kraftwirkung magnetischer Felder auf stromdurchflossene Leiter



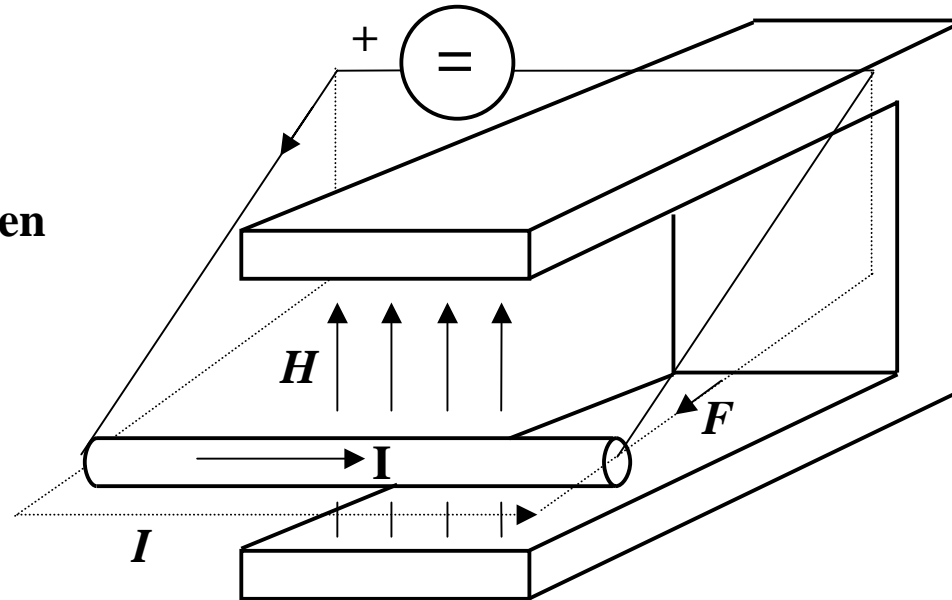
- Wechselwirkung zweier Magnetfelder
  - ⇒ Leiter
  - ⇒ Hufeisenmagnet
- Quantitative Untersuchungen ergeben:

$$F \sim I$$

$$F \sim l$$

$$F \sim H$$

$$F = \mu \cdot I \cdot l \cdot H$$



$l$	Länge des Drahtstücks
$H$	magnetisches Feld
$F$	Kraft
$I$	Strom

# Magnetische Induktion

---

- Man definiert die magnetische Induktion  $B$  über die Kraft  $F$
- Wenn der Draht senkrecht zur Feldrichtung steht gilt:
  - ⇒ Die magnetische Induktion  $B$  beträgt genau 1 Tesla (T), wenn ein 1m langer Draht die Kraft von 1N erfährt

$$\vec{F} = I \cdot l \cdot \vec{B}$$

- In Einheiten

$$[B] = \frac{[A]}{[I] \cdot [l]} = \frac{N}{A \cdot m} = \frac{V \cdot s}{m^2}$$



# Magnetische Feldstärke und Induktion

---



- Die magnetische Feldstärke  $H$  beschreibt die Ursache des magnetische Felds
  - ⇒ unabhängig von Materialeigenschaften
  - ⇒ wird verursacht durch einen Strom
- Die magnetische Induktion  $B$  beschreibt die Wirkung des magnetische Felds
  - ⇒ Kraft auf Eisenteile
  - ⇒ Kraft auf stromdurchflossenen Leiter
- Es gilt

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H}$$

# Permeabilität

○ **Proportionalitätsfaktor**  $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$

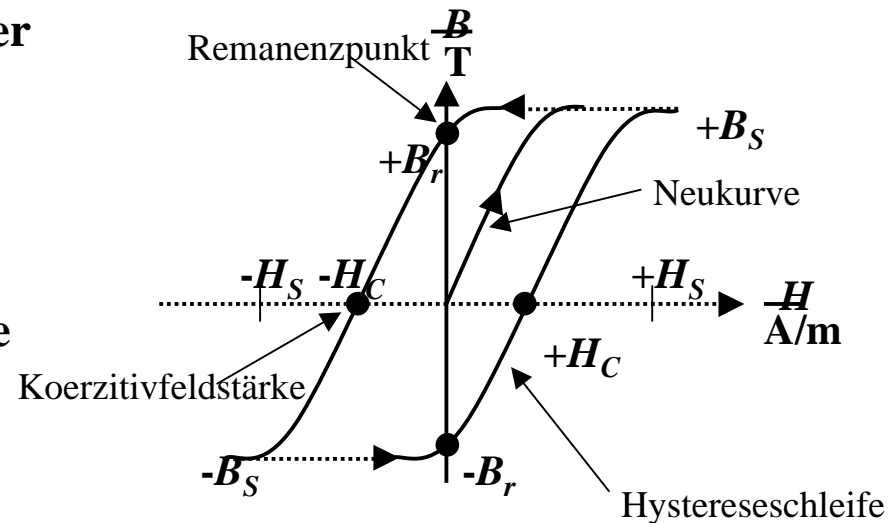
○ **Permeabilitätszahl  $\mu_r$ , beschreibt die magnetische Eigenschaft von Stoffen**

Stoff	Eigenschaft	Permeabilitätszahl $\mu_r$	Verhalten	Anwendung
Cu, Si, Bi, H <sub>2</sub> O	diamagnetisch	< 1	Abstoßung vom Magnetfeld	technisch nicht verwendbar
Al, Pt, Luft	paramagnetisch	> 1	Anziehung vom Magnetfeld	technisch nicht verwendbar
Cr, FeO <sub>2</sub>	antiferromagnetisch	= 1	unmagnetisch	technisch nicht verwendbar
Fe, Stähle, Legierungen	ferromagnetisch	10 <sup>1</sup> ...10 <sup>6</sup>	stark magnetisch	Transformatoren, elektrische Maschinen, magnetische Kreise
Ferrite	ferrimagnetisch	bis 3*10 <sup>3</sup>	stark magnetisch	Permanentmagnete, HF-Spulkerne

# Ferromagnetische Stoffe im Magnetfeld



- Die Permeabilität ist in Ferromagnetischen Stoffen nicht konstant
  - ⇒ Hysterese
- Erklärung: Drehprozesse kleiner Elementarmagneten im ferromagnetischen Material
  - ⇒ Zunächst nimmt die magnetische Induktion  $B$  proportional zur Feldstärke  $H$  zu (Neukurve)
  - ⇒  $B_s$  entspricht der Sättigung
  - ⇒ Auch nach Wegnahme des magnetischen Felds  $H$  bleibt der ein magnetische Induktion  $B_r$  bestehen
  - ⇒ Erst bei  $-H_c$  wird  $B$  wieder 0



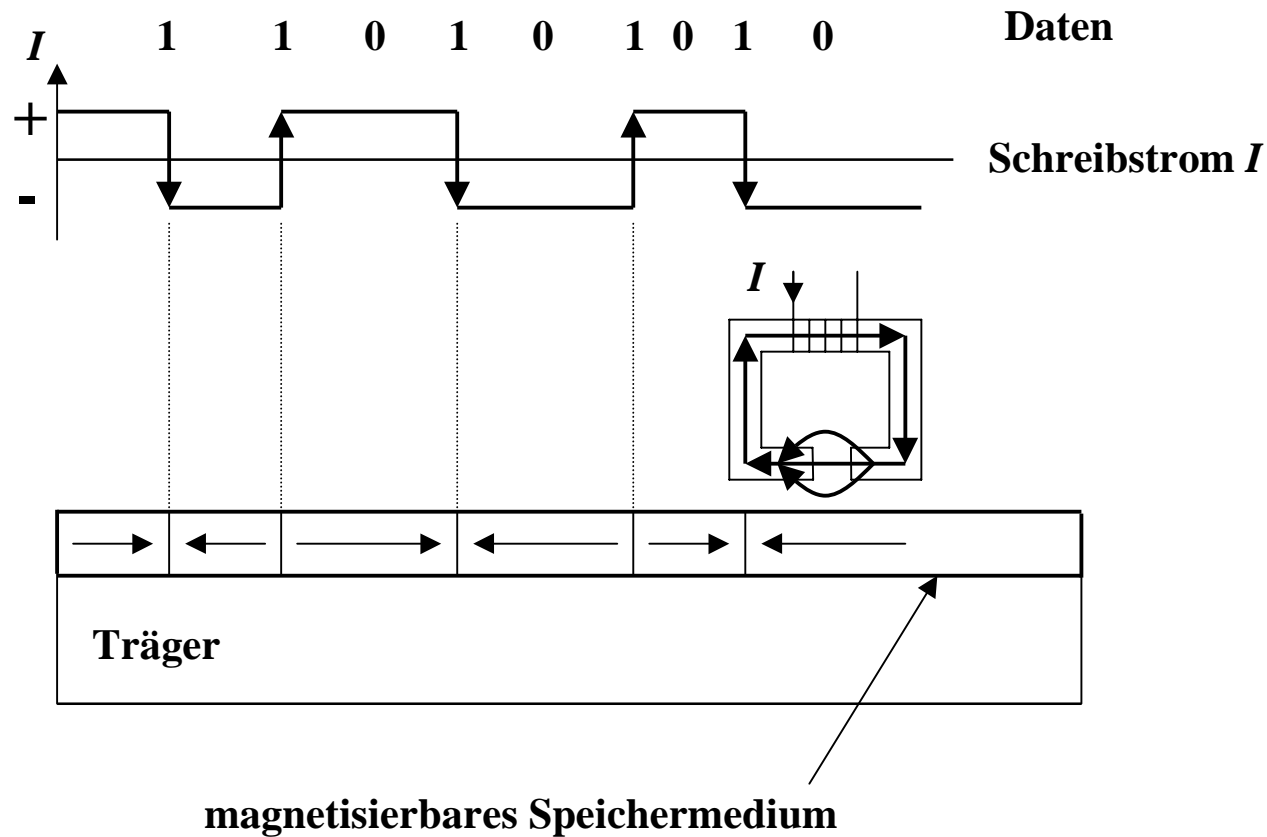
# Anwendung



○ Speicherung binärer Daten auf einem magnetischen Träger

○ FM-Verfahren

⇒ bei jeder „1“ wird die Schreibstromrichtung geändert



# Elektromagnetische Induktion



- Wird ein Stabmagnet in eine Spule eingebracht, so sieht man während der Bewegung einen Ausschlag am Voltmeter
- Wird der Stabmagnet wieder herausgezogen, schlägt das Voltmeter in die Gegenrichtung aus

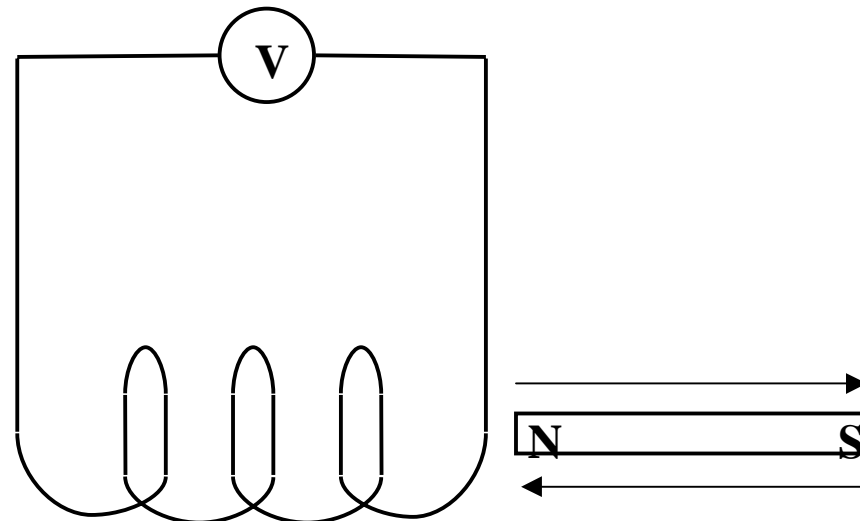
⇒ Eine Spannung  $U_i$  wird induziert

$$U_i \sim \frac{1}{\Delta t}$$

$$U_i \sim B$$

$$U_i \sim A$$

$$U_i \sim \frac{B \cdot A}{\Delta t}$$



# Magnetischer Fluß

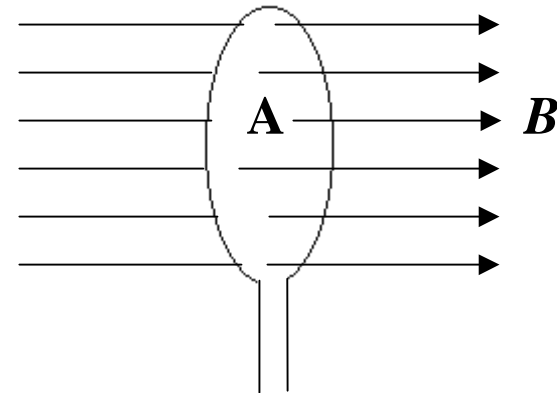
- Der magnetische Fluß  $\Phi$  entspricht anschaulich der Anzahl der Feldlinien, die durch eine Fläche gehen
- Die magnetische Induktion  $B$  ist die Dichte der Feldlinien

$$\Phi = B \cdot A$$

- Daraus folgt

$$U_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

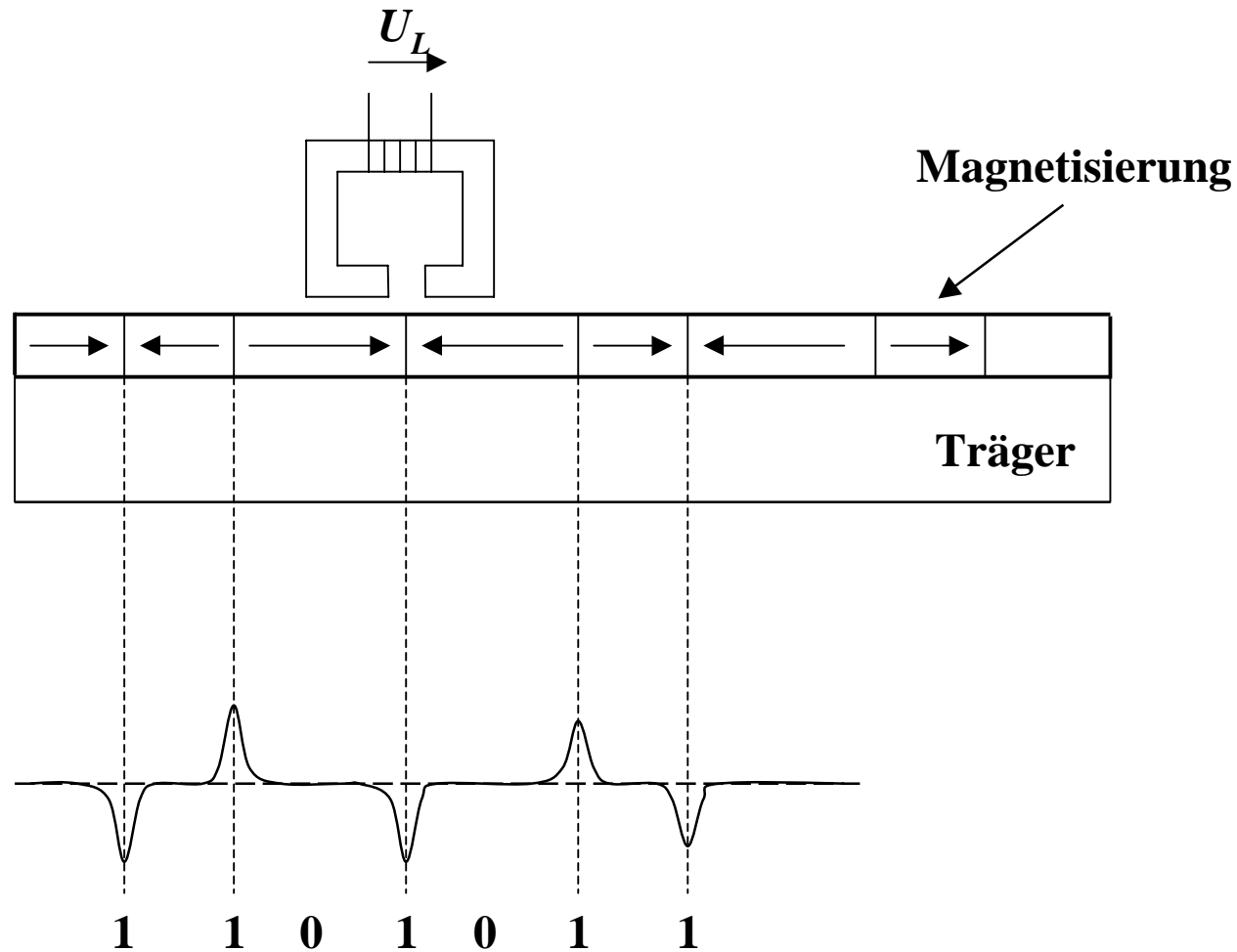
- Das Minuszeichen entspricht der Lenzschen Regel: *Die induzierte Spannung ist so gepolt, daß sie durch einen von ihr erzeugten Strom der Ursache des Induktionsvorgangs entgegen wirken kann*



# Anwendung

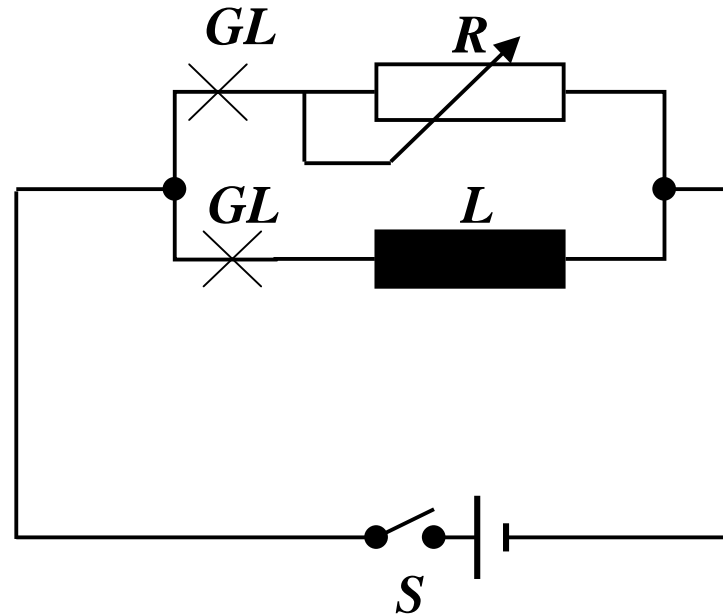


## ○ Lesen von Daten auf magnetischen Datenträgern



# Selbstinduktion

- In einer Spule ändert sich beim Einschalten der Fluß
  - ⇒ Die Flußänderung induziert in der selben Spule eine Gegenspannung
  - ⇒ Selbstinduktion
  - ⇒ Die Glühlampe im Stromkreis der Spule L erreicht ihre Helligkeit merklich später



- Es gilt:

$$U_i \sim \frac{dI}{dt}$$

$$U_i = -L \cdot \frac{dI}{dt}$$

- L ist die Induktivität der Spule

- L hängt ab von der Windungszahl N, der Spulenlänge l, der Fläche A und der Permeabilität  $\mu$

$$L = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{N^2 \cdot A}{l}$$

$$[L] = \frac{V \cdot s}{I} = H$$

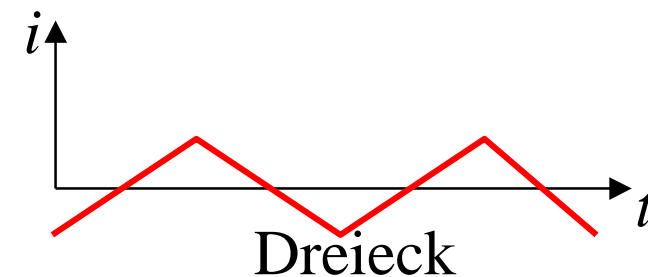
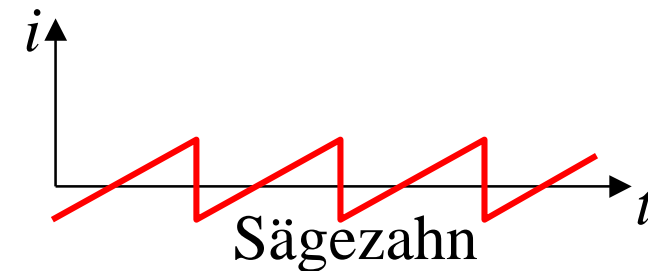
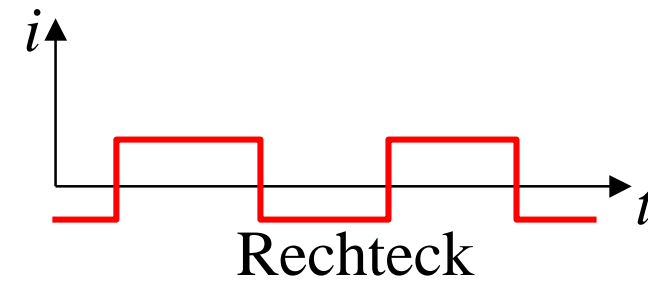
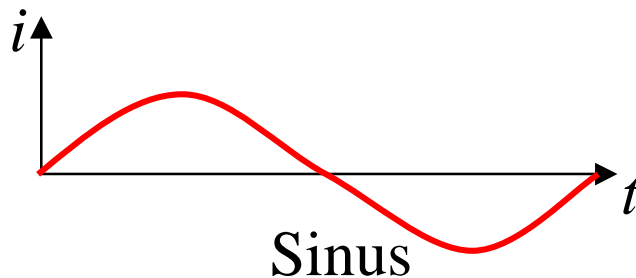


## 2.4 Wechselstromkreis



### ○ Unterschied zum Gleichstrom

- ⇒ Die Richtung und Stärke des Stroms ändert sich periodisch
- ⇒ Hier: Wechselstrom mit Mittelwert null (kein Gleichstromanteil)



# Wechselspannung und Wechselstrom

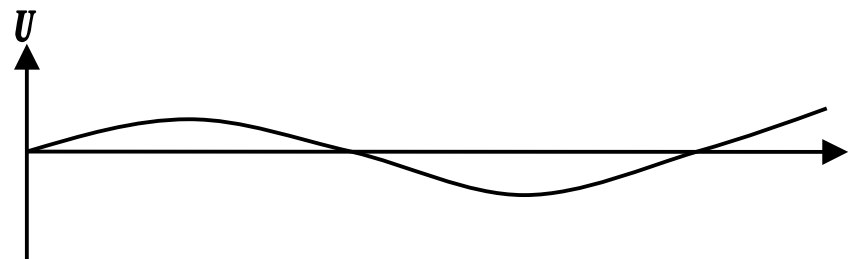
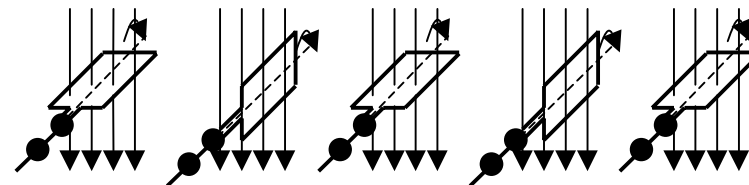
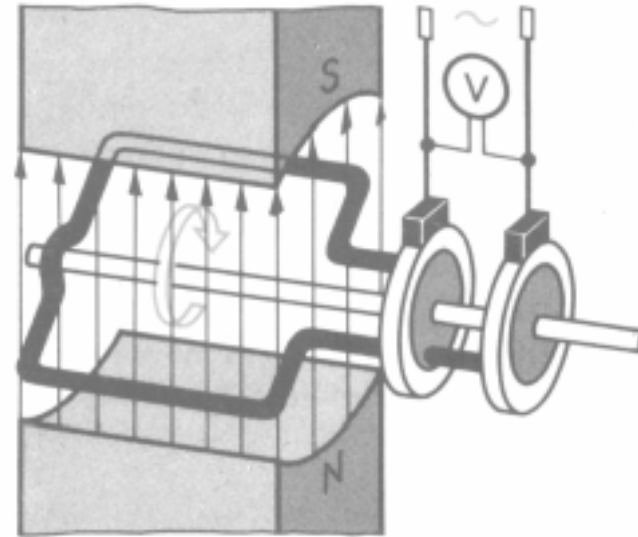
## ○ Anwendung des Induktionsgesetzes

- ⇒ In einem homogenen Magnetfeld dreht sich eine Schleife mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$
- ⇒ Der magnetische Fluß durch die Schleife beträgt

$$\Phi = B \cdot A \cdot \cos(\alpha)$$

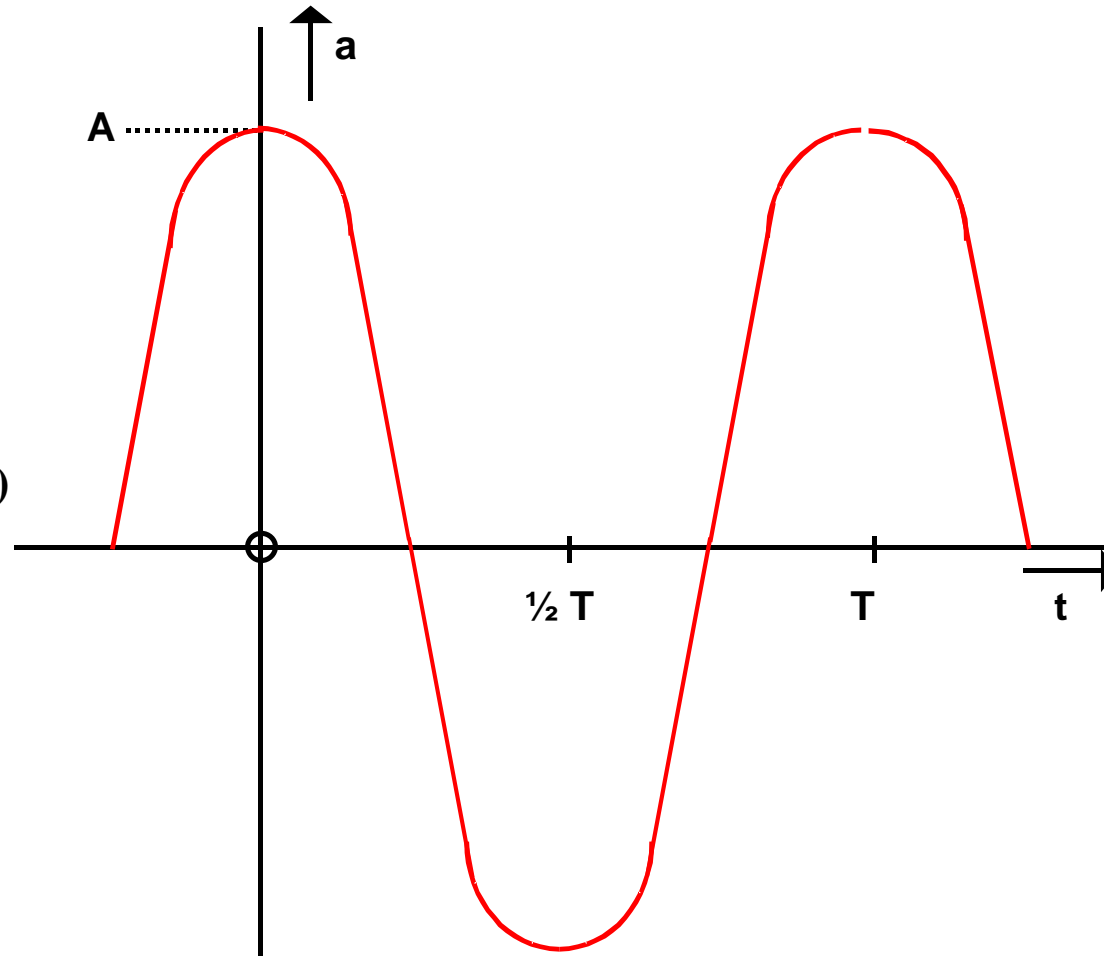
- ⇒  $\alpha$  entspricht dem Winkel der Feldlinien mit der Flächennormalen der Leiterschleife

$$\alpha = \omega \cdot t$$



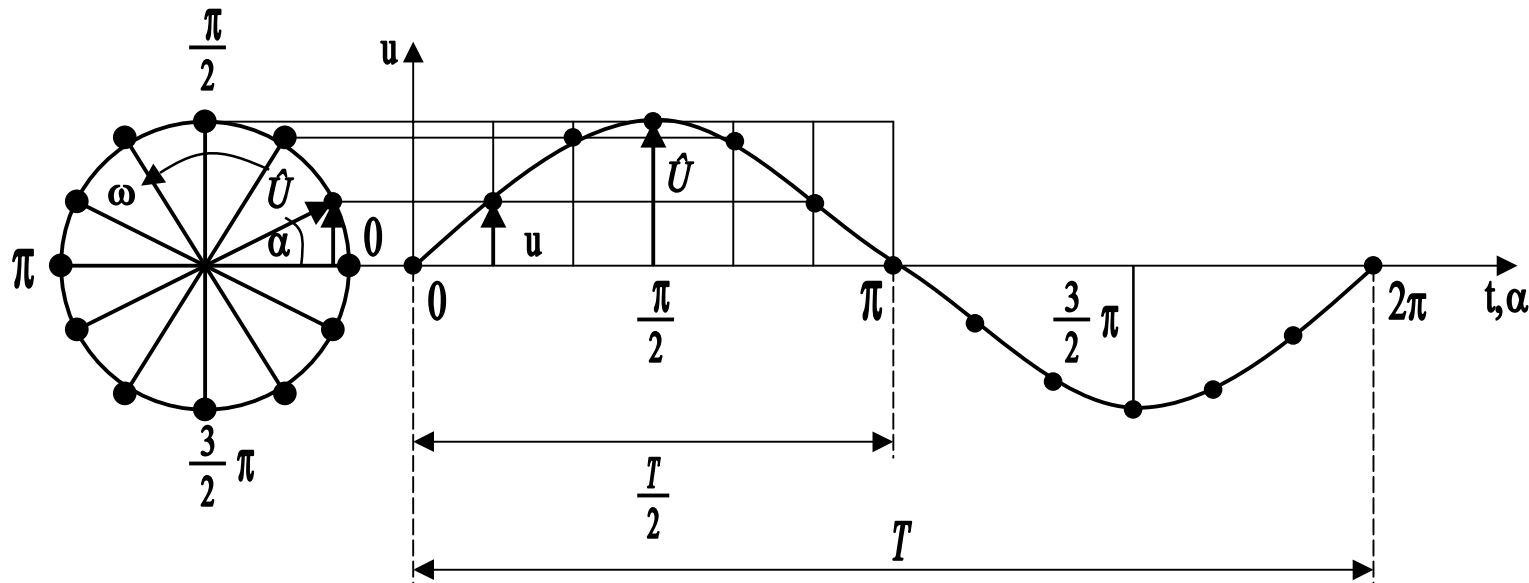
# Kennwerte einer Wechselgröße

- $a = A \cos \omega t$
- $\omega = 2\pi f$
- $f = 1/T$
- $a = \text{Funktionswert}$
- $A = \text{Scheitelwert}$
- $\omega = \text{Kreisfrequenz}$
- $t = \text{Zeit (Sekunden)}$
- $f = \text{Frequenz (Hertz)}$
- $T = \text{Periodendauer}$



# Zeiger- und Liniendiagramm

- Ein mit konstanter Winkelgeschwindigkeit im Gegenuhrzeigersinn umlaufender Zeiger bildet den Augenblickswert sinusförmiger Wechselgrößen ab
- Entstehung des Liniendiagramms aus dem Zeigerdiagramm

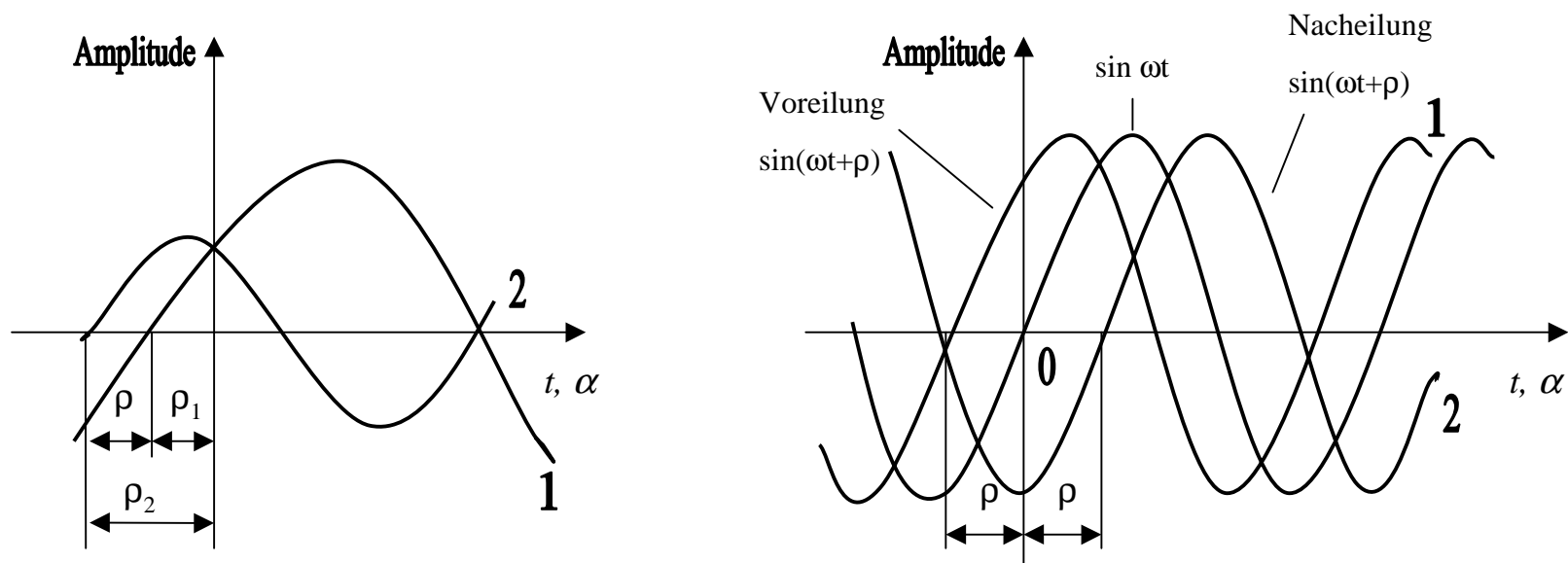


# Phasenverschiebung

- Differenz der Nullphasenwinkel zwischen mehreren Wechselgrößen

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

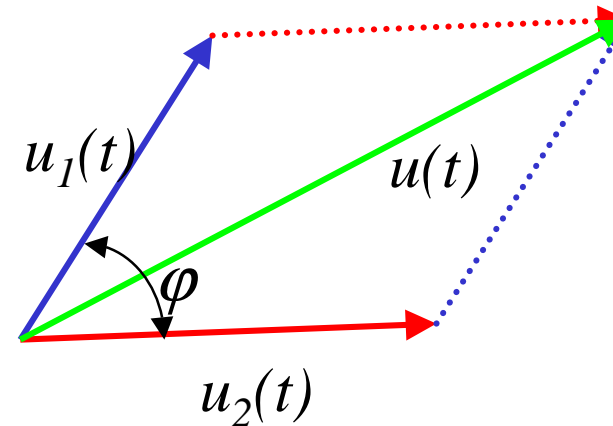
- Positiver Phasenwinkel oder Voreilung bedeutet die Verschiebung der Sinuswelle in negativer Richtung der Zeitachse



# Addition phasenverschobener Wechselspannungen

- Überlagerung zweier Wechselspannungen oder Wechselströme

⇒ Der resultierende Zeiger ist gleich der Diagonalen des aus den beiden Komponenten gebildeten Parallelogramms



$$\vec{u}(t) = \vec{u}_2(t) + \vec{u}_1(t)$$

- Das Ergebnis ist wieder eine Sinuskurve

⇒ sind die Komponenten gleich groß, so beträgt der Phasenwinkel der Resultierenden

$$\frac{\varphi}{2}$$

# Wechselspannung und Wechselstrom

---

- **Durch die Flußänderung wird eine Spannung induziert**

$$u(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(B \cdot A \cdot \cos \omega t)$$

$$u(t) = B \cdot A \cdot \omega \cdot \sin \omega t$$

- **Mit der maximalen Spannung**

$$\hat{u} = B \cdot A \cdot \omega$$

**Folgt für die Spannung  $u(t)$**

$$u(t) = u = \hat{u} \cdot \sin \omega t$$

- **Wird ein Widerstand  $R$  an die Wechselspannung angeschlossen, so entsteht ein Wechselstromkreis.**

- **In ihm fließt der Strom  $i$**

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{\hat{u}}{R} \cdot \sin \omega t = \hat{i} \cdot \sin \omega t$$

# Kennwerte von Wechselgrößen

- Beschreibung der mittleren Wirkung, unabhängig von der Kurvenform
- Linearer Mittelwert (Gleichstromanteil)

$$\bar{i} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt$$

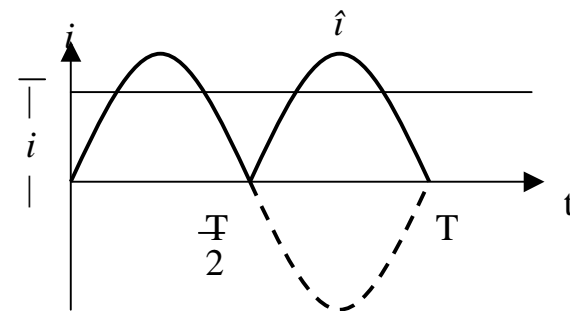
- Gleichrichtwert

- ⇒ Mittelwert des Betrags der der Wechselspannung
- ⇒ Integral über die Absolutwerte des Stroms

$$|\bar{i}| = \frac{1}{T} \int_0^T |i(t)| dt$$

- Für einen sinusförmigen Wechselstrom gilt

$$|\bar{i}| = \frac{1}{T} \int_0^T |\hat{i} \cdot \sin(\omega t)| dt = \frac{\hat{i} \cdot 2}{\pi} = 0,64 \cdot \hat{i}$$





# Kennwerte von Wechselgrößen

---

- Leistung des Gleichstroms  $P_{=} = U \cdot I = I^2 \cdot R$
- Effektivwert  $I_{eff}$  des Wechselstroms  $i(t)$ : Wert eines Gleichstroms  $I$  der an einem Widerstand  $R$  die gleiche Leistung freisetzt, wie  $i(t)$

⇒ Es gilt

$$P_{=} = I^2 \cdot R = R \cdot \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt$$

⇒ Daraus folgt  $I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt$   $I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$

- Für einen sinusförmigen Wechselstrom gilt

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \hat{i}^2 \sin^2(\omega t) dt} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}$$

- Entsprechend gilt für eine sinusförmige Wechselspannung

$$U_{eff} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$$

## 2.5 Schaltvorgänge



- **Ein- und Ausschalten einer Spannungsquelle**

- ⇒ Rechteckform oder Rechteckimpuls

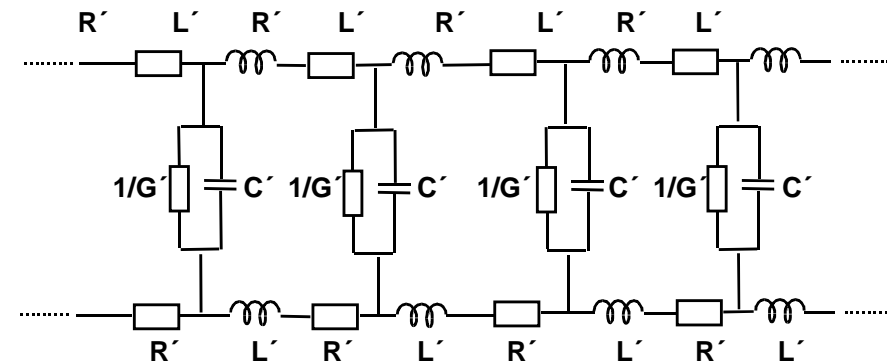
- **Anwendung**

- ⇒ Übertragung von Signalen auf Leitungen

- **Problem:**

- ⇒ Leitungswiderstände, Leitungsinduktivitäten und Leitungskapazitäten sind in der Regel nicht zu vernachlässigen

- ⇒ insbesondere bei hohen Frequenzen!



### Ersatzschaltbild für ein Leiterstück

$R'$  = Längswiderstand pro Meter Leitungslänge

$L'$  = Induktivität pro Meter Leitungslänge

$C'$  = Kapazität pro Meter Leitungslänge

$1/G'$  = Querwiderstand pro Meter Leitungslänge

$R', L', C' =$  Widerstands-, Induktivitäts-, Kapazitätsbelag

# Schaltverhalten an einem Widerstand

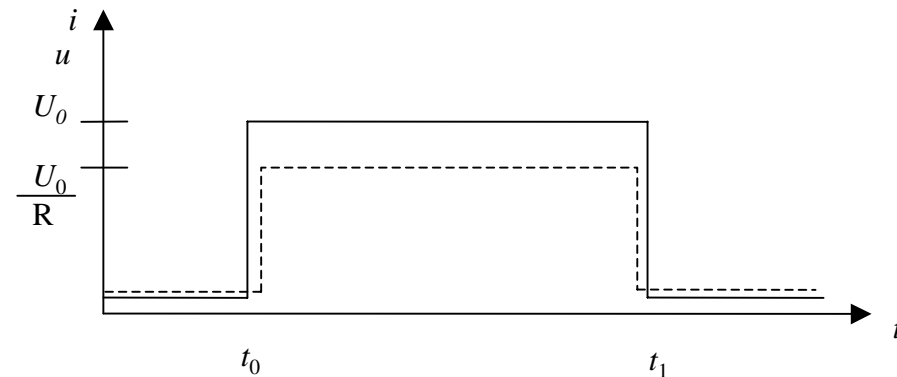
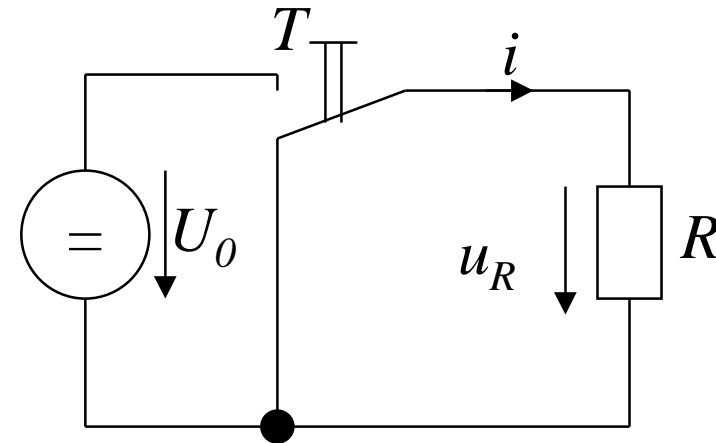


- **Stromkreis mit einem reinen Widerstand**
- **Zum Zeitpunkt  $t_0$  wird der Taster losgelassen**
- **Nach der Maschenregel gilt**

$$U_0 = i \cdot R$$

$$i = \frac{U_0}{R}$$

- **Daraus folgt:**
  - ⇒ **Der Strom ändert sich sprunghaft, wenn die Spannung den Wert  $U_0$  annimmt**
  - ⇒ **Der Strom ist sofort null, wenn die Spannung  $U_0$  abgeschaltet wird**



# Schaltverhalten an einer Kapazität



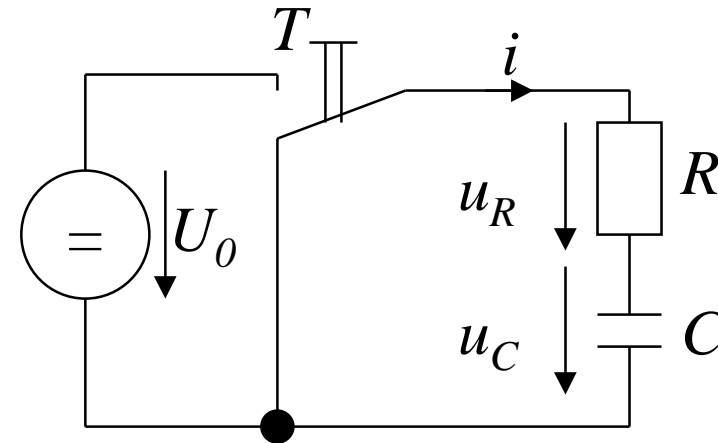
- **Reihenschaltung einer Kapazität  $C$  mit einem Widerstand  $R$**
- **Zum Zeitpunkt  $t_0$  wird der Taster  $T$  losgelassen**
  - ⇒ die Spannung steigt sprunghaft auf den Wert  $U_0$
  - ⇒ Nach der Maschenregel gilt

$$U_0 = u_R + u_C = i \cdot R + u_C$$

- **Der Ladestrom zum Zeitpunkt  $t_0$  ist dann**

$$U_0 = i_{t_0} \cdot R + 0$$

$$\Rightarrow i_{t_0} = \frac{U_0}{R}$$



- **Damit wird der Kondensator geladen,  $u_C$  wird ungleich Null und es folgt:**

$$i_{t_i} = \frac{U_0 - u_{C_{t_{i-1}}}}{R}$$

- **Für die Spannung  $u_C$  am Kondensator gilt:**

$$u_{C_{t_i}} = u_{C_{t_{i-1}}} + \frac{1}{C} \cdot i_{t_{i-1}} \cdot \Delta t$$

Sofern  $\Delta t$  hinreichen klein ist

# Schaltverhalten an einer Kapazität: Strom



- Der Ladestrom ist immer von der Differenz ( $U_0 - u_C$ ) abhängig:

$$U_0 = i \cdot R + \frac{1}{C} \cdot i \cdot \Delta t$$

$$\Rightarrow i = \frac{U_0}{R} - \frac{1}{R \cdot C} \cdot i \cdot \Delta t$$

- Die erste Ableitung ergibt

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot i$$

oder

$$\frac{di}{i} = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot dt$$

- Die Lösung dieser Differentialgleichung ist:

$$\ln i = -\frac{t}{RC} + \text{const.}$$

- Die Konstante ergibt sich durch die Anfangsbedingung

$$i_{t_0} = i_0 = \frac{U_0}{R}$$

- Damit gilt

$$\ln i = -\frac{t}{RC} + \ln \frac{U_0}{R}$$

oder

$$i = i_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

# Schaltverhalten an einer Kapazität: Spannung

---



- Für die Spannung gilt nach der Maschenregel

$$\begin{aligned}u_C &= U_0 - i \cdot R \\&= U_0 - i_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \cdot R \\&= U_0 - \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \cdot R \\&= U_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \right)\end{aligned}$$

# Schaltverhalten an einer Kapazität: Abschalten



- Für die Spannung gilt nach der Maschenregel

$$0 = i \cdot R + u_C$$

- Es gilt

$$i = \frac{dQ}{dt} = C \cdot \frac{du_C}{dt}$$

- Damit gilt

$$0 = C \cdot \frac{du_C}{dt} \cdot R + u_C$$

oder

$$\frac{du_C}{u_C} = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot dt$$

- Die Lösung der Gleichung lautet

$$u_C = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

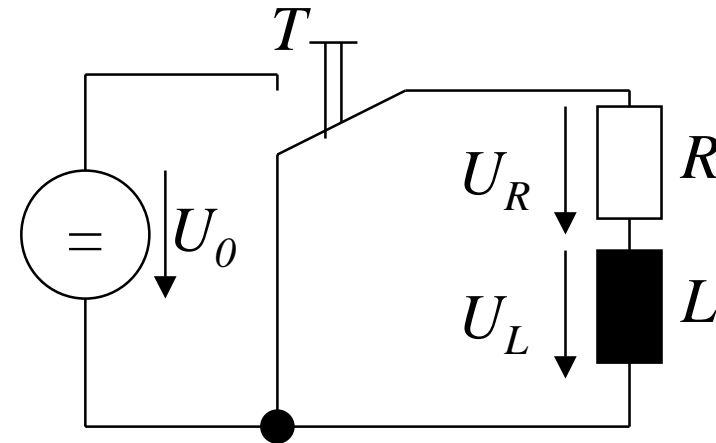
- Für den Strom gilt

$$\begin{aligned} 0 &= i \cdot R + U_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \\ \Rightarrow i &= -\frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \\ &= -i_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \end{aligned}$$

# Schaltverhalten an einer Induktivität



- Eine Spule und ein Widerstand werden in Reihe geschaltet
- Zum Zeitpunkt  $t_0$  wird der Taster  $T$  losgelassen
  - ⇒ Die Spannung steigt sprunghaft auf den Wert  $U_0$
  - ⇒ Der Innenwiderstand der Spule wird vernachlässigt



- Nach der Maschenregel gilt:

$$U_0 = u_R + u_L = i \cdot R + u_L$$

- Die Stromquelle verursacht einen veränderlichen Stromfluß

$$\frac{di}{dt}$$

der die Spannung  $u_i = -L \frac{di}{dt}$  induziert

- Damit folgt:

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$\Rightarrow i = \frac{1}{L} \int u_L \cdot dt$$

- Mit der Maschenregel gilt:

$$u_L = U_0 - \frac{R}{L} \int u_L \cdot dt$$



# Schaltverhalten an einer Induktivität

- Spannung an der Spule nach der Zeit ist

$$\frac{du_L}{dt} = -\frac{R}{L} \cdot u_L$$

oder

$$\frac{du_L}{u_L} = -\frac{R}{L} \cdot dt$$

- Analog zum Kondensator ist die Lösung dieser Gleichung

$$u_L = U_0 \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

- Für den Strom  $i$  gilt:

$$\begin{aligned} i &= \frac{U_0}{R} - \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \\ &= \frac{U_0}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \right) \\ &= I \left( 1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \right) \end{aligned}$$

# Schaltverhalten an einer Induktivität: ausschalten

- Nach Öffnen des Schalters gilt:

$$0 = u_R + u_L = i \cdot R + u_L$$

- Damit gilt:

$$u_L = i \cdot R$$

und nach dem Induktionsgesetz

$$u_L = -i \cdot R = L \cdot \frac{di}{dt}$$

- Daraus folgt:

$$-i \cdot R = L \cdot \frac{di}{dt}$$

oder

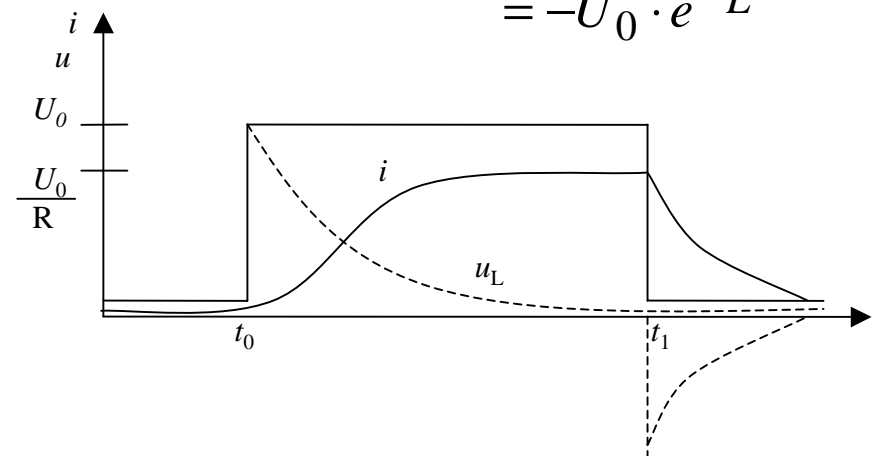
$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} \cdot dt$$

- Die Lösung der Gleichung lautet

$$i = I \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

- Für den Spannungsverlauf gilt:

$$\begin{aligned} u_L &= -I \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \cdot R \\ &= -U_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \end{aligned}$$



## 2.6 Datenübertragung

---



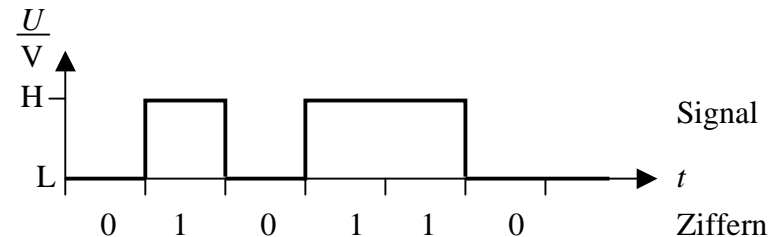
- **Darstellung von Daten im Binärformat**
  - ⇒ **Ziffern**                      **Dual, BCD**
  - ⇒ **Zeichen**                      **ASCII, EBCDIC**
- **Zuordnung der „0“ und „1“ zu physikalischen Größen**
  - ⇒ **elektrische Spannung**
  - ⇒ **elektrischer Strom**
  - ⇒ **magnetische Induktion**
  - ⇒ **Lichtstärke**
  - ⇒ **Frequenzen**
- **Physikalische Größen werden durch die Übertragung/Speicherung verändert werden**
  - ⇒ **elektrische Bauteile**
  - ⇒ **Leitungen**
- ☞ **Daten können durch die Übertragung/Speicherung verfälscht werden**

# Physikalische Darstellung



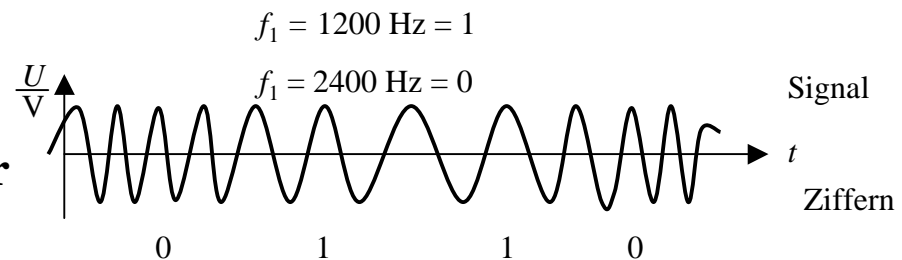
## ○ Im Computer

- ⇒ Amplitudenmodellierete Wechselspannung
- ⇒ Rechteckspannung
- ⇒ Willkürliche Zuordnung des Signalpegels zu Binärziffern
  - H-Pegel, 5 V  $\hat{=}$  „1“
  - L-Pegel, 0 V  $\hat{=}$  „0“



## ○ Bei Datenübertragung durch Telefon

- ⇒ Frequenzmodulation
- ⇒ Modem
- ⇒ Willkürliche Zuordnung der Frequenz zu Binärziffern
  - $f_1 = 1200 \text{ Hz} \hat{=}$  „1“
  - $f_1 = 2400 \text{ Hz} \hat{=}$  „0“



# Zweidrahtleitungen

---



- **Innerhalb des Computers werden die Daten von einen Schaltkreis zum nächsten übertragen**
  - ⇒ **Leiterbahnen auf Isolierflächen**
  - ⇒ **Flachbandkabel**
  - ⇒ **Länge beträgt einige cm**
  - ⇒ **Induktivität und Kapazität der Leiterbahn oder des Kabels können vernachlässigt werden**
- **Einfluß des Kabels ist nur der Ohmsche Widerstand**
  - ⇒ **Reduktion der Amplitude**
  - ⇒ **Dämpfung**
  - ⇒ **Wird durch die Toleranz der Schaltkreise aufgefangen**

# Übertragung auf langen Leitungen



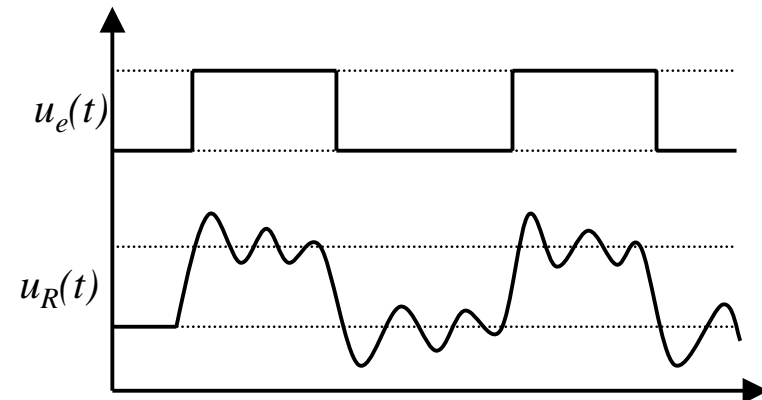
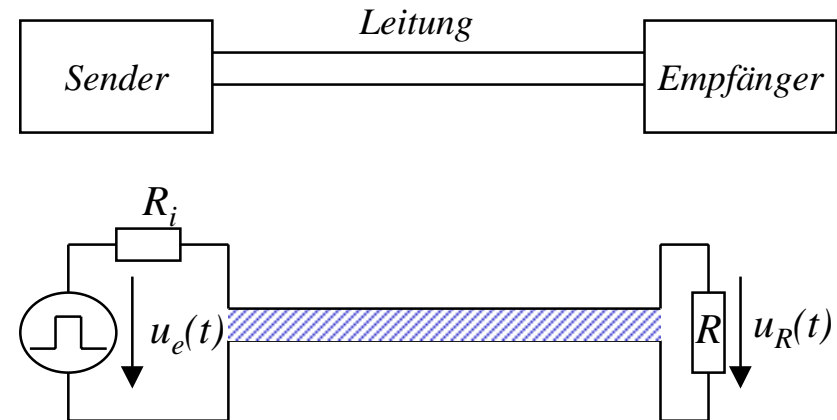
## ○ Definition: Lange Leitung

⇒ Die doppelte Länge ist größer als die Zeit für den 0-1- oder (1-0) Übergang mal Geschwindigkeit der Signalausbreitung

$$2 \cdot l > \Delta t \cdot v$$

## ○ Beispiel:

Am Ausgang eines logischen Schaltkreises wird ein Experimentierkabel von ca. 2 m Länge angebracht. Der Ausgang des Schaltkreises wechselt mit etwa 1 MHz



# Entstehung überlagerter Schwingungen

## ○ Ursachen

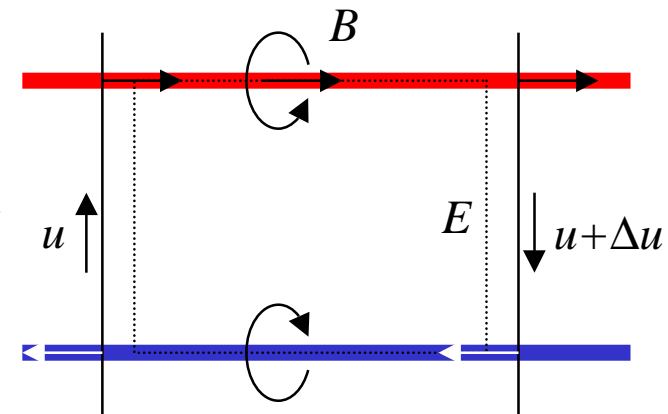
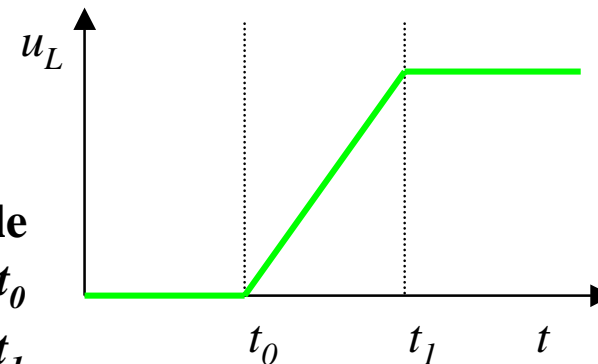
- ⇒ Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit
- ⇒ Kein idealer Rechteckimpuls

## ○ Modell

- ⇒ Einschalten einer Gleichspannungsquelle auf einer Doppelleitung zum Zeitpunkt  $t_0$
- ⇒ Die Spannung steigt bis zum Zeitpunkt  $t_1$
- ⇒ Zunehmende Spannung verursacht einen zunehmenden Strom und damit ein Magnetfeld
- ⇒ Aufbau des Magnetfelds induziert ein elektrisches Feld zwischen zwei Punkten auf der Leitung
- ⇒ Die Ladungen verschieben sich

☞ Der Vorgang wandert über die gesamte Leitung

☞ Es entsteht eine elektromagnetische Welle



# Reflexion



- **Was passiert bei inhomogenen Stellen (z.B. offenes Leitungsende)**

⇒ **Die Ladungsträger können sich nicht mehr weiterbewegen, aber**

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$$

**kann nicht schlagartig 0 werden**

⇒ **Die Welle (Energie) wird reflektiert und läuft in entgegengesetzter Richtung zurück**

- **Ähnliches, - wenn auch in abgeschwächter Form - tritt auf, wenn am Leitungsende die abschließende Impedanz für die Strom/Spannungsverhältnisse auf der Leitung eine Inhomogenität darstellt**

⇒ **In diesem Fall wird ein Teil der elektromagnetischen Welle (Energie) reflektiert**



# Reflexion



- Die Zeit für den Hin- und Rücklauf der Welle ist

$$T = \frac{2 \cdot l}{v}$$

- ⇒  $v$  ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit
- ⇒ Ist die Zeit  $T$  für den Hin- und Rücklauf größer als die Impulsflankensteilheit  $\Delta t$ , dann können sich stehende Wellen ausbilden

$$l > l_{krit} = \frac{1}{2} \Delta t \cdot v$$

- Beispiel

- ⇒ Bei Standard-TTL Schaltgliedern beträgt die Impulsflankensteilheit etwa 10 ns
- ⇒ Die Wellengeschwindigkeit einer Doppelleitung im Vakuum beträgt etwa  $3 \cdot 10^8$  m/s
- ⇒ daraus folgt

$$l_{krit} \approx \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10^{-9} \text{ s} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1,5 \text{ m}$$

# Entstehung von elektromagnetischen Wellen



## ○ Berechnung über Kirchhoffsche Sätze

⇒ **Homogene Leitung:**

$R'$        $[\Omega/\text{m}]$       Widerstandsbelag

$L'$        $[\text{H}/\text{m}]$       Induktionsbelag

$C'$        $[\text{F}/\text{m}]$       Kapazitätsbelag

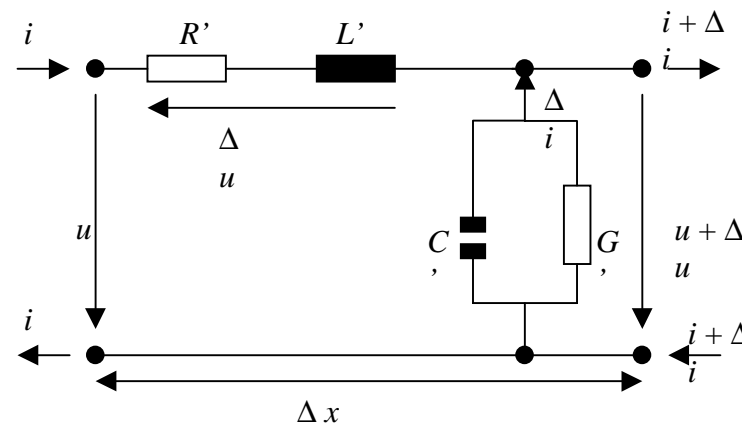
$G'$        $[\text{S}/\text{m}]$       Leitwertbelag

⇒ **Am Anfang des Längenelements liegt zwischen den Doppelleitungen die Spannung  $u$  und es fließt der Strom  $i$**

⇒ **Am Ende herrscht die Spannung  $u + \Delta u$  und es fließt der Strom  $i + \Delta i$**

⇒  **$\Delta u$  durch den ohmschen und den induktiven Widerstand**

⇒ **Stromänderung  $\Delta i$  durch den kapazitiven Widerstand und die Leitfähigkeit der Isolation**



# Entstehung von elektromagnetischen Wellen

---

- Es gilt  $(u + \Delta u) - u - \Delta u = 0$   
 $(i + \Delta i) - i - \Delta i = 0$

- Daraus folgt:

$$-\Delta u = R \cdot i \cdot \Delta x + L \cdot \frac{di}{dt} \cdot \Delta x = \left( R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} \right) \cdot \Delta x$$

$$-\Delta i = G \cdot u \cdot \Delta x + C \cdot \frac{du}{dt} \cdot \Delta x = \left( G \cdot u + C \cdot \frac{du}{dt} \right) \cdot \Delta x$$

- Geht man zum Differentialoperator über folgt :

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = R \cdot i + L \cdot \frac{\partial i}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = G \cdot u + C \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$$

- Annahme:  $R' = G' = 0$

# Entstehung von elektromagnetischen Wellen

---

- Es folgt aus der Ableitung nach  $x$  bzw.  $t$ :

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L' \cdot \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x}$$

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = C' \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

- Setzt man die Gleichungen ineinander ein, so folgt:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L' \cdot C' \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L' \cdot C' \cdot \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

- Diese beiden Gleichungen beschreiben den Spannungs- und Stromverlauf auf der Doppelleitung in Abhängigkeit von  $x$  und  $t$
- Sie werden auch Telegraphengleichungen oder Wellengleichungen genannt

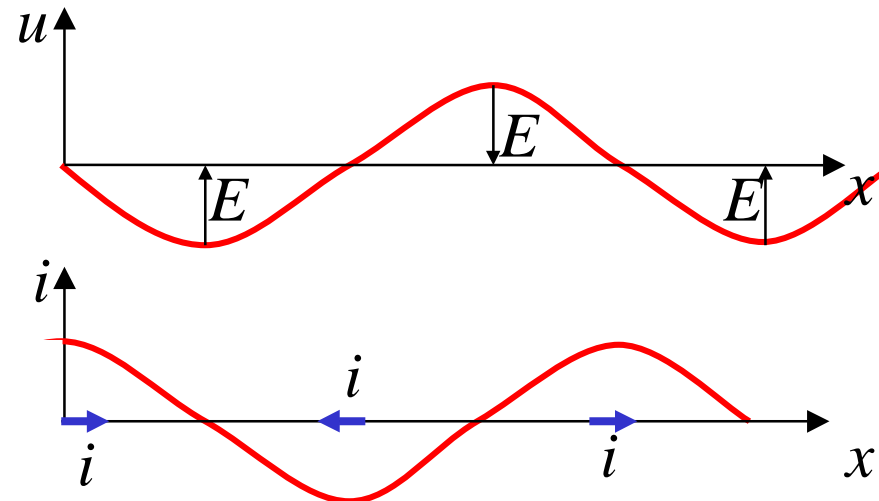
# Harmonische Wellen

- Eine Lösung dieser Gleichungen ist die harmonische Welle

$$u = U_0 \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right)$$
$$i = I_0 \cos \omega \left( t - \frac{x}{v} \right)$$

mit  $v = \frac{1}{\sqrt{L' \cdot C'}}$

- Entlang der Doppelleitung wandert eine Spannungs- und eine Stromwelle wie folgt:



- Die Doppelleitung dient der Führung der Welle

⇒ Die gesamte Energie der Welle steckt im umgebenden Feldraum

# Ausbreitungsgeschwindigkeit auf Leitern

---

○ Es gilt:

$$v = \frac{1}{\sqrt{L' \cdot C'}}$$

○ Mit Berücksichtigung der Geometrie zweier Leiter und der Definition von  $L'$  und  $C'$  gilt:

$$L' \cdot C' = \frac{L}{m} \cdot \frac{C}{m} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \mu_0 \cdot \mu_r$$

○ Daraus folgt:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \mu_0 \cdot \mu_r}}$$

# Ausbreitungsgeschwindigkeit auf Leitern

---

- **Im Vakuum gilt:**

$$\varepsilon_r = \mu_r = 1$$

- **Daraus folgt:**

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}} \approx \frac{1}{\sqrt{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1,25 \cdot 10^{-6}}} = 3,00 \cdot 10^8 \frac{m}{s} = c$$

- **In Leiterplatten oder Koaxialkabeln gilt:**

$$\varepsilon_r \approx 2,5 \text{ und } \mu_r \approx 1$$

- **Daraus folgt:**

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot \mu_0 \mu_r}} \approx \frac{1}{\sqrt{8,85 \cdot 10^{-12} \frac{Vs}{Am} \cdot 2,5 \cdot 1,25 \cdot 10^{-6} \frac{As}{Vm} \cdot 1}} = 1,90 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

# Wellenwiderstand

- Benutzt man

$$u = U_0 \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right)$$

$$i = I_0 \cos \omega \left( t - \frac{x}{v} \right)$$

und

$$v = \frac{1}{\sqrt{L' \cdot C'}}$$

als Lösungsansatz für die Ausgangsgleichung

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = R' \cdot i + L' \cdot \frac{\partial i}{\partial t}$$

- Mit der Annahme des Grenzfalles  $R' = 0$ , erhält man

$$U_0 = I_0 \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

oder für die Impedanz

$$\frac{U_0}{I_0} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = Z$$

wobei  $Z$  der Wellenwiderstand der Leitung ist

- Für jeden Punkt der Leitung gilt

$$u = i \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

- Die Spannung  $u$  setzt sich aus einem hinlaufenden Teil  $u_h$  und einem rücklaufenden Teil  $u_r$  zusammen

$$u = u_h + u_r$$

- Das gleiche gilt für den Strom

$$i = i_h + i_r$$

- Durch die Überlagerung gilt

$$u = Z \cdot (i_h + i_r)$$



# Wellenwiderstand

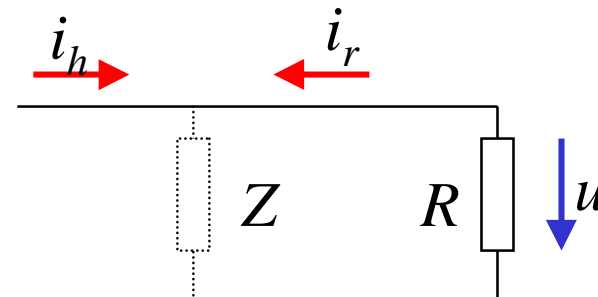
- Befindet sich am Ende der Leitung ein Empfänger mit dem Widerstand  $R$ , so gilt nach dem ohmschen Gesetz:

$$u = R \cdot (i_h - i_r)$$

- Setzt man beide Teile am Widerstand gleich, so erhält man:

$$\begin{aligned} Z \cdot (i_h + i_r) &= R \cdot (i_h - i_r) \\ Z \cdot i_h + Z \cdot i_r &= R \cdot i_h - R \cdot i_r \\ R \cdot i_r + Z \cdot i_r &= R \cdot i_h - Z \cdot i_h \\ i_r \cdot (R + Z) &= i_h \cdot (R - Z) \\ \frac{i_r}{i_h} &= \frac{(R - Z)}{(R + Z)} = r \end{aligned}$$

- $r$  bezeichnet man als Reflexionsfaktor



- Der ohmsche Widerstand kann Werte zwischen 0 und unendlich annehmen
- Ist der Abschlußwiderstand  $R$  gleich dem Wellenwiderstand  $Z$ , ist  $r=0$ 
  - ⇒ Es findet keine Reflexion statt
  - ⇒ Abschlußwiderstand

# Abschlußwiderstände

---

- **ISDN** **100  $\Omega$**
- **Ethernet** **50  $\Omega$**
- **Fernsehkabel**
  - ⇒ **früher** **60  $\Omega$**
  - ⇒ **heute** **75  $\Omega$**
- **Token Ring** **100-150  $\Omega$**
- **Flachbandkabel** **240  $\Omega$**

# Übersprechen



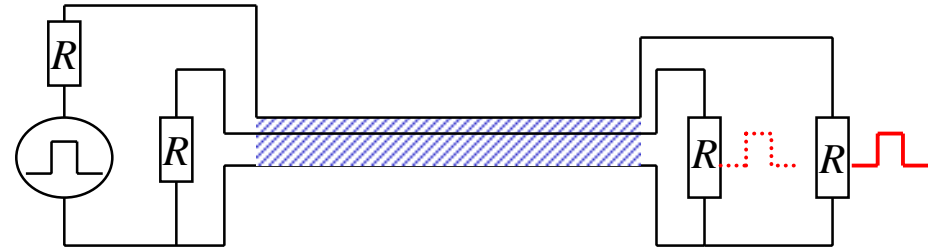
- Neben einer stromdurchflossenen Leitung läuft ein zweiter Leiter parallel

- ⇒ elektrische Kopplung

- ⇒ magnetische Koppelung

- Bei Impulsen können diese in abgeschwächter Form als Störimpuls an der zweiten Leitung gemessen werden

- ⇒ Die Folge ist ein Übersprechen des Signals



# 3 Halbleiterbauelemente

---



- **Halbleiter sind Elemente, deren Leitfähigkeit zwischen der von Isolatoren und Leitern liegt**
  - ⇒ besitzen einen kristallinen Aufbau ohne Metallbindung
  - ⇒ die Leitfähigkeit kann durch Fremdatome beeinflusst werden
- **Die Leitfähigkeit von Halbleitern schwankt mit der Temperatur**
  - ⇒ beim absoluten Nullpunkt ist sie null
  - ⇒ bei höheren Temperaturen liegt sie zwischen Metallen und Nichtleitern

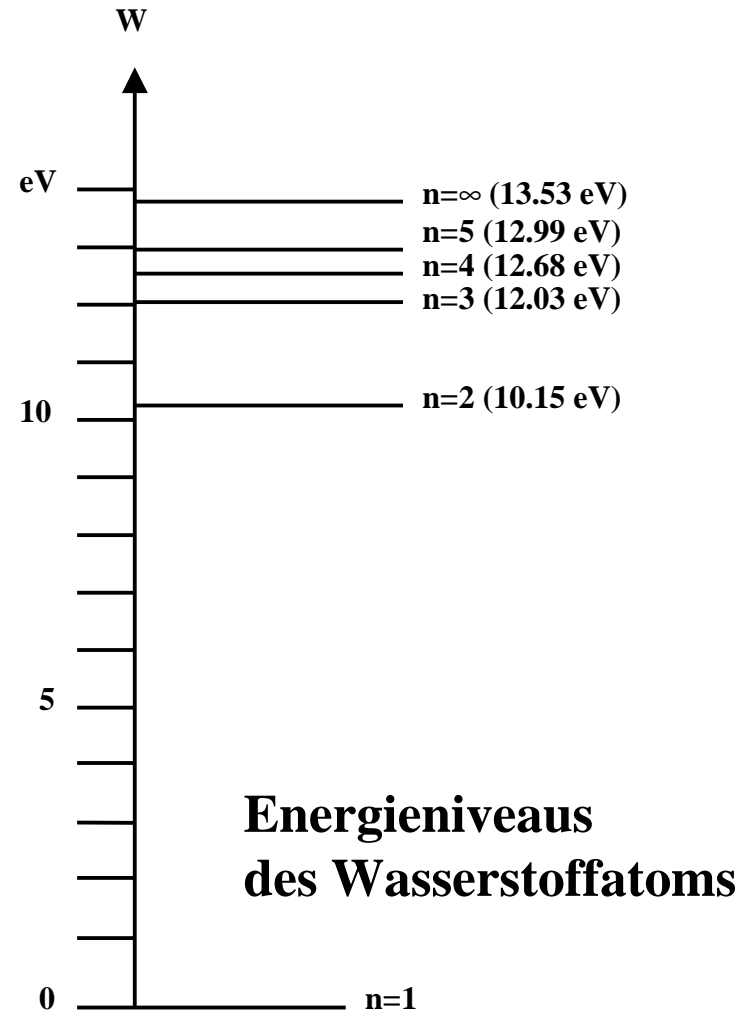
# Beispiele

---

<i>Material</i>	<i>Widerstand (<math>\Omega/m</math>)</i>	<i>Einordnung</i>
<b>Hartgummi</b>	<b><math>10^{16}</math></b>	<b>Nichtleiter</b>
<b>Glas</b>	<b><math>10^{10}</math></b>	<b>Nichtleiter</b>
<b>Galliumarsenid (rein)</b>	<b><math>10^3</math></b>	<b>Halbleiter</b>
<b>Silizium (rein)</b>	<b>100</b>	<b>Halbleiter</b>
<b>Silizium (dotiert)</b>	<b>1 bis 100</b>	<b>Halbleiter</b>
<b>Germanium (rein)</b>	<b>1</b>	<b>Halbleiter</b>
<b>Germanium (dotiert)</b>	<b>1 bis <math>10^{-5}</math></b>	<b>Halbleiter</b>
<b>Eisen</b>	<b><math>10^{-7}</math></b>	<b>Leiter</b>
<b>Silber</b>	<b><math>10^{-8}</math></b>	<b>Leiter</b>

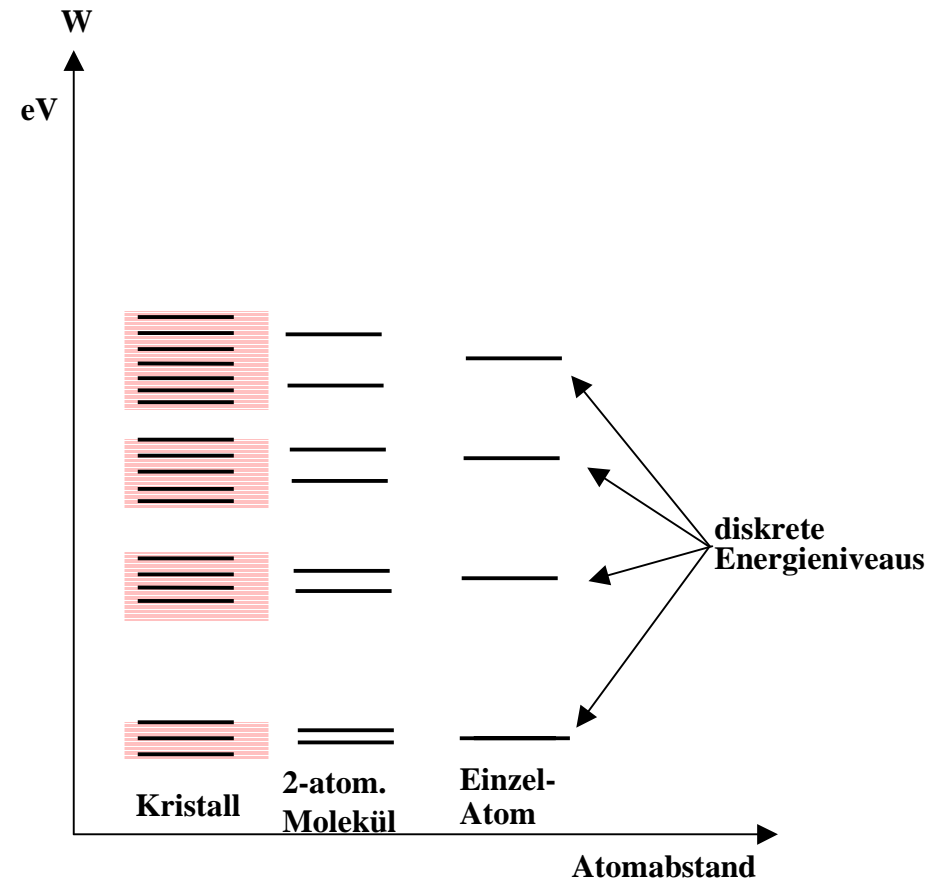
# 3.1 Halbleiterphysik

- **Bohrsches Atommodell:**
  - ⇒ **Atom besteht aus einem *Atomkern* und einer in *Schalen* aufgeteilten *Atomhülle***
  - ⇒ **Elektronen bewegen sich auf *Bahnen (Schalen)***
  - ⇒ **Jeder Schale mit der Nummer  $n$  entspricht ein *Energieniveau***
  - ⇒ **Übersteigt die Energie einen bestimmten Wert, so ist es nicht mehr an das Atom gebunden ( $n=\infty$ )**



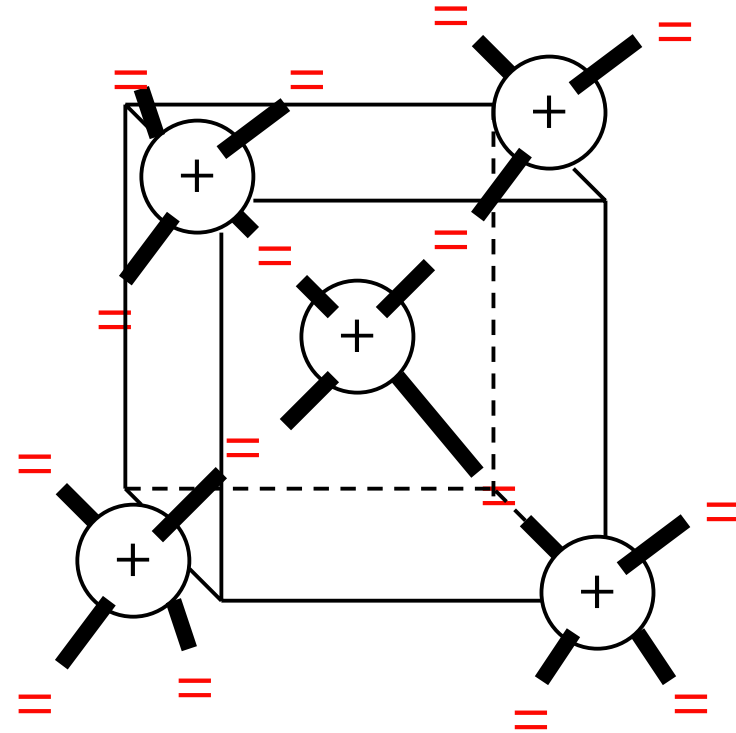
# Energiebändermodell

- In dicht gepackten Kristallstrukturen findet eine Wechselwirkung zwischen den Atomen statt
  - ⇒ erlaubte und verbotene Bereiche
  - ⇒ die diskreten Energieniveaus verschmelzen zu Energiebändern



# Kristallstruktur in Germanium und Silizium

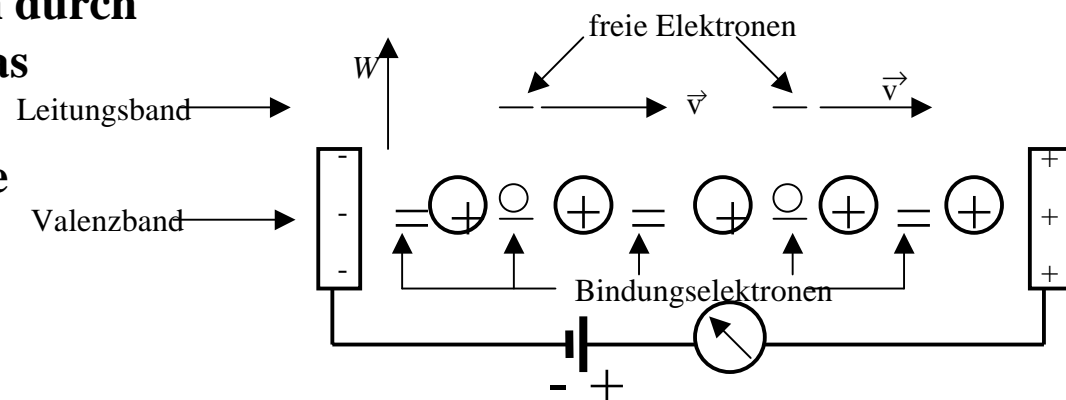
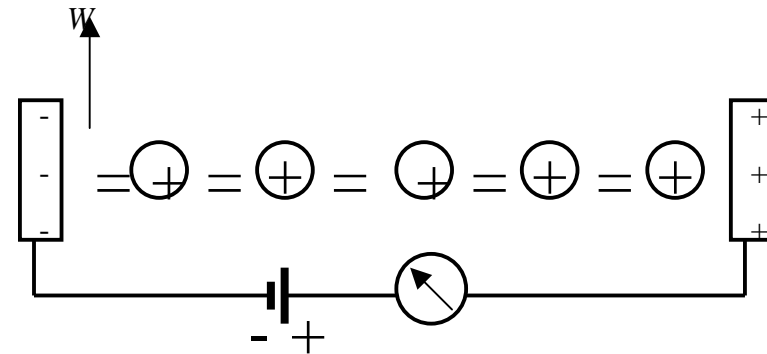
- **Kristallstruktur**
  - ⇒ **regelmäßig angeordnetes Atomgefüge**
- **Amorphe Struktur**
  - ⇒ **kein regelmäßiges Atomgefüge**
- **Mischkristalle**
  - ⇒ **Fremdatome sind in die Kristallstruktur eingebaut**
- **Polykristalle**
  - ⇒ **Mehrere Kristalle bilden ein Gefüge**
- **Einkristall**
  - ⇒ **der Körper besteht aus einem einzigen Kristall**
- **In Siliziumkristallen sind die Atome in einer Tetraederstruktur aufgebaut**





# Valenz- und Leitungsband

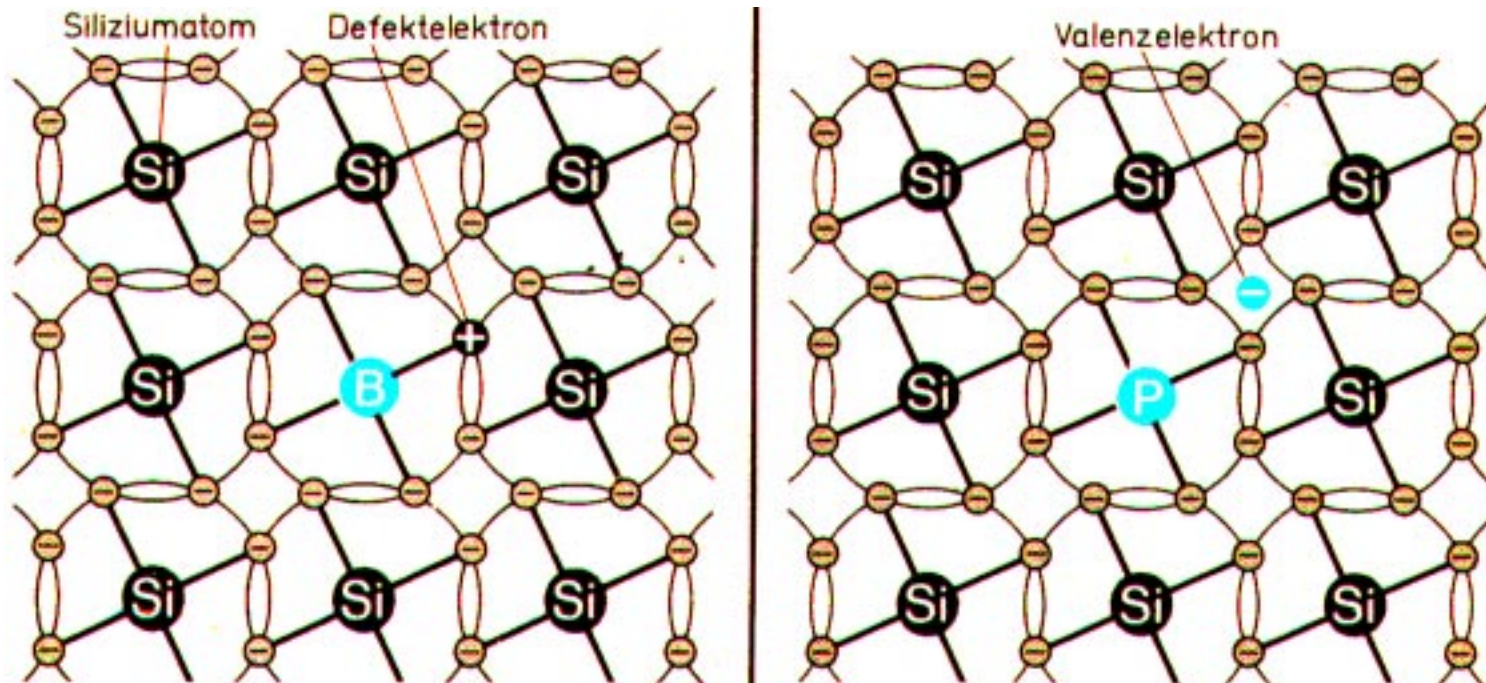
- In voll besetzten oder in leeren Bändern ist ein Elektronenfluß nicht möglich
- Valenzband: Elektronen im obersten Energieband
  - ⇒ ist dies voll besetzt, findet kein Ladungstransport statt
- Leitungsband: das nächste Energieband über dem Valenzband
  - ⇒ Werden Elektronen durch Energiezufuhr in das Leitungsband gehoben, können sie sich in diesem frei bewegen



# Dotierte Halbleiter



- Gezielter Einbau von Fremdatomen in Silizium- oder Germaniumkristalle durch *Dotierung*
  - ⇒ zusätzliche Valenzelektronen durch Arsen (As), Antimon (Sb) oder Phosphor (P)
  - ⇒ fehlende Valenzelektronen durch Aluminium (AL), Bor (B) oder Indium (In)

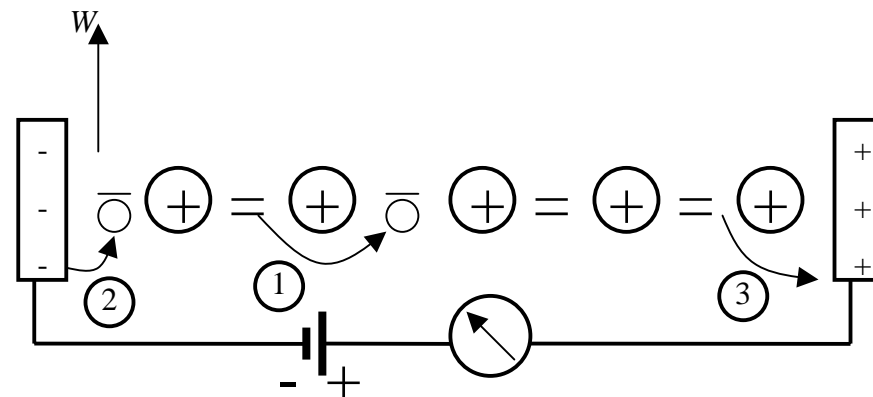
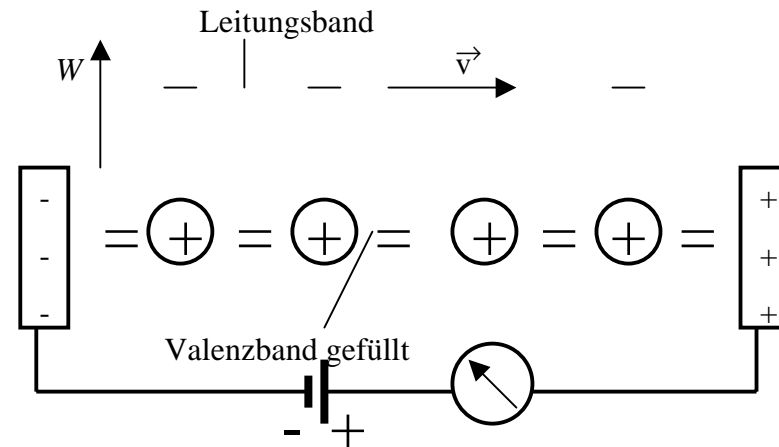


U. Keschull

# Leitfähigkeit durch Störstellen



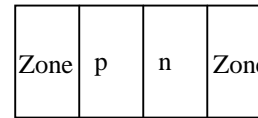
- Geringe Energie reicht aus, um das Elektron in das Leitungsband zu heben
- Donatoratom
  - ⇒ Das Atom gibt das zusätzliche Elektron leicht ab
  - ⇒ n-Dotierung
- Akzeptoratom
  - ⇒ Das Atom nimmt ein Elektron leicht auf
  - ⇒ p-Dotierung



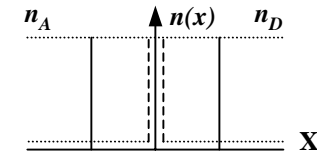
# pn-Übergang



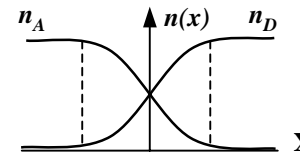
- **Grenzschicht zwischen p- und n-dotierten Schicht**
- **Ein Ausgleich der Ladungsträger durch Diffusion über die Grenzschicht**
  - ⇒ **Es entsteht ein elektrisches Feld**
- **wenn Diffusionswirkung und Feldwirkung gleich sind**
  - ⇒ **Gleichgewicht**
  - ⇒ **Ladungsträgerfreie Zone**
  - ⇒ **Diffusionsspannung  $U_D$**
- **Bei Zimmertemperatur**
  - ⇒ **Germanium  $U_D = 0,37 \text{ V}$**
  - ⇒ **Silizium  $U_D = 0,75 \text{ V}$**



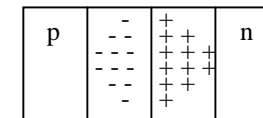
a) Grenzschicht mit n - dotierter und p - dotierter Zone



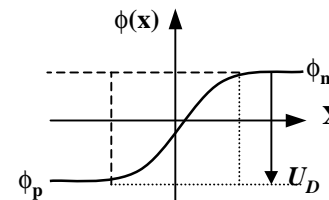
b) Konzentration der Donatoren  $n_D$  und Akzeptoren  $n_A$  ohne Ausgleich



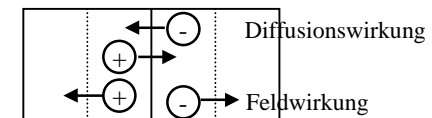
c) Konzentrationsdichte nach der Diffusion



d) Raumladung



e) Potenzialverlauf quer zur Grenzschicht

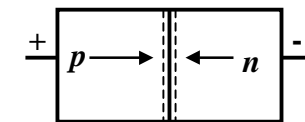
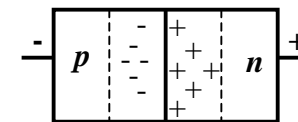
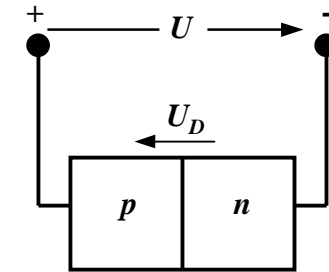
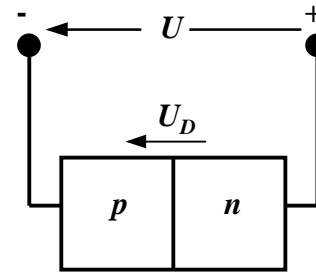


f) Kraftwirkung

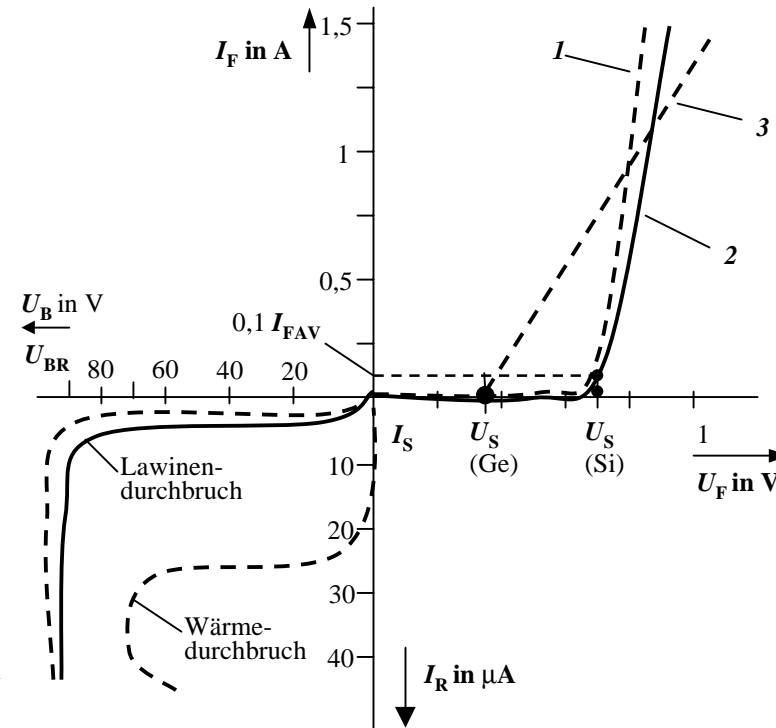
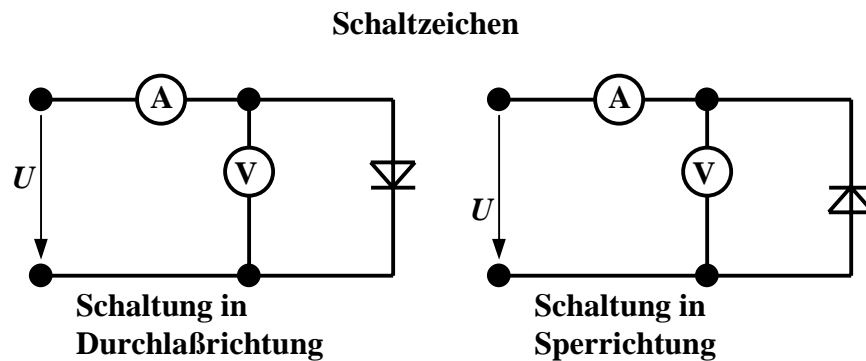
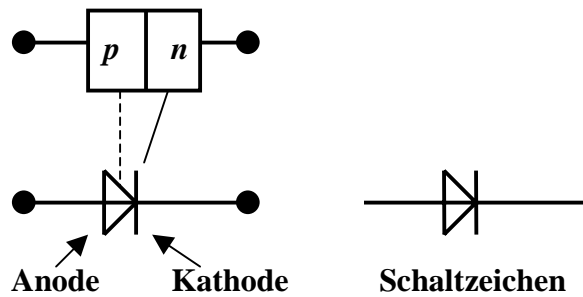
## 3.2 Halbleiterdioden



- Bauelemente, welche die Leitfähigkeitseigenschaften eines pn-Übergangs benutzen
- pn-Übergang mit äußerer Spannung
- Sperrrichtung
  - ⇒ Ladungsträgerfreie Zone wird größer
  - ⇒ Es fließt kein Strom
  - ⇒ Durchbruch, wenn die Feldstärke (Spannung) zu groß wird (*Zener-Effekt*)
- Durchlaßrichtung
  - ⇒ Ladungsträgerfreie Zone wird kleiner
  - ⇒ Wenn  $U > U_D$  wird, fließt ein Strom



# Kennlinie des $pn$ -Übergangs



- 1: Silizium ideal
- 2: Silizium real
- 3: Germanium real

# Halbleiterdioden mit besonderen Eigenschaften

---

## ○ Schottky-Dioden

- ⇒ Beruht auf dem von Schottky untersuchten Metall-Halbleiter Übergang
- ⇒ Diffusion wie bei pn-Übergang
- ⇒ besonders schnelle Dioden

## ○ Z-Dioden

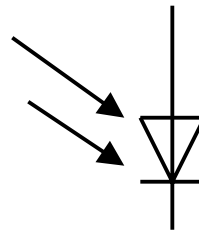
- ⇒ Ausnutzung des Zener-Effekts
- ⇒ Strom darf einen Höchstwert  $I_{Zmax}$  nicht überschreiten
- ⇒ Spannungsbegrenzung bei Wechselspannungen

# Halbleiterdioden mit besonderen Eigenschaften

---

## ○ Fotodioden

- ⇒ Licht kann durch eine Öffnung an den pn-Übergang gelangen
- ⇒ ein einfallendes Lichtquant erzeugt ein Elektron-Loch-Paar
- ⇒ Fotodioden werden in Sperrichtung betrieben
  - ist kein Licht vorhanden, fließt kein Strom
  - bei Lichteinfall fließt durch den Photoeffekt ein Strom
- ⇒ Lichtschranken
- ⇒ Datenübertragung mit Lichtwellenleitern



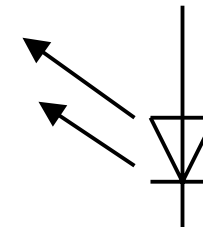


# Halbleiterdioden mit besonderen Eigenschaften

---

## ○ Limeniszenzdioden (Light Emitting Diod, LED)

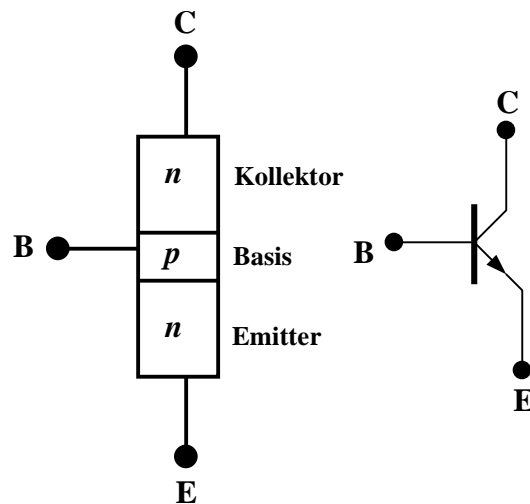
- ⇒ pn-Übergang mit hoher Dotierung
- ⇒ Betrieb in Durchlaßrichtung (Vorwiderstand)
- ⇒ Durchlaßstrom injiziert Ladungsträger in den p- und n-Bereich
- ⇒ Durch die hohe Zahl der Überschusselektronen (n-Bereich) bzw. Löcher (p-Bereich) werden Ladungsträger aus dem Leitungsband in das Valenzband gezogen (Rekombination)
- ⇒ Durch den Energieerhaltungssatz muß Energie abgegeben werden
- ⇒ Es entsteht ein Lichtquant
- ⇒ Anzeigen
- ⇒ Datenübertragung durch Lichtwellenleiter
- ⇒ Optokoppler



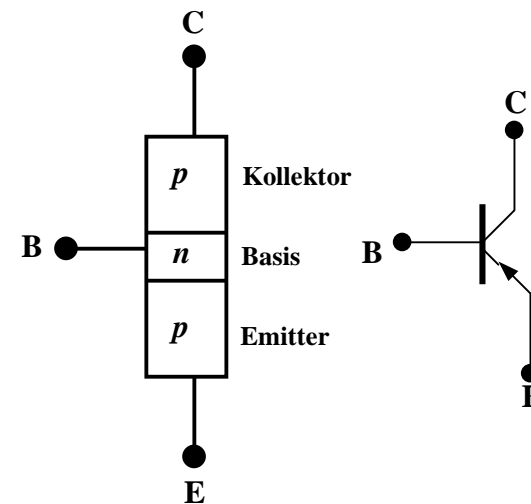
# 3.3 Bipolartransistoren



- Ausnutzen der Eigenschaft zweier pn-Übergänge
  - ⇒ NPN-Transistor
  - ⇒ PNP-Transistor
- Von jeder Zone wird ein Anschluß herausgeführt
  - ⇒ Emitter (E)
  - ⇒ Basis (B)
  - ⇒ Collector (C)



NPN-Transistor

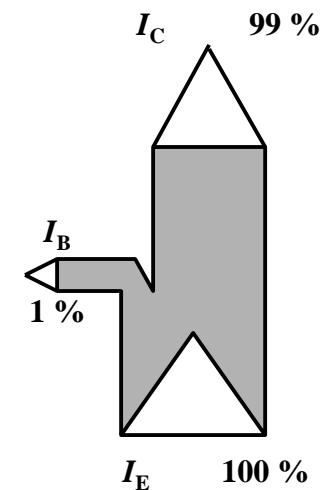
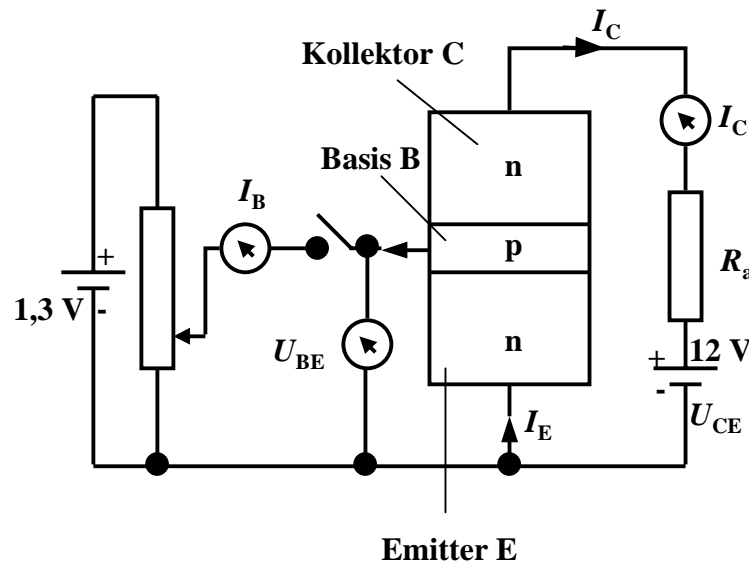
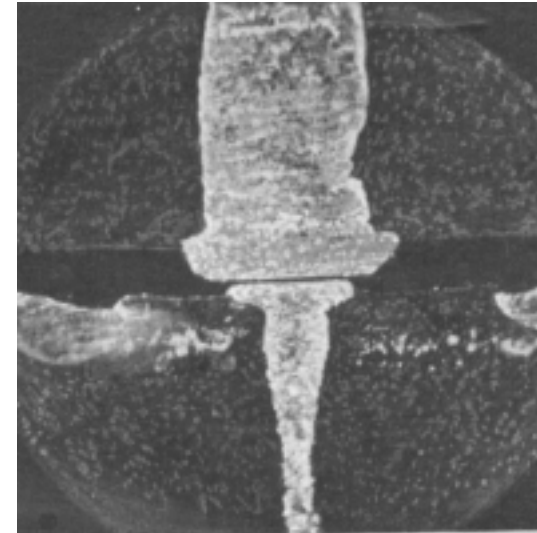


PNP-Transistor

# Der Transistoreffekt



- **Basis des Transistors ist sehr dünn**
  - ⇒ Die Emitter-Basis-Diode wird in Durchlaßrichtung gepolt
  - ⇒ Die meisten der Elektronen fließen jedoch nicht über die Basis ab, sondern werden vom Kollektor aufgenommen (starkes elektrisches Feld)
  - ⇒ Es fließt nur ein kleiner Basisstrom



# Der Transistoreffekt



- Erhöht man die Spannung an der Basis, so bleibt der Basisstrom relativ klein, der Kollektorstrom wächst hingegen relativ stark

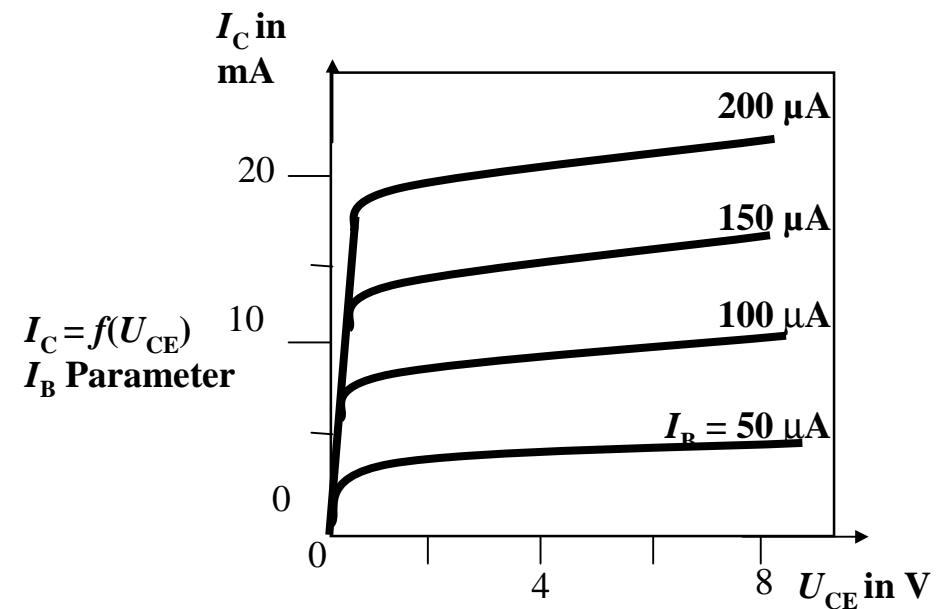
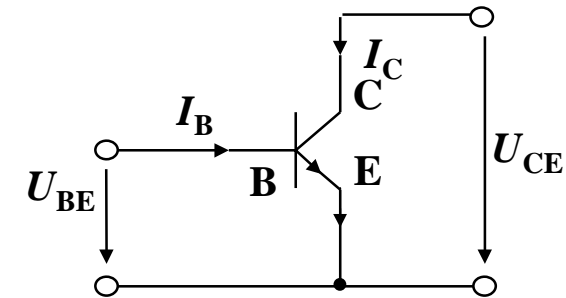
⇒ Der Transistor ist ein stromgesteuerter Widerstand

- Stromverstärkung

$$B = \frac{I_C}{I_B}$$

- Der Basisstrom steuert den Kollektorstrom

$$I_B \cdot B = I_C$$

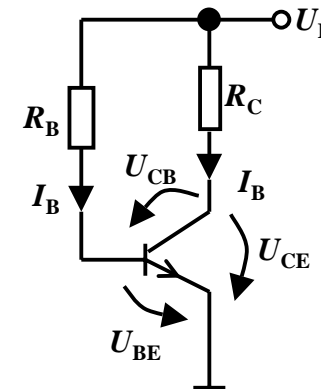
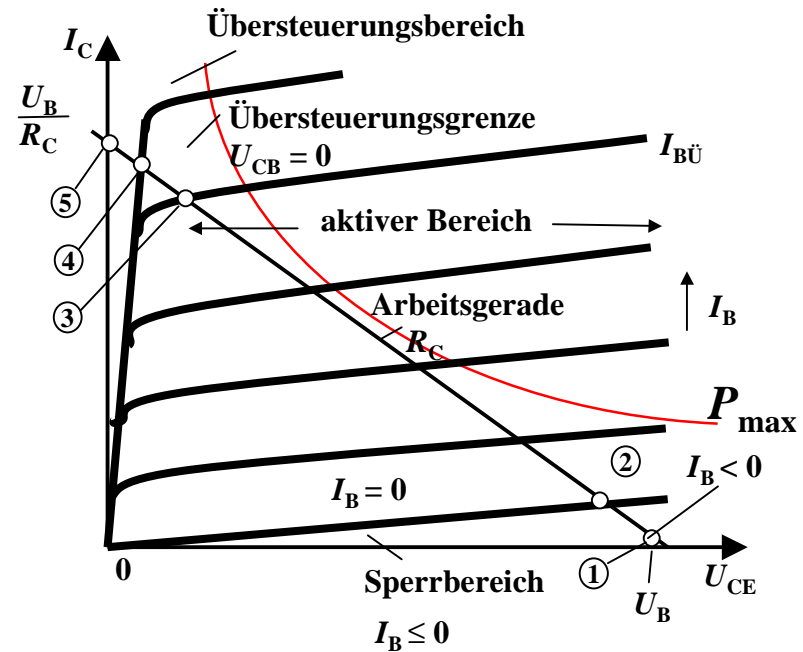


Ausgangskennlinien (Stromsteuerung)

# Arbeitspunkt



- Die Arbeitspunkte können sich nur entlang der Arbeitsgeraden verschieben
- Sperrbereich
  - ⇒ AP 1 bis AP 2
  - ⇒  $I_B < 0$ ,  $U_{CE} \approx U_B$ ,  $I_C \approx 0$
  - ⇒ Schalter aus
- Aktiver Bereich
  - ⇒ AP 2 bis AP 3
  - ⇒ Transistor als Verstärker
- Sättigungsbereich
  - ⇒ Übersteuerung
  - ⇒ AP 3 bis AP 4
  - ⇒  $I_C \approx U_B/R_C$
  - ⇒ Schalter ein



## 3.4 Unipolare Transistoren

---

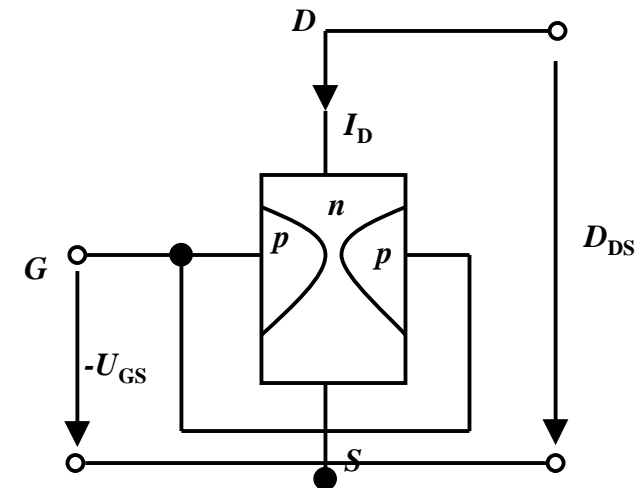
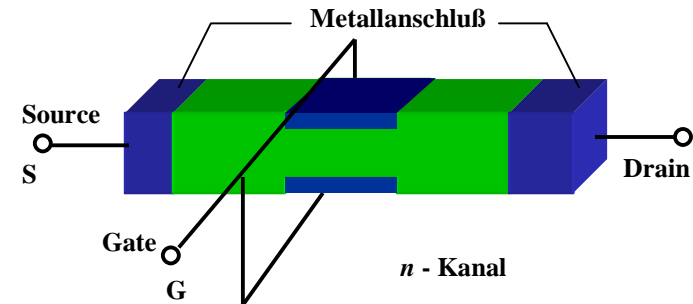


- **Im Gegensatz zum Bipolartransistor wird bei unipolaren Transistoren der Strom durch eine Spannung gesteuert**
  - ⇒ **Elektrisches Feld**
  - ⇒ **Feldeffekt-Transistor (FET)**
  - ⇒ **Spannungsgesteuerter Widerstand**
- **Sperrschicht-FET**
  - ⇒ **Isolation des Gates durch gesperrten pn-Übergang**
  - ⇒ **Ausdehnung einer pn-Sperrschicht**
- **Isolierschicht-FET**
  - ⇒ **Isolation des Gates durch Isolator (Siliziumoxid,  $\text{SiO}_2$ )**
  - ⇒ **Beeinflussung der Leitfähigkeit durch Influenz**
- **Anschlüsse**
  - ⇒ **Source S**            **(Quelle)**
  - ⇒ **Drain D**            **(Senke)**
  - ⇒ **Gate G**            **(Tor)**
  - ⇒ **Bulk B**            **(Masse, Substrat)**

# Sperrschicht-Feldeffekttransistor (FET)



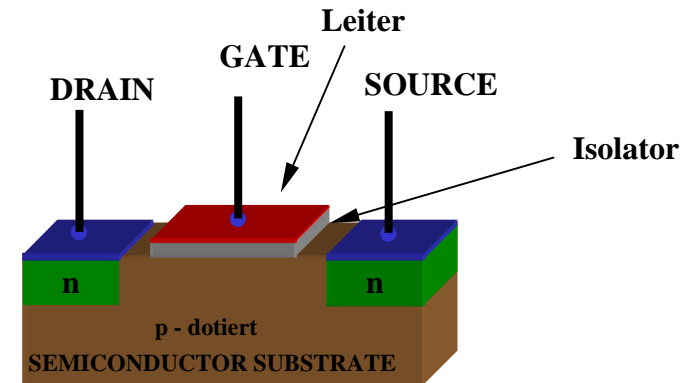
- Am Gate liegt eine negative Spannung  $U_{GS}$  an
  - ⇒ Sperrschichten um die p-Zonen dehnen sich aus
- Wird die Gatespannung negativer
  - ⇒ Querschnitt kleiner
  - ⇒ Widerstand höher
- Kanaleinschnürung
  - ⇒ Überlagerung der Gate- und Drainspannung
  - ⇒ Erhöhen der Drainspannung  $U_{DS}$  führt zu Berührung der Raumladungszonen
- Gatedurchbruch
  - ⇒ Elektrischer Durchschlag der Isolation
- Draindurchbruch
  - ⇒ Das elektrische Feld wird so stark, daß die Abschnürung überwunden wird
  - ⇒ Begrenzung der Drainspannung



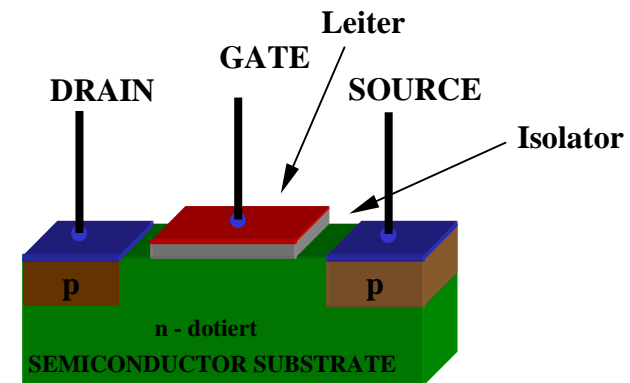
# Isolierschicht-FET (MOS-FET)



- Gateelektrode ist durch eine dünne Oxidschicht getrennt
  - ⇒ MOS: Metal Oxide Semiconductor
- n-MOS
  - ⇒ Das gesteuerte Halbleiter-Substrat ist p-dotiert
  - ⇒ Die Anschlüsse sind stark n-dotiert
  - ⇒ n-Kanal-MOS-FET
- p-MOS
  - ⇒ Der gesteuerte Halbleiter-Substrat ist n-dotiert
  - ⇒ Die Anschlüsse sind stark p-dotiert
  - ⇒ p-Kanal-MOS-FET
- Da die n-Zonen (p-Zonen) weit auseinanderliegen, kommt es nicht zum Transistoreffekt



n - TRANSISTOR



p - TRANSISTOR



# Der n-MOS-Transistor



## ○ Anreicherungstyp

⇒ enhancement

⇒ selbstsperrend

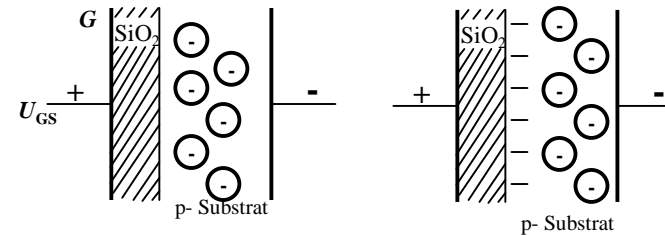
## ○ Funktionsweise

⇒ Unter der Oxidschicht werden durch Influenz Ladungsträger angesammelt

⇒ Die Raumladungen (Löcher) werden zurückgedrängt

⇒ Es bildet sich ein n-Kanal

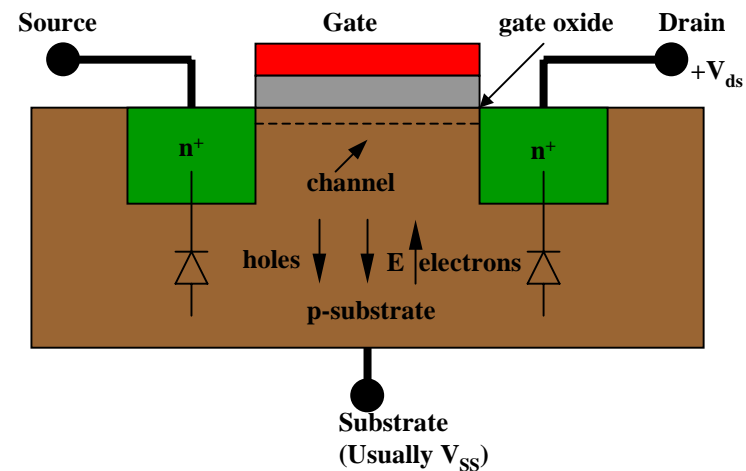
⇒ Die Dicke des Kanals hängt von  $U_{GS}$  ab



○ ortsfeste Raumladungen  
- Ladungsträger

$0 < U_{GS} < U_{th}$

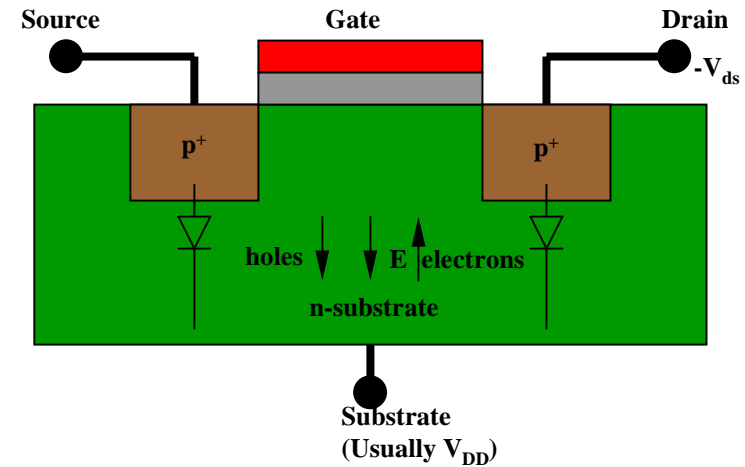
$U_{GS} > U_{th}$



# Der p-MOS-Transistor

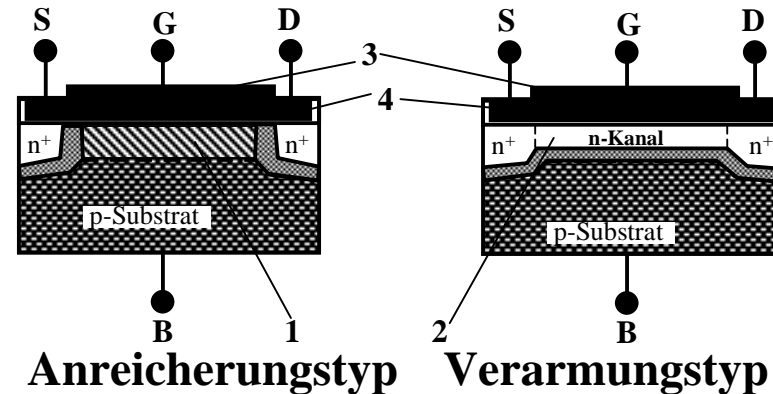


- Alle Dotierungen sind umgekehrt
- Funktionsweise
  - ⇒ Wie bei n-MOS Tansistor
  - ⇒ Statt Ladungsträger werden Löcher unter der Oxidschicht durch Influenz angesammelt
  - ⇒ Es bildet sich ein leitender p-Kanal



# Selbstleitende MOS-Transistoren

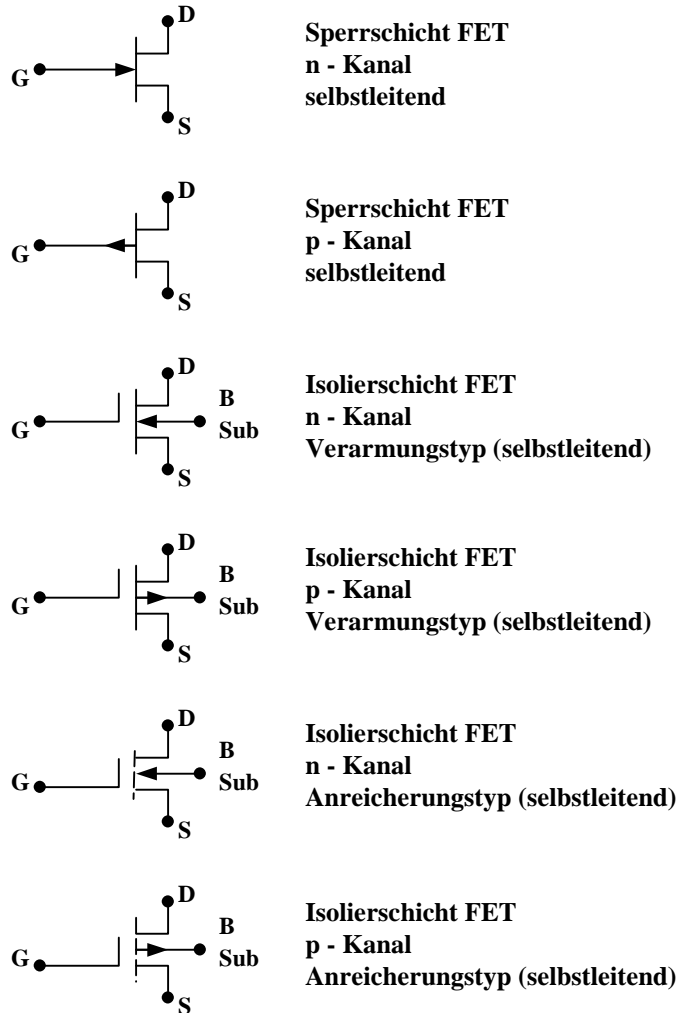
- **Verarmungstyp**
  - ⇒ **depletion**
- **Funktionsweise**
  - ⇒ **Bei der Herstellung des Transistors wird bereits ein Kanal zwischen Source und Drain diffundiert**
  - ⇒ **Der Transistor ist auch ohne Gatespannung leitend, da dotiertes Halbleitermaterial leitet**
  - ⇒ **Elektrische Spannung am Gate schnürt den Kanal ein**
- **n-MOS und p-MOS-Verarmungstypen haben in elektronischen Schaltkreisen nur als Widerstände Bedeutung**



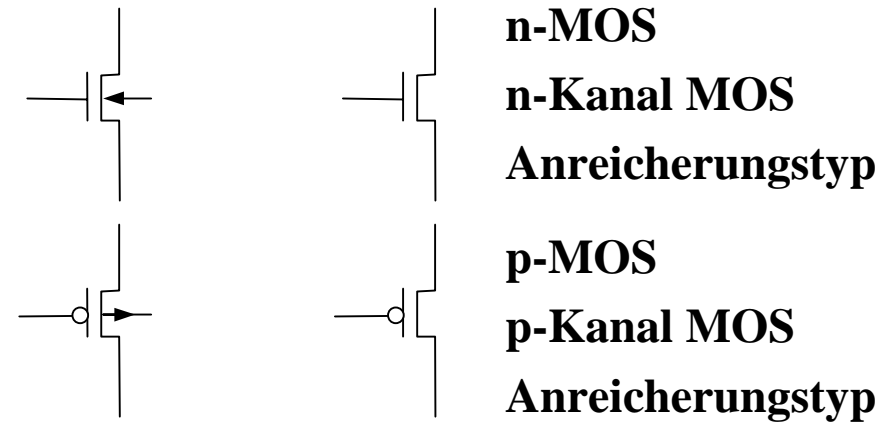
- 1: Anreicherungszone**
- 2: Verarmungszone**
- 3: Metall oder polykristallines Silizium**
- 4: SiO<sub>2</sub> Isolationsschicht**

# MOS-Transistorschaltbilder

## ○ In deutschsprachigen Büchern



## ○ In englischsprachigen Büchern



**Achtung: Der n-MOS Verarmungstyp in deutschsprachigen Büchern sieht ähnlich aus wie der n-MOS Anreicherungstyp in englischen Büchern**

# Der Body-Effekt

---

- **Bei integrierten Schaltungen sind zahlreiche Transistoren auf einem gemeinsamen Substrat aufgebaut**
  - ⇒ **Oft sind Transistoren so geschaltet, daß Source und Substrat nicht auf dem gleichen Potenzial liegen**
  - ⇒ **Source eines Transistors ist mit dem Drain eines anderen Transistors verbunden**
  - ⇒ **Dadurch vergrößert sich die Verarmungszone unter der Isolationsschicht**
- **Die Folgen**
  - ⇒ **Der Strom unter dem Transistor wird behindert**
  - ⇒ **Die Schwellspannung wird höher**

## 3.5 Der Transistor als Schalter

---



- **Elektronische Verknüpfungsglieder werden aus Halbleiterbauelementen aufgebaut**
  - ⇒ **Binäre Schaltvariablen werden nach den Gesetzen der Schaltalgebra miteinander verknüpft**
  - ⇒ **Werte entsprechen der Zweiwertigkeit von Schalterzuständen**
- **Im folgenden gilt:**
  - ⇒ **„Ein“ entspricht „1“, 5 V, POWER oder VDD**
  - ⇒ **„Aus“ entspricht „0“, 0 V, GROUND oder VSS**
- **Verknüpfungsglieder werden zu komplexen Schaltnetzen und Schaltwerken zusammengefaßt**
  - ⇒ **Die Schaltglieder müssen die gleichen Signalpegel besitzen**

# Idealer Schalter



- **Annahme: der Verknüpfungsvorgang**
  - ⇒ erfordert keine Leistung
  - ⇒ benötigt keine Zeit
  - ⇒ Im Schalter fällt keine Spannung ab

- **Im Schalterzustand „Ein“**

$$R_i = \emptyset$$

$$I = \frac{U_B}{R}$$

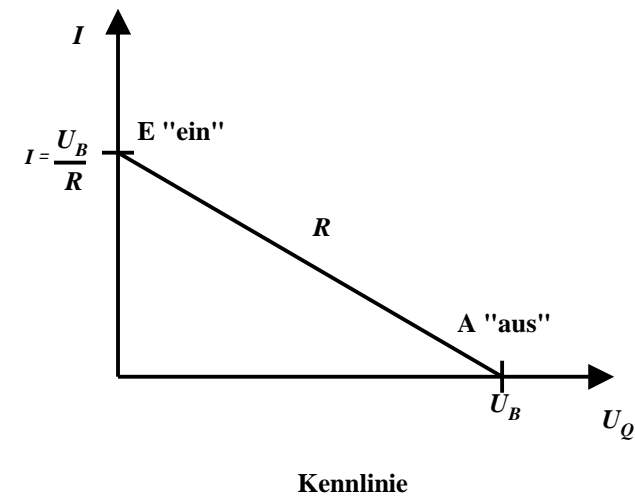
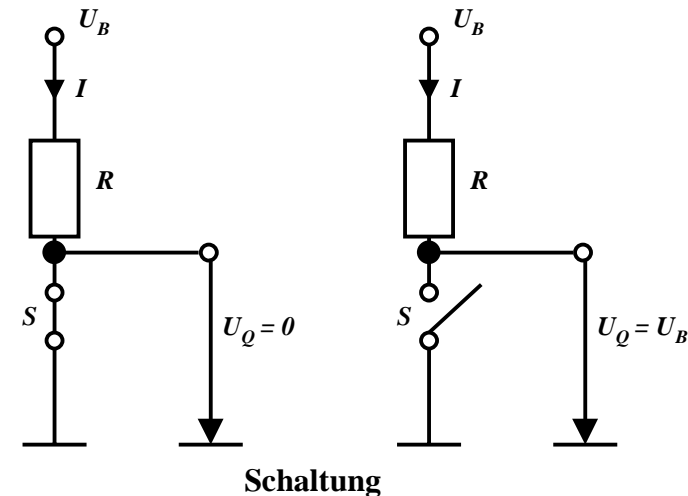
$$U_Q = 0$$

- **Im Schalterzustand „Aus“**

$$R_S = \infty$$

$$I = 0$$

$$U_Q = U_B$$



# Realer Schalter

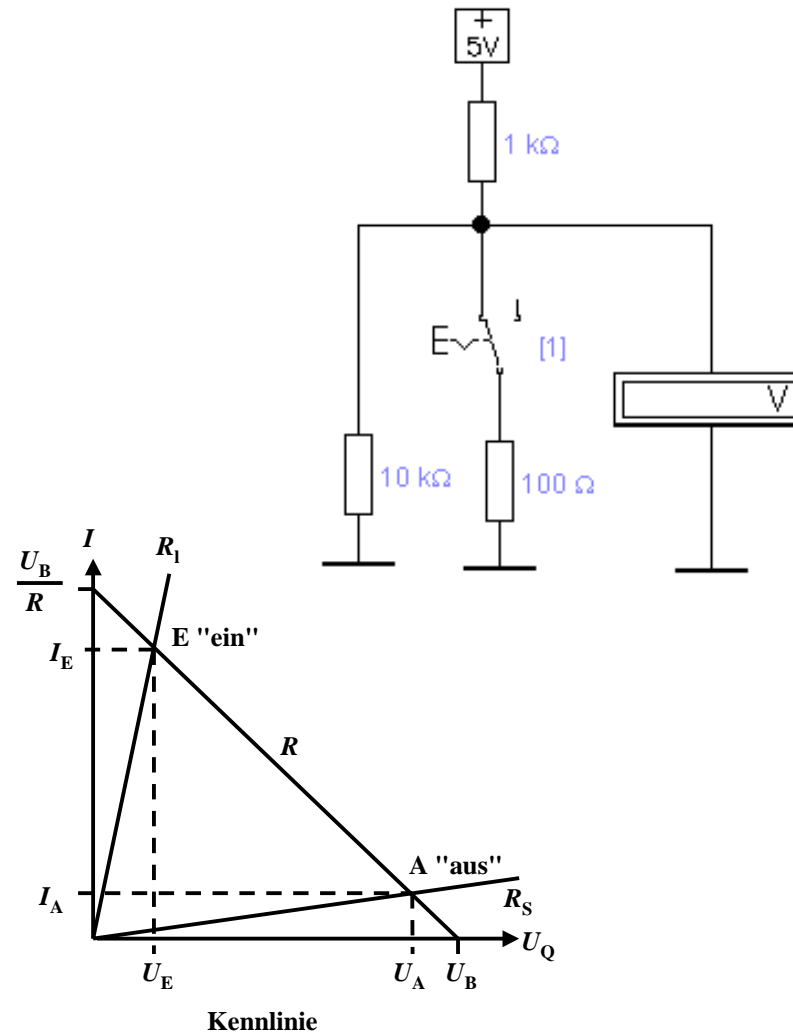


- $R_i$  kann nicht 0 sein
- $R_S$  kann nicht unendlich werden
  - ⇒ in der Praxis versucht man,  $R_i$  möglichst klein und  $R_S$  möglichst groß zu machen
- Im Schalterzustand „Ein“

$$I_E = \frac{U_B}{R + R_i}; U_E = \frac{U_B \cdot R_i}{R + R_i}$$

- Im Schalterzustand „Aus“

$$I_A = \frac{U_B}{R + R_S}; U_A = \frac{U_B \cdot R_S}{R + R_S}$$

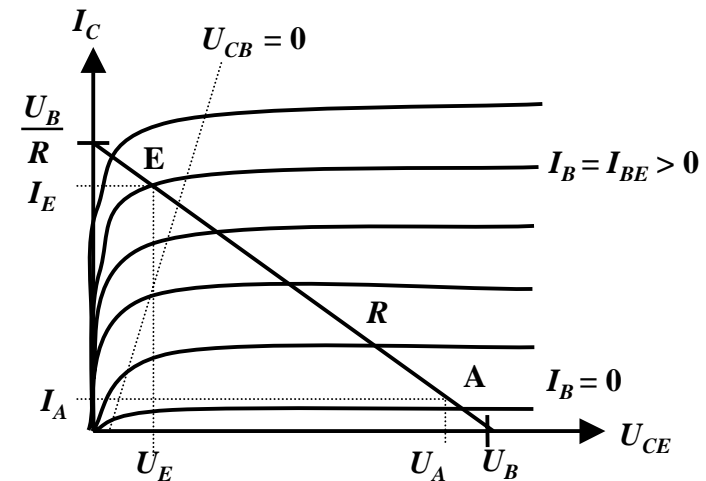
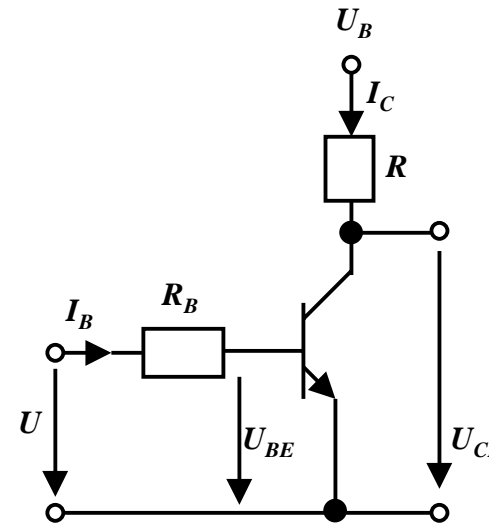




# Bipolartransistor als Schalter



- Schaltvorgang wird durch den Basisstrom  $I_B$  gesteuert
  - ⇒ Schalter Ein: Transistor leitet
  - ⇒ Schalter Aus: Transistor sperrt
- Die Arbeitspunkte werden so berechnet, daß sich der Transistor im Übersteuerungsbereich befindet



# MOS-Transistor als Schalter



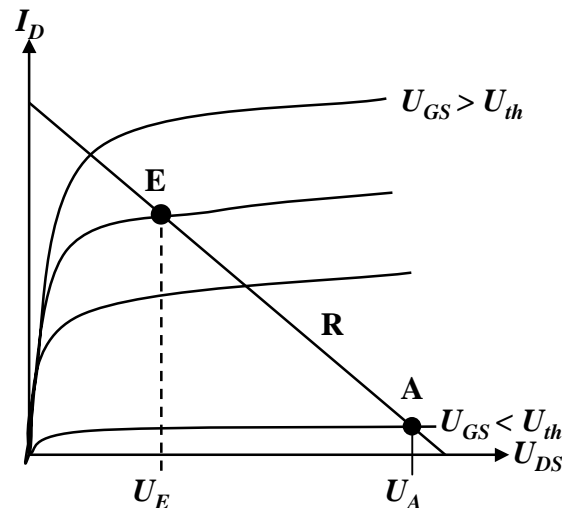
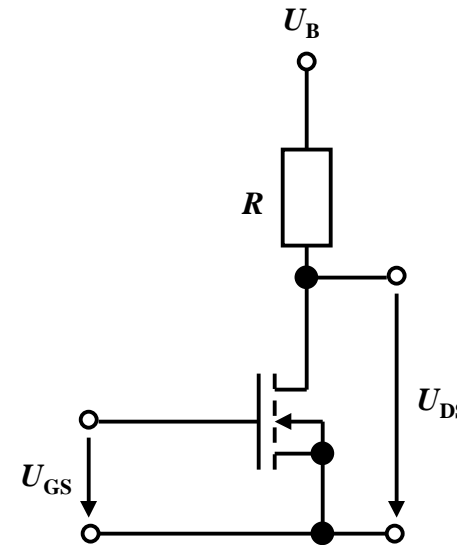
- **Hauptsächlich selbstsperrende Transistoren**

- ⇒ n-MOS und p-MOS

- ⇒ Verwendung wie bei Bipolartransistoren

- **Vorteil gegenüber Bipolaren Transistoren**

- ⇒ Die Ansteuerung benötigt keine Leistung



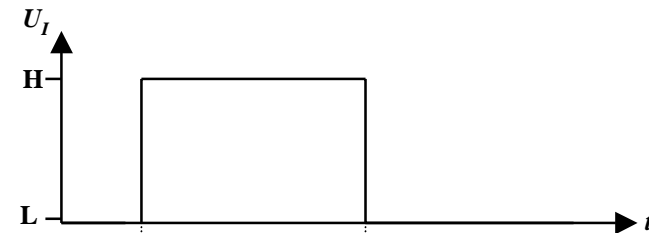
# Kenngrößen: Signalpegel

---

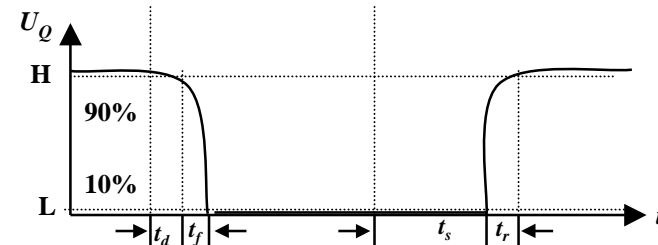
- **Die Signale nehmen nie genau GND oder die Versorgungsspannung an**
  - ⇒ **Ein Transistor ist kein idealer Schalter**
  - ⇒ **Übersprechen zwischen benachbarten Leitungen**
  - ⇒ **Der Eingang des nachfolgenden Transistors hat Auswirkungen auf den vorgehenden**
- **Solche Signale nennt man Störspannungen**
- **Zur Eliminierung der Störspannungen definiert man Pegel**
  - ⇒ **High: die Spannung ist hoch**
  - ⇒ **Low: die Spannung ist nieder**
- **Die Pegel werden willkürlich logischen Werten zugeordnet**
  - ⇒ **High ist logisch „1“**
  - ⇒ **Low ist logisch „0“**
  - ⇒ **bei negativer Logik sind diese Pegel umgekehrt**

# Kenngrößen: Signalübergangszeit und -laufzeit

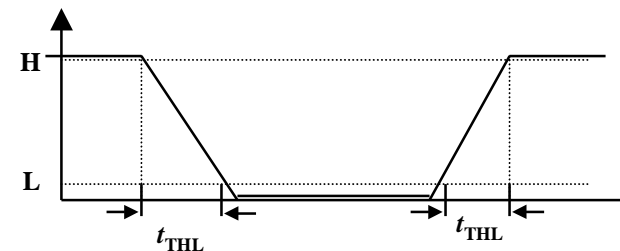
- **Signalübergangszeit**
  - ⇒ Flankensteilheit
  - ⇒ Übergang von „H“ nach „L“ oder „L“ nach „H“
- **Signallaufzeit**
  - ⇒ Zeit die ein Signalimpuls vom Eingang der Schaltung bis Ausgang benötigt
- **Signalverformung**
  - ⇒ Da der Transistor im Sättigungsbereich betrieben wird, dauert der „H“ nach „L“ Übergang länger als der „L“ nach „H“ Übergang



idealer Rechteckimpuls am Eingang

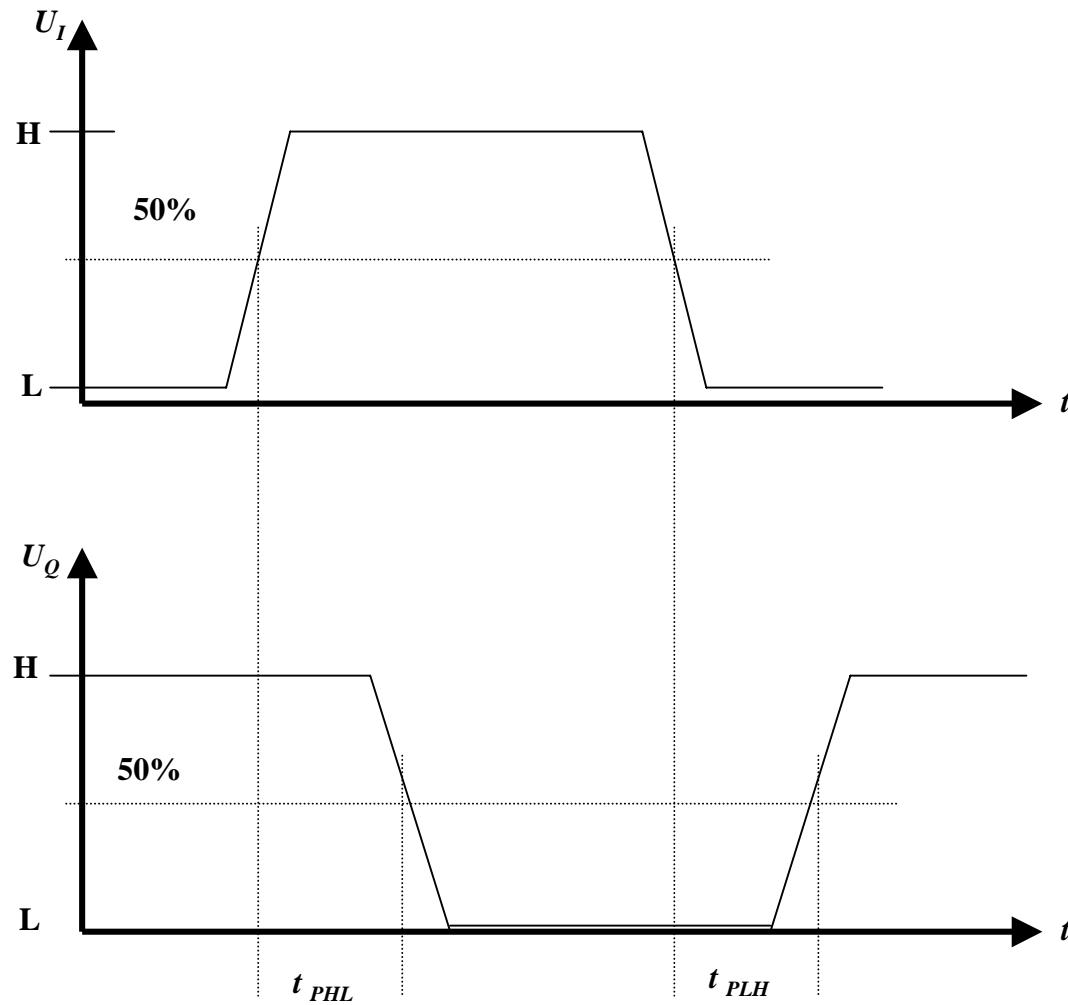


verformter Rechteckimpuls am Ausgang



linearisierter Ausgangsimpuls

# Schaltvorgang eines Inverters



## 3.6 Verknüpfungsglieder mit Bipolaren Transistoren

---



### ○ Schaltkreisfamilien

⇒ **TTL** Transistor-Transistor-Logic

- Betrieb im Übersteuerungsbereich

⇒ **I<sup>2</sup>L** Integrated Injection Logic

- Betrieb im Übersteuerungsbereich

⇒ **ECL** Emitter Coupled Logic

- Betrieb im aktiven Verstärkerbereich

⇒ **STTL** Schottky TTL

- Betrieb im aktiven Verstärkerbereich

# TTL-Schaltkreise

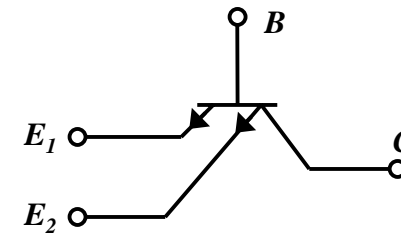
---

- **74xxx haben auch heute noch große Bedeutung**
  - ⇒ **geringe Schaltzeiten**
  - ⇒ **geringe Leistungsaufnahme**
  - ⇒ **große Zahl verschiedener Verknüpfungsglieder**
  - ⇒ **einheitliche Betriebsspannung (genormt auf +5V)**
  - ⇒ **genormte Signalpegel**
- **Verwendung auch als Bibliothek in Schaltkreis-Entwurfssystemen**

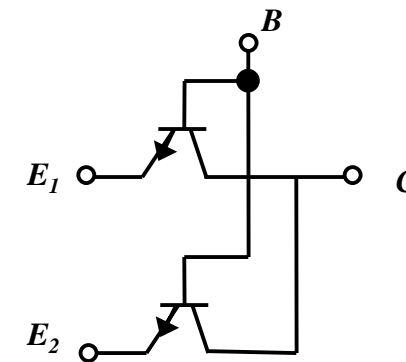
# Multi-Emitter-Transistoren



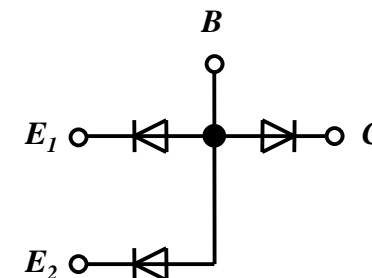
- **Transistor mit mehr als einem Emitter**
  - ⇒ nur in integrierten Bausteinen realisiert
  - ⇒ Emitter sind Eingänge
- **Normalbetrieb**
  - ⇒ mind. 1 Eingang auf „L“:
  - ⇒ Kollektor-Emitter-Strecke ist niederohmig
  - ⇒ BE-Diode leitend
- **Inversbetrieb**
  - ⇒ alle Eingänge auf „H“
  - ⇒ BE-Diode gesperrt
  - ⇒ BC-Diode in Durchlaßrichtung
- **Wirkung als UND-Verknüpfung**



Bei TTL-Schaltbildern



Ersatzschaltbild



Vergleich mit Diodengatter



# Grundschtaltung der Standard-TTL



## ○ Drei Ebenen

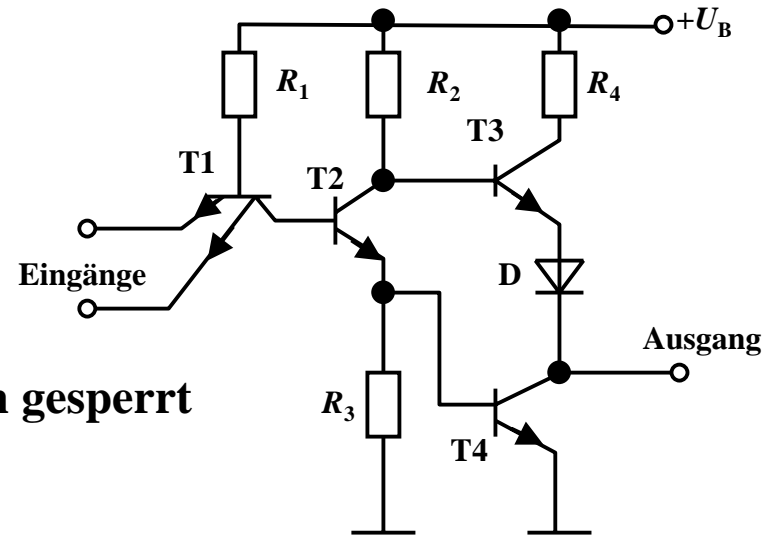
- ⇒ UND-Einfächerung T1
- ⇒ Phasenumkehrstufe T2
- ⇒ Gegentaktendstufe T3, T4

## ○ Mindestens ein Emitter auf „L“:

- ⇒ BE-Diode von T1 ist leitend
- ⇒ T2 wegen zu geringen Basistrom gesperrt
- ⇒ Emitterpotenzial von T2 = 0
- ⇒ T3 leitend, T4 gesperrt
- ⇒ Ausgang = „H“

## ○ Alle Emitter auf „H“:

- ⇒ BE-Diode von T1 gesperrt
- ⇒ BC-Diode von T1 in Durchlaßrichtung
- ⇒ T2 leitend
- ⇒ T4 leitend, T3 wegen Spannungsabfall an D gesperrt
- ⇒ Ausgang = „L“



# Lastfaktoren

---

- **Verknüpfungsglieder werden in Schaltnetzen miteinander verbunden**
  - ⇒ von einem Schaltglied werden andere Schaltglieder gesteuert
- **Typische TTL-Werte**
  - ⇒ bei „L“-Pegel ( $0V \leq U_{IL} \leq 0,8V$ )
    - es fließt ein Eingangsstrom von  $-I_{IL} \leq 1,6 \text{ mA}$
    - der Ausgangsstrom darf 16mA betragen
  - ⇒ bei „H“-Pegel ( $+2V \leq U_{IH} \leq 5V$ )
    - es fließt ein Eingangsstrom  $I_{IH} \leq 0,04 \text{ mA}$
    - der Ausgangsstrom darf 0,4 mA nicht übersteigen
- **Fan-out**
  - ⇒ **Belastbarkeit: Anzahl der ansteuerbaren Verknüpfungsglieder**
  - ⇒ **Bei TTL: Faktor 10**
- **Fan-in**
  - ⇒ **Faktor zur typischen Eingangslast einer Baustenfamilie**

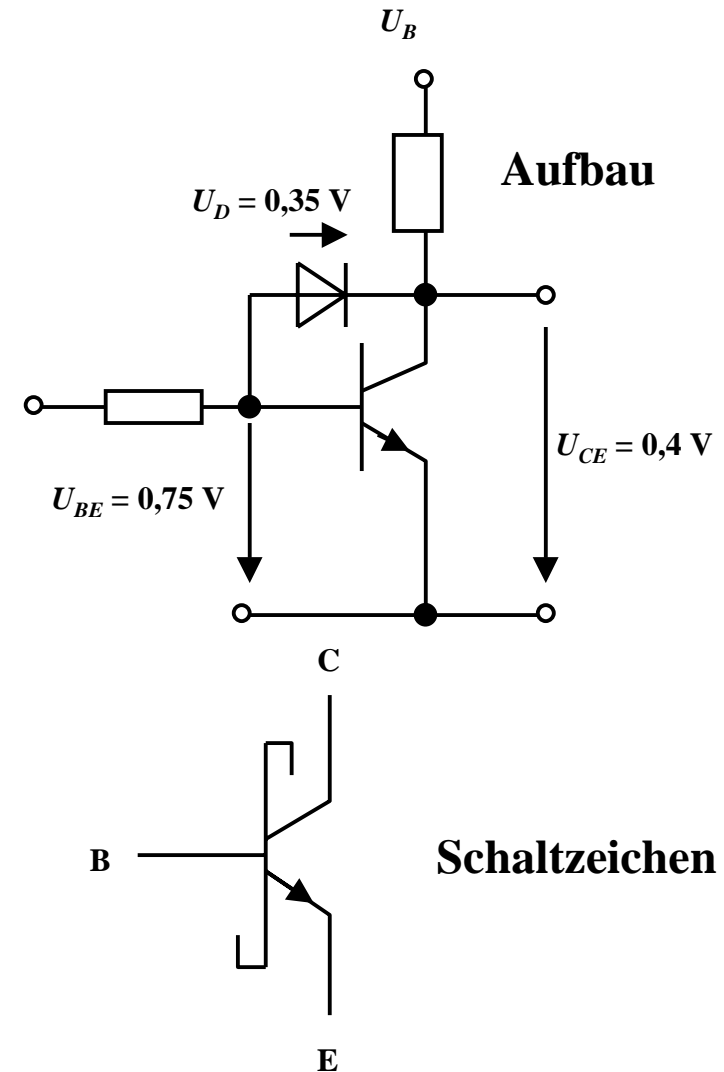
# Varianten von TTL-Schaltkreisen

---

- **Unterschiedliche Dimensionierung der Widerstände beeinflusst die Eigenschaften der Schaltungen**
- **Low-Power-TTL**
  - ⇒ **Widerstände sind hochohmig**
  - ⇒ **kleinerer Stromfluß**
  - ⇒ **geringere Leistungsaufnahme**
  - ⇒ **langsamer**
- **High-Speed-TTL**
  - ⇒ **Widerstände sind niederohmig**
  - ⇒ **größerer Stromfluß**
  - ⇒ **höhere Leistungsaufnahme**
  - ⇒ **schneller**

# Schottky TTL

- Transistoren werden nicht im Übersteuerungsbereich betrieben
  - ⇒ Schottky-Diode zwischen Basis und Kollektor
  - ⇒ Schwellenspannung der Schottky-Diode bei 0,35 V
  - ⇒ nach der Maschenregel beträgt die Spannung  $U_{CE}$  0,4 V
  - ⇒ die steile Kennlinie der Diode verhindert ein weiteres Durchsteuern



# Vergleich der TTL-Baureihen

TTL - Baureihe	Verzögerungszeit je Gatter $t_p$ in ns	Verlustleistung je Gatter $P_v$ in mW	Leistungs-Zeit- Produkt $P_v t_p$ in pJ
74ALS	4,5	1,2	5,4
74F	2,3	4	9,2
74LS	9,5	2	19
74AS	1,5	22	33
74L	33	1	33
74S	3,5	19	66,5
74	10	10	100

**74ALS** Advanced-Low-Power-Schottky-TTL (weiterentwickelte LS-TTL)

**74F** Fast-TTL (schnelle S-TTL)

**74LS** Low-Power-Schottky-TTL (S-TTL mit niedriger Verlustleistung)

**74AS** Advanced-Schottky-TTL (weiterentwickelte S-TTL)

**74 L** Low-Power-TTL (TTL mit niedriger Verlustleistung)

**74 S** Schottky-TTL (schnelle TTL)

**74** TTL (Standard-TTL)

# Vergleich der TTL-Baureihen

## Vergleich zwischen TTL-Baureihen und Lastfaktoren

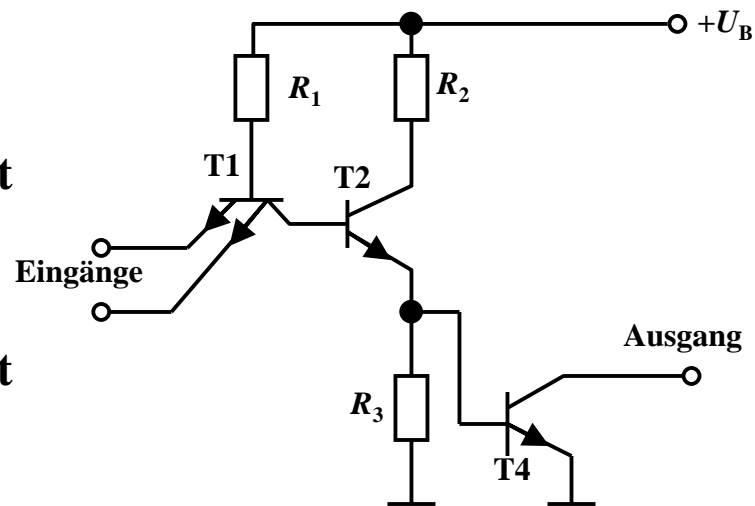
1 TTL-Gatter der Baureihe treibt max.	Anzahl der TTL-Eingänge in der Baureihe						
	74ALS	74F	74AS	74LS	74L	74S	74
74ALS	20	20	10	20	40	10	10
74F	25	25	10	25	48	10	12
74AS	50	50	10	50	100	10	10
74LS	20	50	8	20	40	10	5
74L	10	10	1	10	20	1	2
74S	50	50	10	50	100	10	12
74	20	20	8	40	40	8	10

## Stromgrenzwerte von TTL-Gattern verschiedener Baureihen

TTL-Baureihe	-IOH in $\mu\text{A}$	IOL in $\mu\text{A}$	I <sub>IH</sub> in $\mu\text{A}$	-I <sub>IL</sub> in $\mu\text{A}$
74LS	400	8000	20	400
74L	200	3600	10	180
74S	1000	20000	50	2000
74	400	16000	40	1600

# Open-Collector

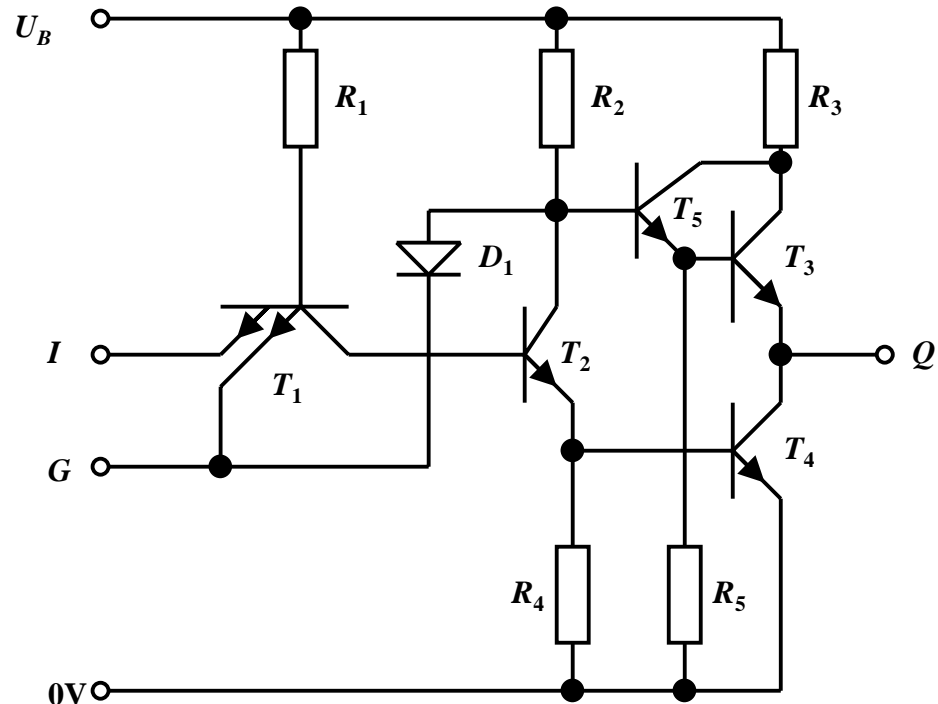
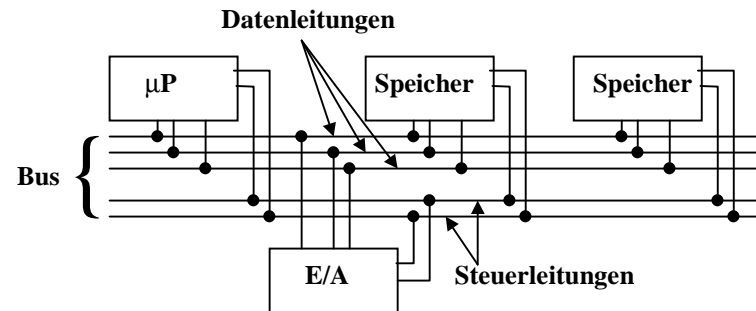
- Der Kollektor des Transistors  $T_4$  wird direkt nach Außen geführt
  - ⇒ Anschluß des Verbrauchers an die Betriebsspannung über einen Arbeitswiderstand
- Anwendung
  - ⇒ Schalten von Verbrauchern mit höheren Lasten
  - ⇒ Relais, Leuchtdioden, Lampen
  - ⇒ Schalten von Verbrauchern mit höheren Betriebsspannungen



# Tri-State Ausgang

- Spezielle Ansteuerung der Gegentaktendstufe so daß beide Transistoren sperren  
 ⇒ der Ausgang wird hochohmig
- Zusammenschaltung mehrerer Ausgangsleitungen an einer gemeinsamen Leitung  
 ⇒ Busse

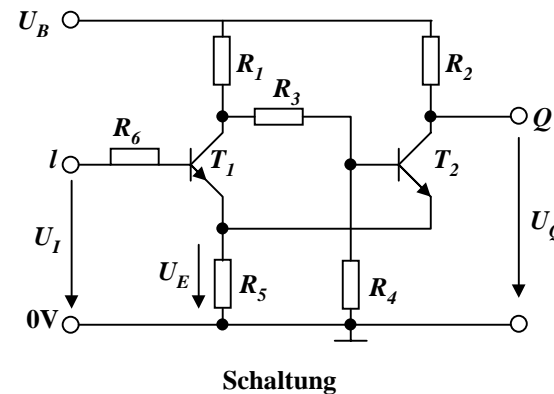
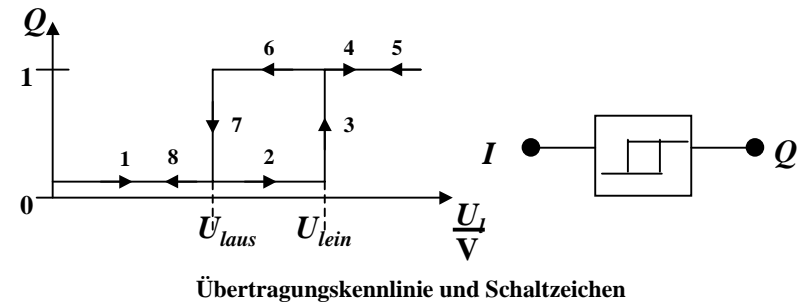
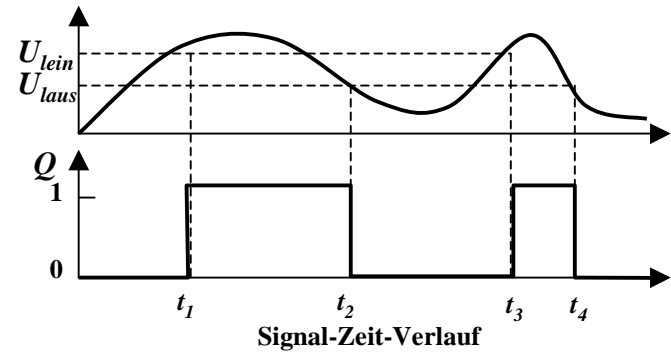
$G$	$I$	$Q$
H	L	H
H	H	L
L	L	hochohmig
L	H	hochohmig





# Schmitt-Trigger

- Schaltungen mit einem Analogeingang und einem Digitalausgang
- Prinzip
  - ⇒ die Arbeitspunkte der beiden Transistoren beeinflussen sich gegenseitig
- Anwendungen
  - ⇒ Impulsformung und Signalregenerierung
  - ⇒ Erhöhung der Flankensteilheit
  - ⇒ Unterdrückung von Störsignalen



# ECL-Schaltkreise

## ○ Emitter-gekoppelte Logik

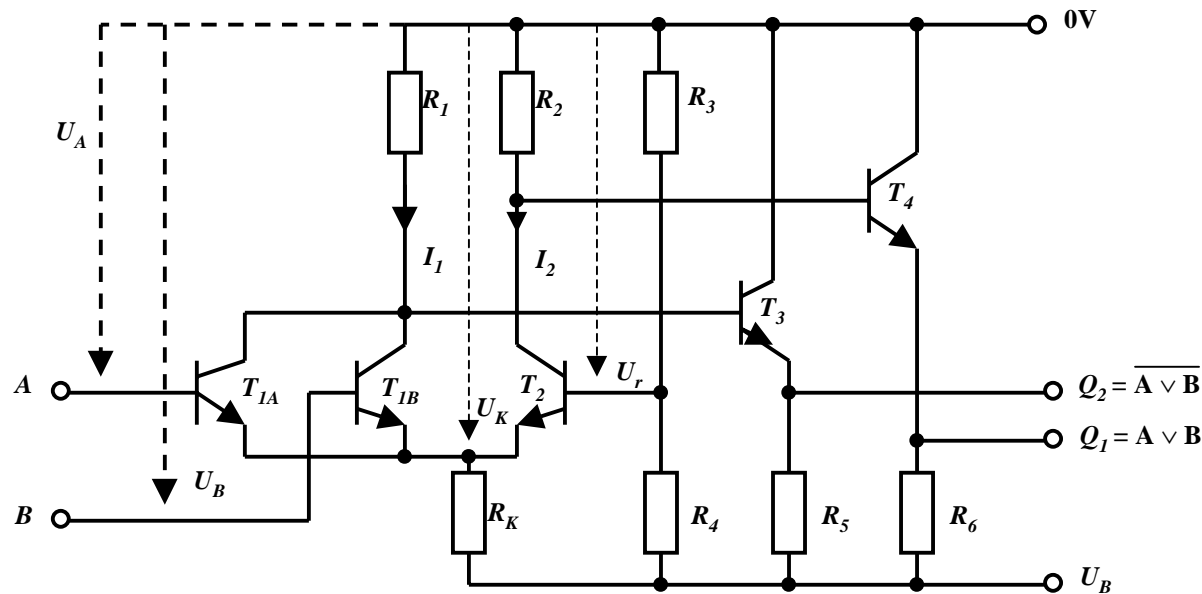
- ⇒ Emitterfolger
- ⇒ Differenzverstärker
- ⇒ Transistoren arbeiten nicht im Übersteuerungsbereich
- ⇒ kleine Schaltzeiten
- ⇒ hoher Leistungsverbrauch

## ○ Geringer Störabstand

- ⇒ „H“ 0,8V bis 0,7V
- ⇒ „L“ 1,7V bis 1,5V

## ○ Anwendung

- ⇒ Großrechner-technik



# I<sup>2</sup>L-Schaltkreise

---

## ○ Integrierte Injektionslogik

- ⇒ **Widerstände werden durch Transistoren ersetzt**
- ⇒ **Konstantstromquellen**
- ⇒ **extrem kleiner Flächenbedarf, da Transistoren weniger Fläche benötigen als Widerstände**
- ⇒ **kleine Leistungsaufnahme**
- ⇒ **geringe Versorgungsspannung ( $< 1\text{V}$ )**
- ⇒ **Spannungshub und Störsicherheit sind sehr klein ( $< 0,6\text{V}$ )**

## ○ Anwendung

- ⇒ **hochintegrierte Schaltung**
- ⇒ **heute kaum Bedeutung, da CMOS inzwischen noch besser integrierbar ist**

## 3.7 Verknüpfungsglieder mit unipolaren Transistoren

---

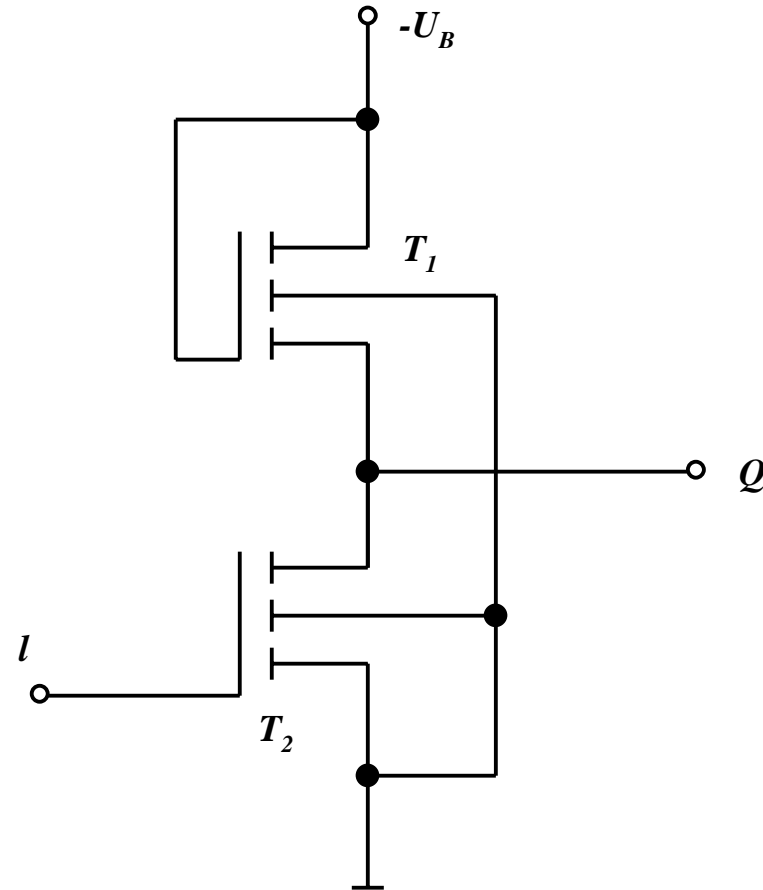


- **Bausteine mit hochintegrierten digitalen Schaltungen werden heute meist in MOS-Technologie realisiert**
  - ⇒ **hohe Integration**
  - ⇒ **einfache Herstellung**
  - ⇒ **geringere Leistungsaufnahme (speziell CMOS)**
- **Verknüpfungsglieder**
  - ⇒ **PMOS Schaltkreise**                      **mit p-Kanal FET**
  - ⇒ **NMOS Schaltkreise**                    **mit n-Kanal FET**
  - ⇒ **CMOS Schaltkreise**                    **mit p-Kanal und n-Kanal FET**

# PMOS Schaltkreise



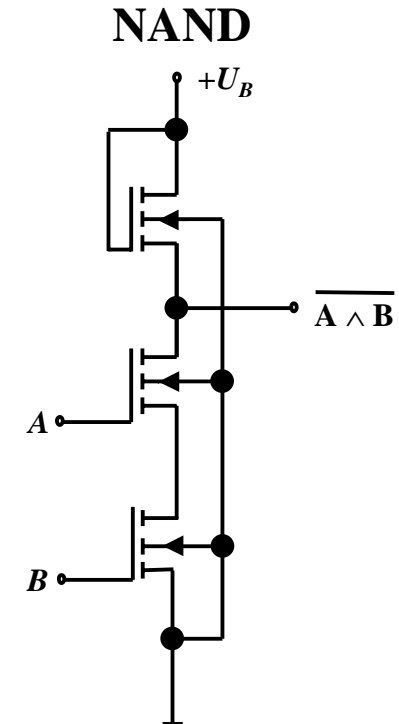
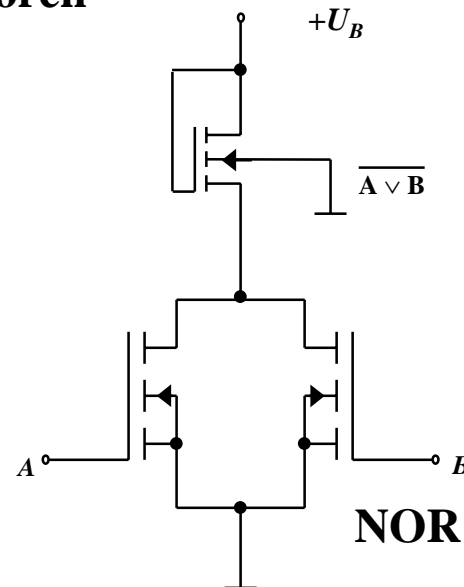
- **Selbstsperrender PMOS-Transistor ( $T_2$ )**
  - ⇒ **der Transistor  $T_1$  wirkt wie ein Widerstand**
- **Vorteile**
  - ⇒ **einfache Herstellbarkeit**
- **Nachteile**
  - ⇒ **hohe Schwellspannung (5V)**
  - ⇒ **hohe Versorgungsspannung (-9 bis -20V)**
  - ⇒ **relativ große Schaltzeit**
- **Realisierung der Logik durch Parallel- und Serienschaltung der Transistoren**



# NMOS Schaltkreise



- **Selbstsperrender NMOS-FET**
- **Vorteile**
  - ⇒ **geringere Schaltzeiten**
  - ⇒ **höhere Packungsdichte**
  - ⇒ **geringere Betriebsspannung**
  - ⇒ **geringerer Leistungsverbrauch**
- **Realisierung der Logik durch Parallel- und Serienschaltung der Transistoren**



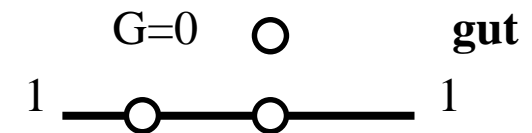
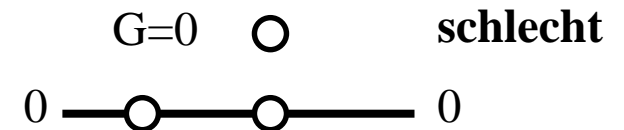
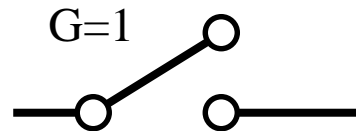
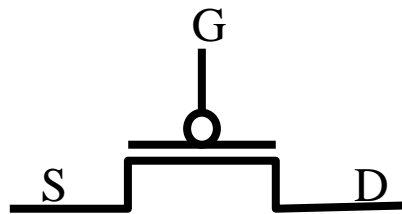
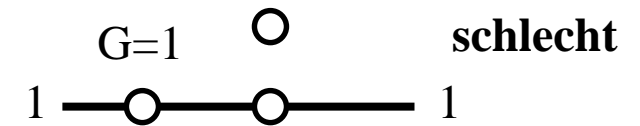
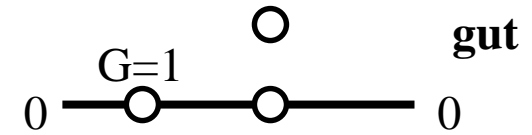
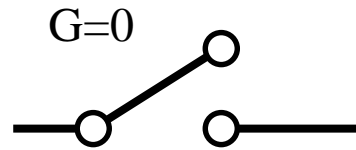
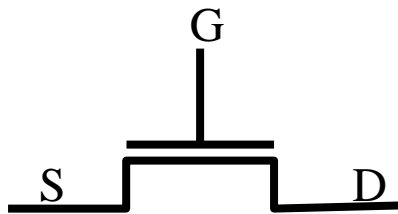
## 3.8 CMOS Schaltkreise

---



- **Complementary Metal Oxide Transistor**
  - ⇒ **Selbstsperrende NMOS und PMOS FET**
- **NMOS und PMOS-FETs können nicht beliebig an die Versorgungsspannung bzw. an GND geschaltet werden**
  - ⇒ **die Stärke der „0“ und der „1“ kann variieren**
  - ⇒ **die Stärke entspricht der „Fähigkeit“ als Quelle oder Senke von Elektronen zu dienen**
  - ⇒ **POWER und GND sind die stärksten Quellen bzw. Senken**
- **NMOS- und PMOS-Transistoren schalten unterschiedlich**
- **der Schalter ist unterschiedlich gut, je nachdem ob zwischen Source und Drain eine „1“ oder eine „0“ geschaltet wird. Der Grund dafür ist der Spannungsabfall beim Übergang**
- **ACHTUNG: In den folgenden Folien wird die amerikanische Notation der Transistoren verwendet!**

# Der MOS-Transistor als Schalter

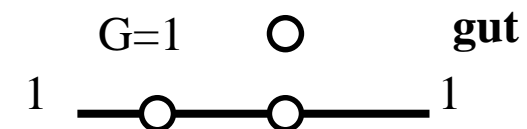
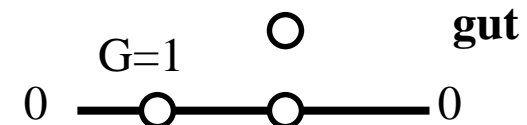
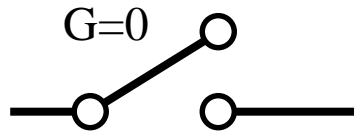
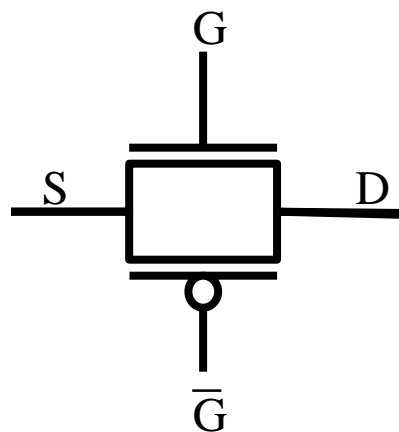




# Komplementärschalter (Transmission Gate)



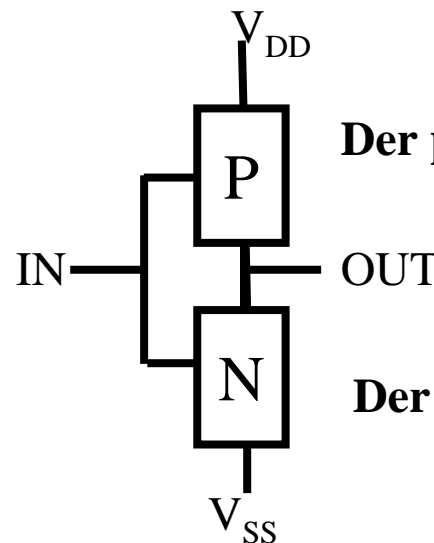
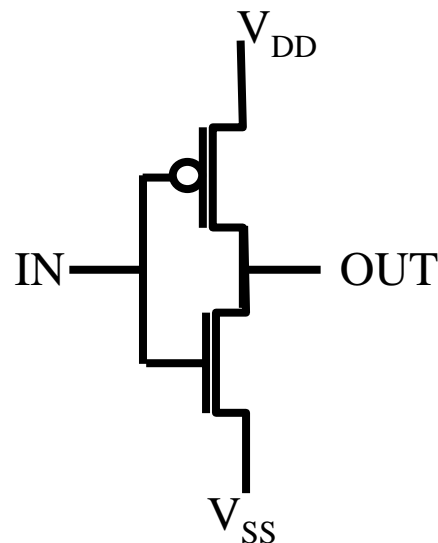
- Die Übertragungscharakteristika bei Transmission Gates sind jetzt in beiden Fällen gut
- Trotzdem sollte man nicht mehrere Komplementärschalter hintereinanderschalten
- Zur Steuerung benötigt man beide Signale  $G$  und  $\bar{G}$ .



# CMOS-Logik



- CMOS steht für Complementary MOS und bedeutet, daß immer ein Transistor von POWER nach GROUND gesperrt ist
  - ⇒ Es fließt ein minimaler Strom.
- CMOS-Inverter
- Ein nMOS und ein pMOS Transistor werden in Reihe geschaltet.
  - ⇒ Der pMOS-Transistor leitet, wenn eine „0“ anliegt und sperrt bei einer „1“
  - ⇒ Der nMOS-Transistor sperrt, wenn eine „0“ anliegt und leitet bei einer „1“



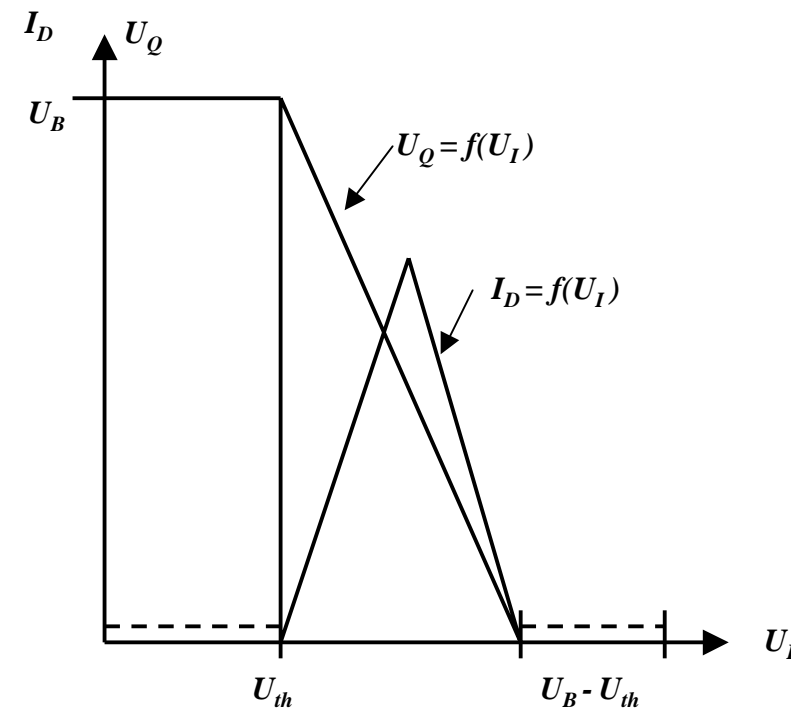
Der pMOS-Transistor leitet eine „1“ gut

Der nMOS-Transistor leitet eine „0“ gut

# Schaltverhalten eines CMOS-Gatters



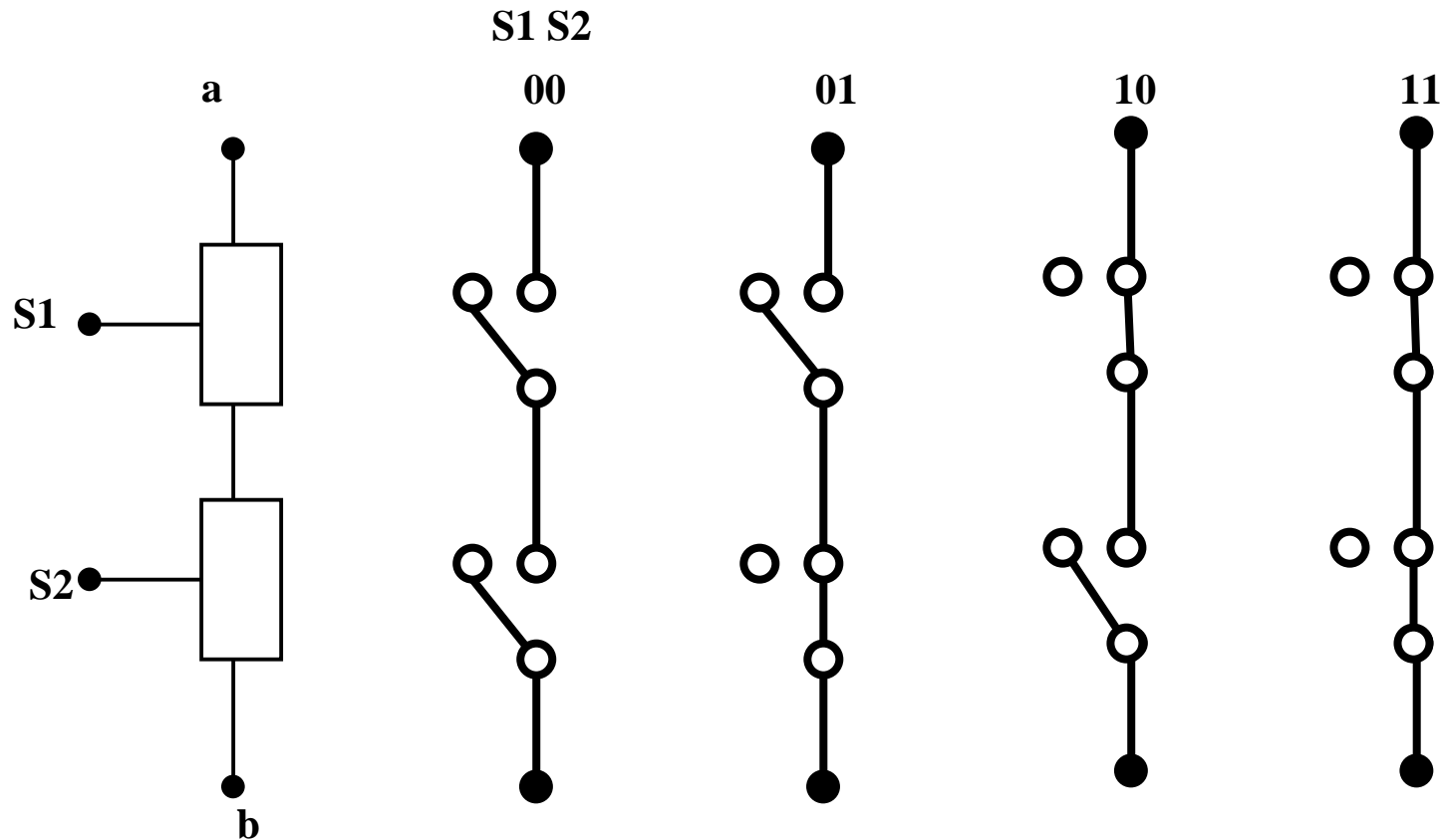
- bei CMOS Schaltkreisen ist die statische Verlustleistung sehr gering
  - ⇒ bei  $U_B = 5\text{V}$  und  $I_D < 10\text{ nA}$  gilt  $P < 50\text{ nW}$
- beim Umschalten ist ein Transistor noch nicht voll gesperrt, während ein Transistor bereits leitend wird



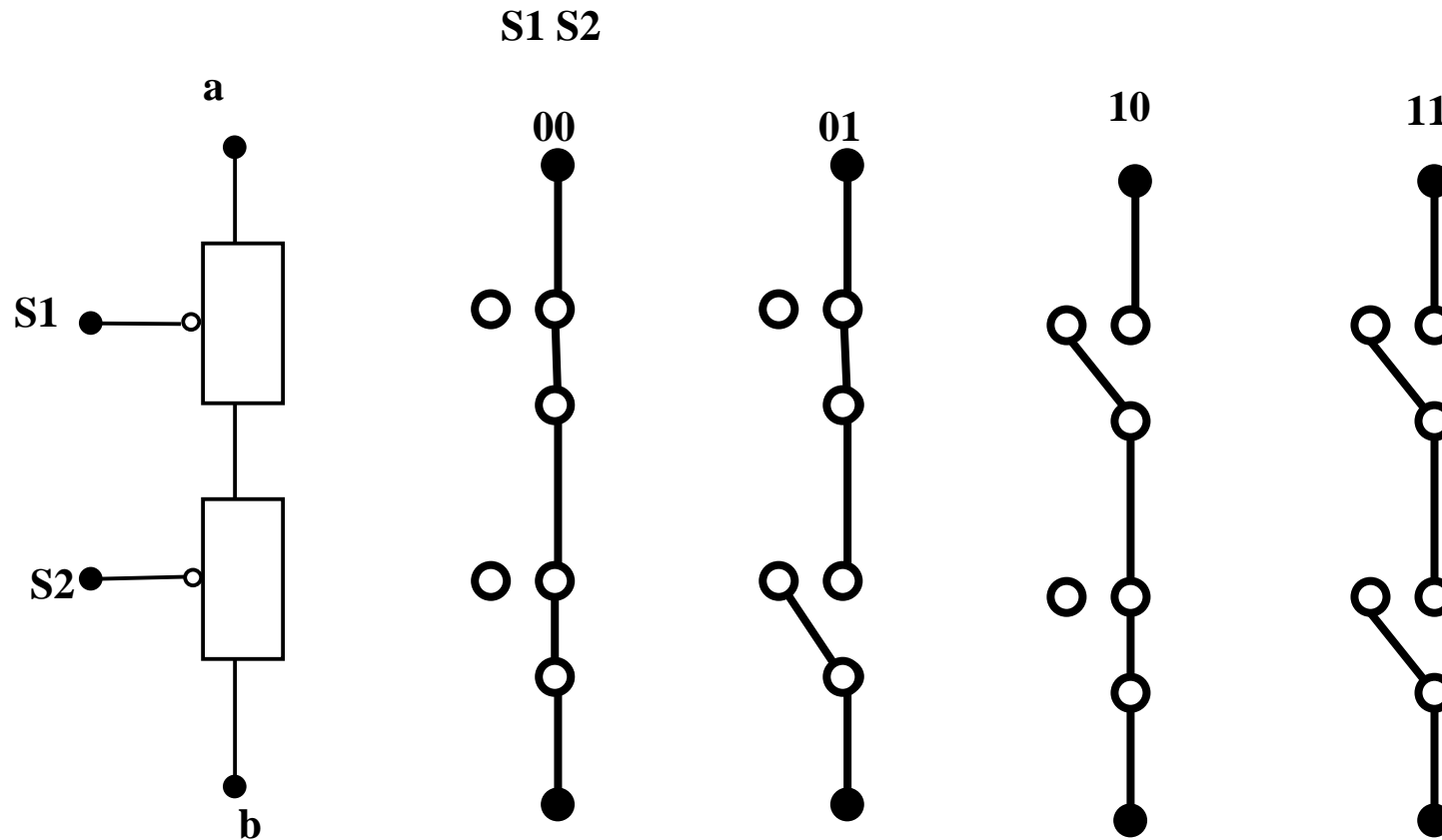
# nMOS und pMOS-Grundsaltungen



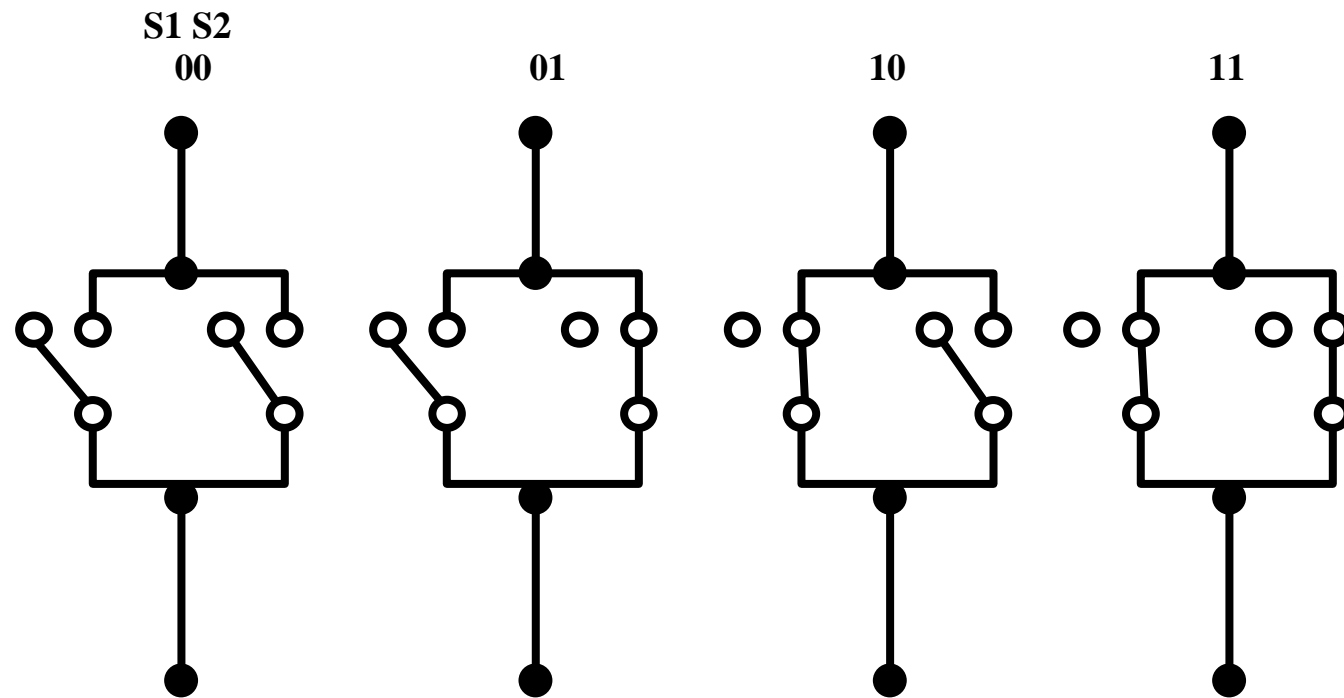
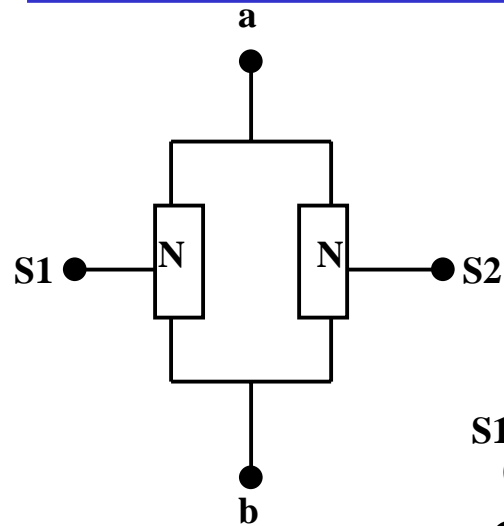
## ○ Reihenschaltung von nMOS-Transistoren



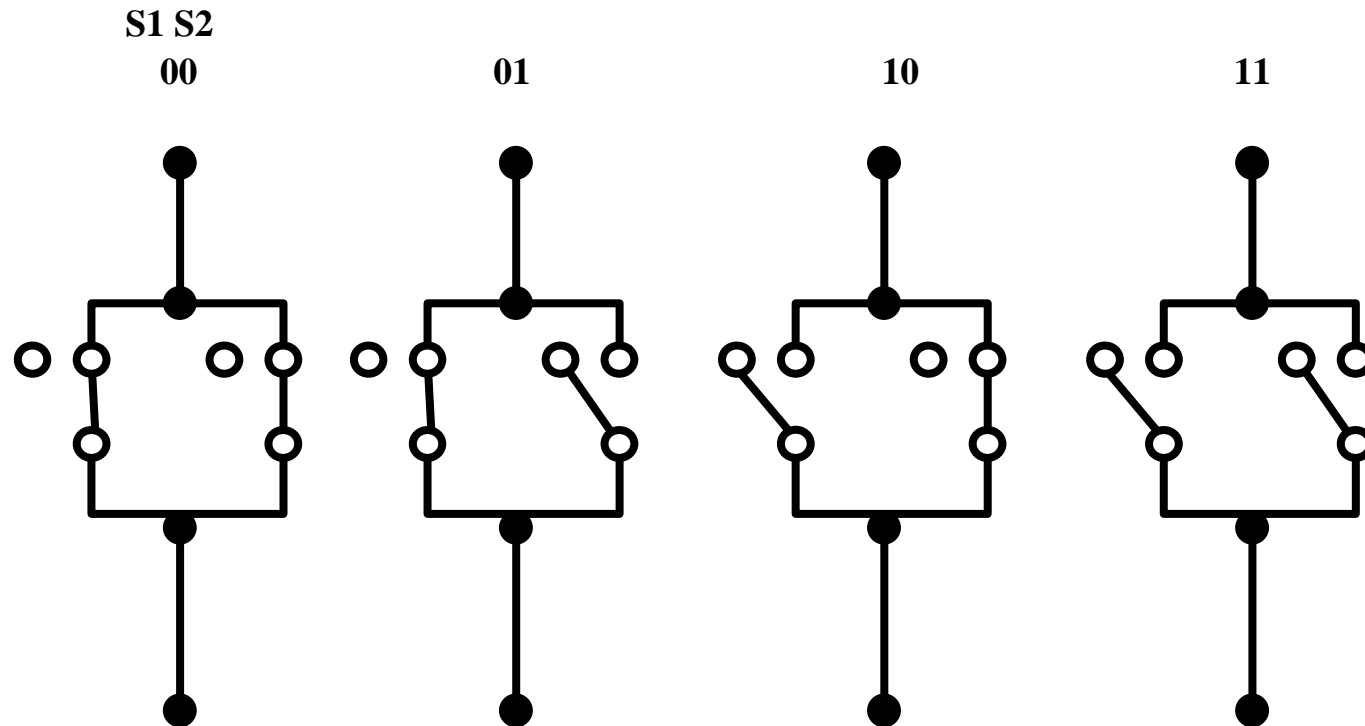
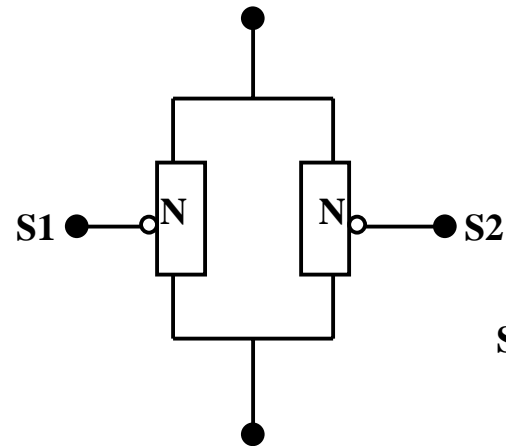
# Reihenschaltung von pMOS-Transistoren



# Parallelschaltung von nMOS-Transistoren



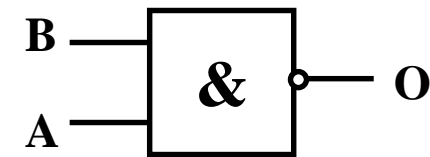
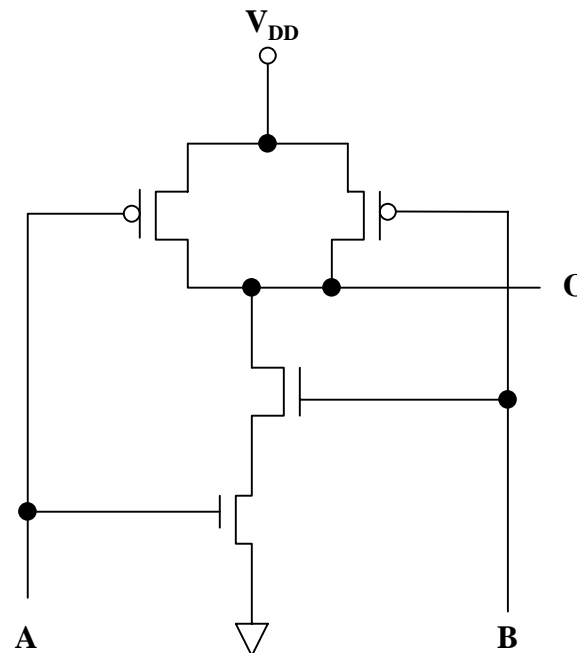
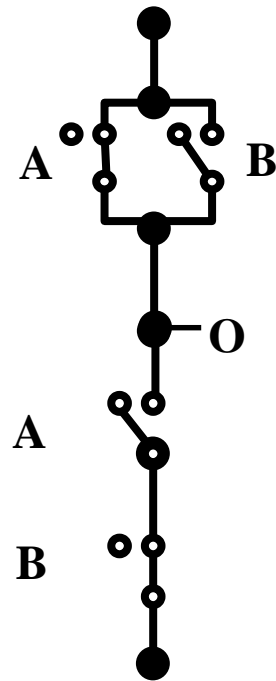
# Parallelschaltung von pMOS-Transistoren



# Das NAND-Gatter

- Das NAND-Gatter wird aus den nMOS- und pMOS-Grundsaltungen gebildet.
- Die Transistoren werden stets so benutzt, daß sie gut leiten.
  - ⇒ die pMOS- Transistoren schalten die „1“
  - ⇒ die pMOS- Transistoren schalten die „0“

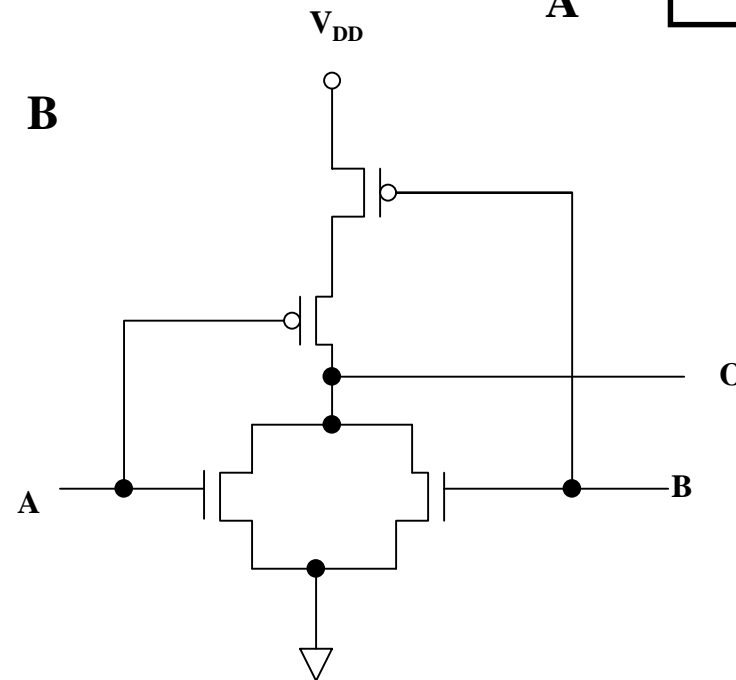
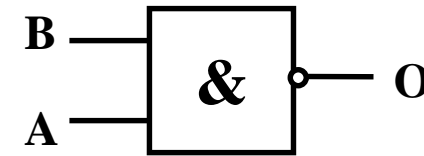
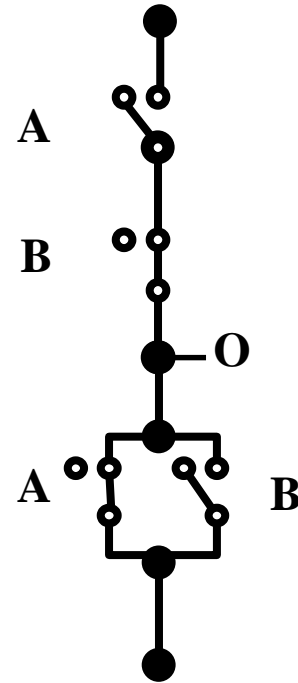
A	B	O
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0





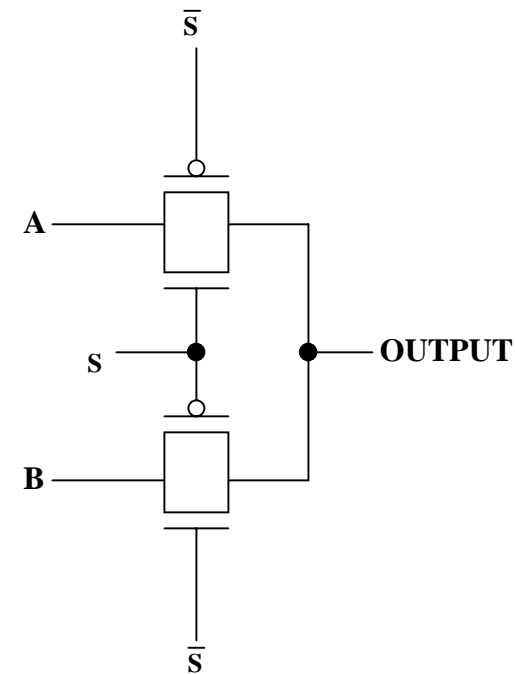
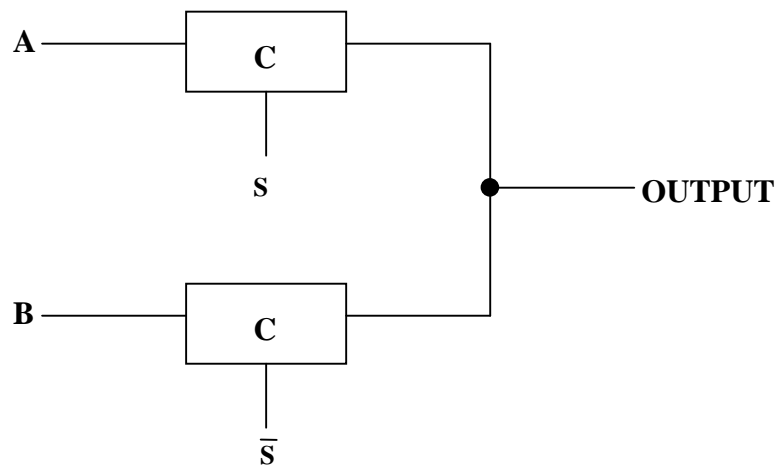
# Das NOR-Gatter

A	B	O
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



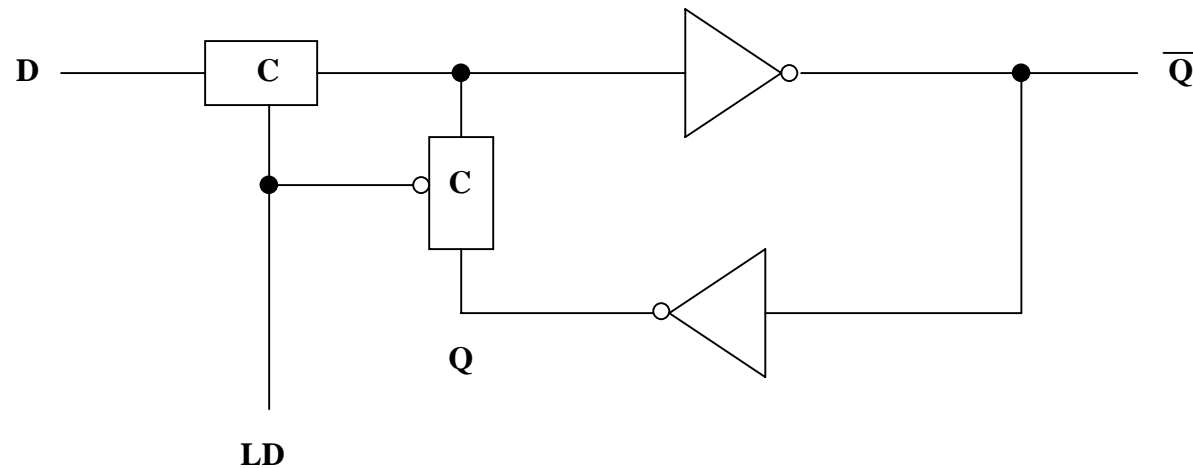
# Multiplexer

- Multiplexer können aus Komplementärschaltern aufgebaut werden.
- „0“ und „1“ werden gleich gut übertragen
- Das Steuersignal wird positiv und negiert benötigt
- Schaltbild des Multiplexers

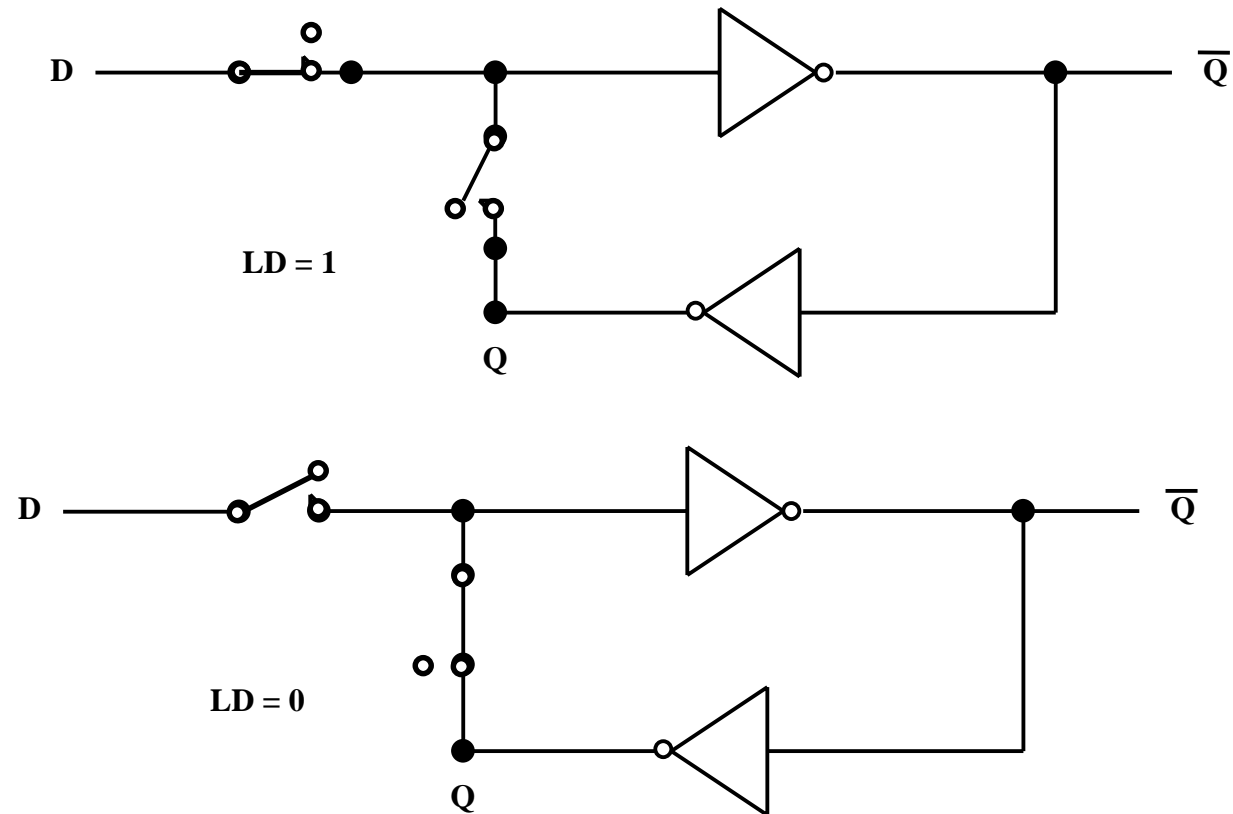


# Speicher

- Auch ein Flipflop kann aus den bisher behandelten CMOS-Strukturen aufgebaut werden.
- Man benötigt zwei Inverter und einen Multiplexer.
- Das Flipflop besitzt Latch-Verhalten:
- Die Ausgabe folgt der Eingabe, wenn  $LD=1$
- Die Ausgabe speichert den letzten Wert, wenn  $LD=0$
- Schaltbild:



# Schaltverhalten des Speichers

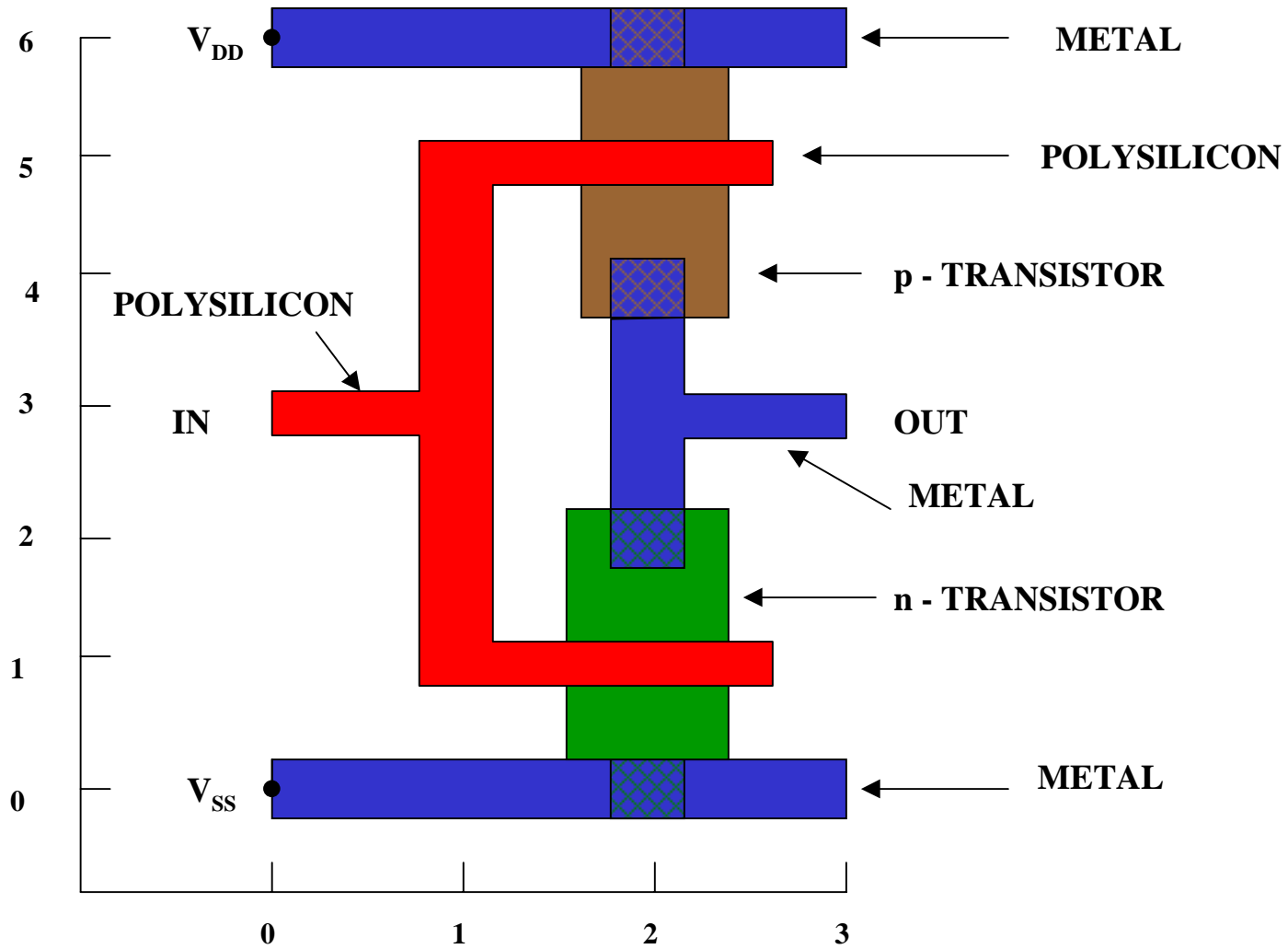


# Physikalische Darstellung von MOS-Schaltkreisen

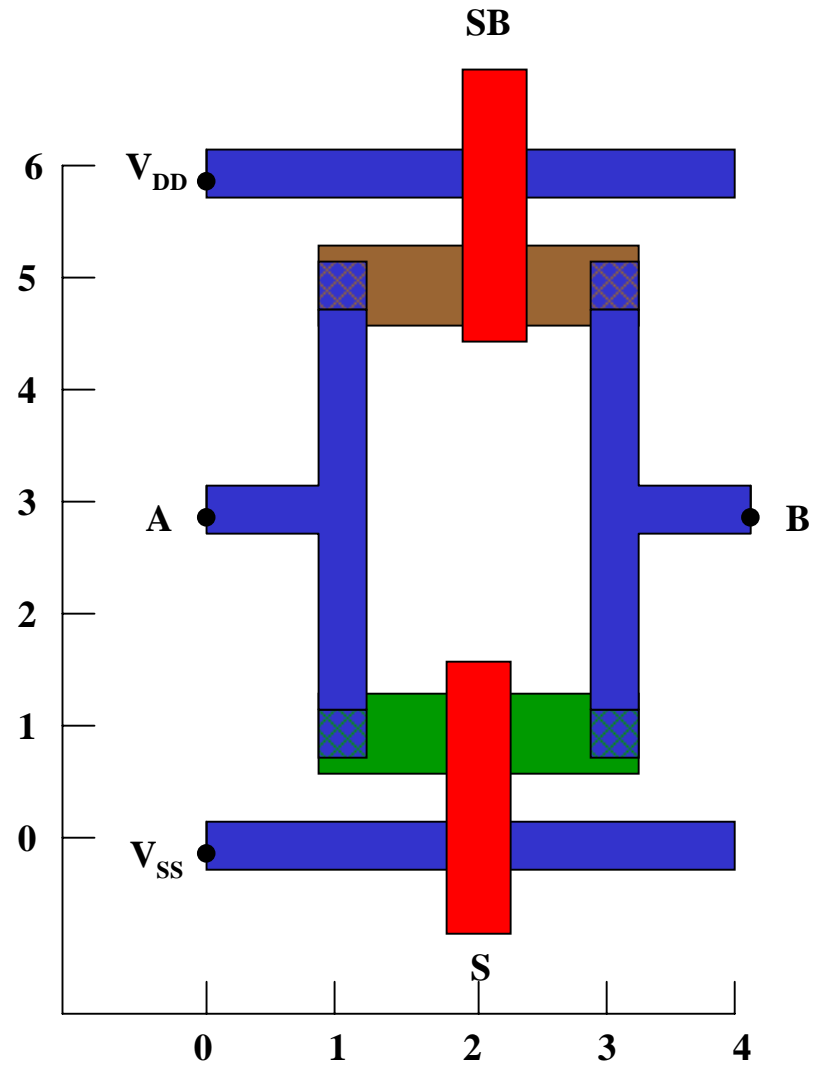
---

- Die physikalische Darstellung von MOS-Schaltkreisen wird benutzt um zu beschreiben, wie der physikalische Aufbau einer integrierten Schaltung ist. Im Prinzip können daraus automatisch die Belichtungsmasken erstellt werden.
- Die einzelnen Transistoren entstehen durch Übereinanderlegen von Schichten
  - ⇒ **p-Diffusion** (positiv dotiert)
  - ⇒ **n-Diffusion** (negativ dotiert)
  - ⇒ **Polysilizium** (Gate)
  - ⇒ **Metall1** und **Metall2**
  - ⇒ **Kontakte**

# Beispiel Inverter



# Beispiel Komplementärschalter



# Sprachliche Beschreibung des Layouts eines Komplementärschalters

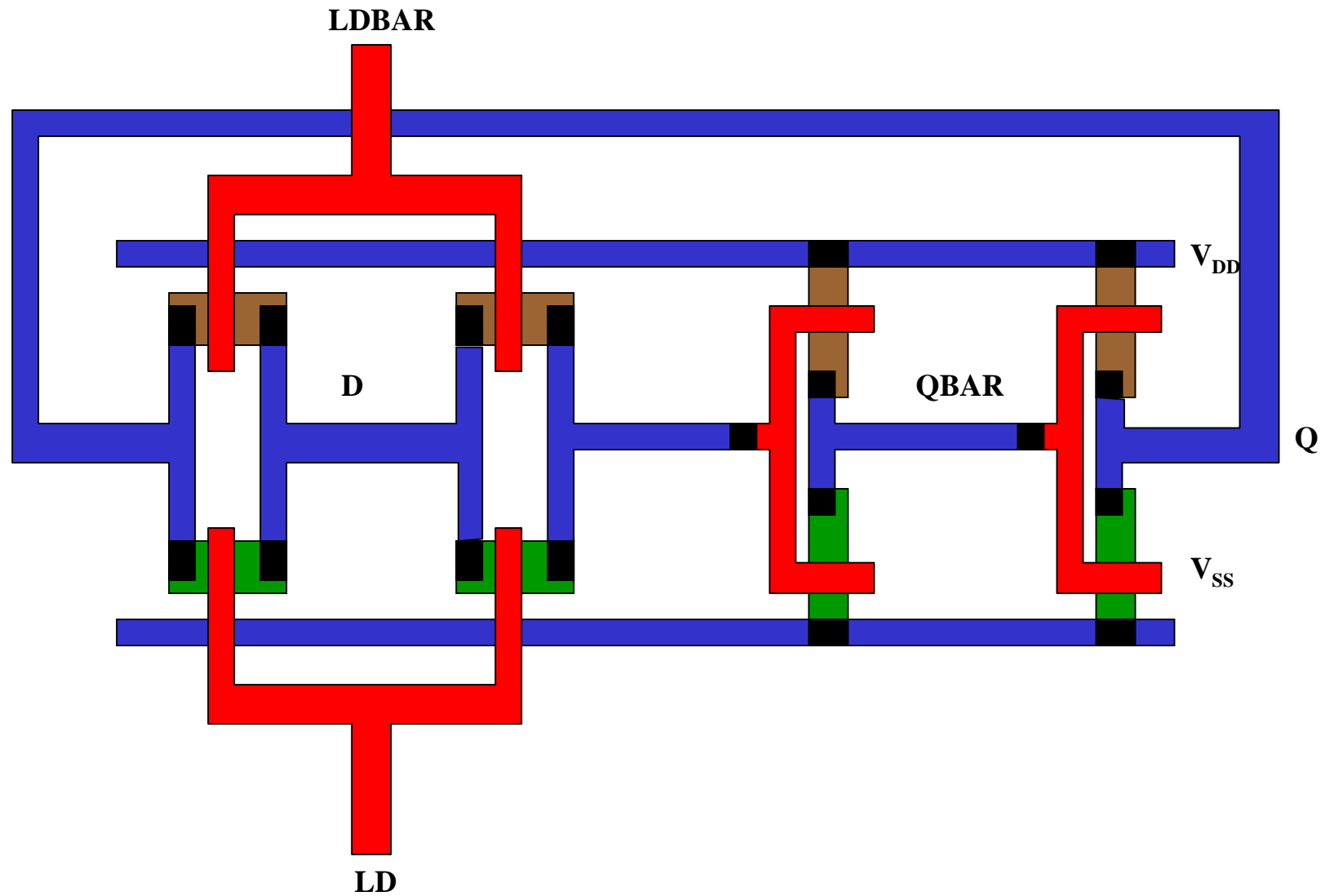
---

```
begin tg
t1: device n (2,1) or=east
t2: device p (2,5) or=east
      wire alum (0,0)(4,0)
      wire alum (0,6)(4,6)
      wire poly (2,-1)(2,1)
      wire poly (2,7)(2,5)
      wire alum (1,1)(1,5)
      wire alum (3,1)(3,5)
      wire alum (0,3)(1,3)
      wire alum (3,3) (4,3)
      contact md (1,1)
      contact md (3,1)
      contact md (1,5)
      contact md (3,5)

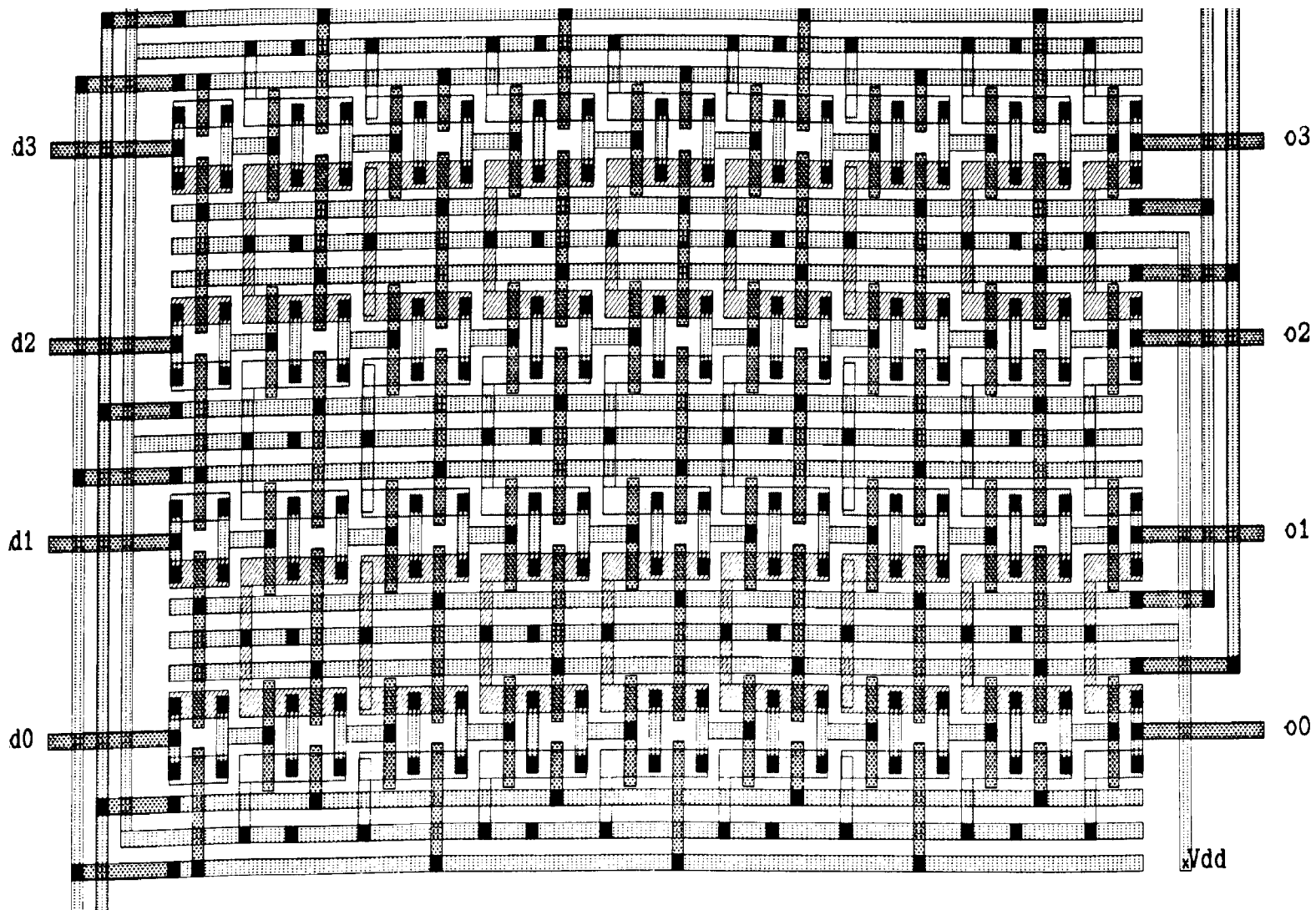
end
```



# Beispiel Flipflop



# Beispiel Schieberegister

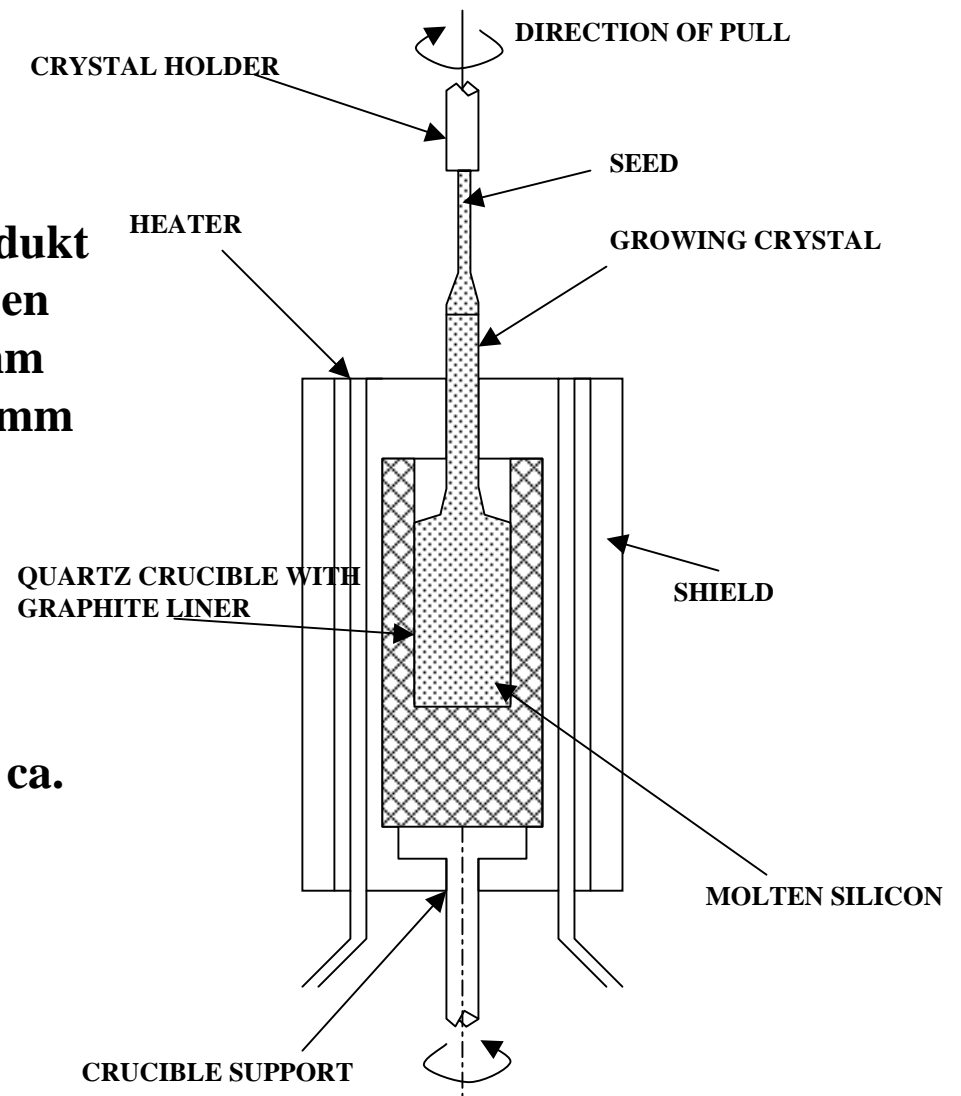


# 4 Der CMOS-Fertigungsprozeß

## 4.1 Herstellung von Wafern

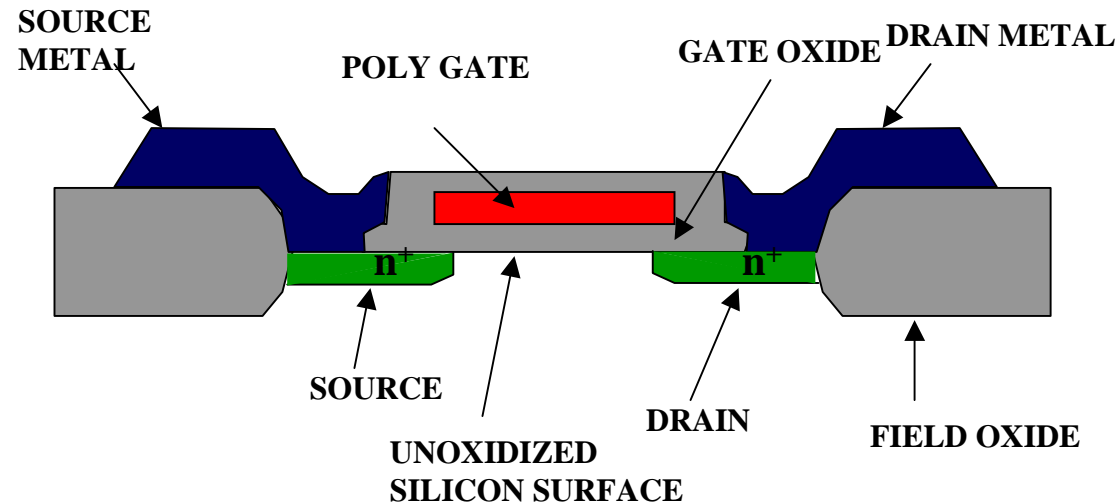
In diesem Abschnitt folgt eine Übersicht, wie CMOS-Schaltungen gefertigt werden. Das Ausgangsprodukt sind monokristalline Siliziumscheiben deren Dicke zwischen 0.25 und 1 mm und deren Durchmesser 75 bis 150 mm beträgt. Diese Scheiben nennt man Wafer

- Monokristallin bedeutet, daß das Silizium in einer möglichst reinen Kristallstruktur erstarrt. Der Schmelzpunkt von Silizium beträgt ca. 1425 °C
- Heute wird meist die Czochralski-Methode angewandt bei der die Wachstumsrate ca. 30 bis 180 mm/Stunde beträgt



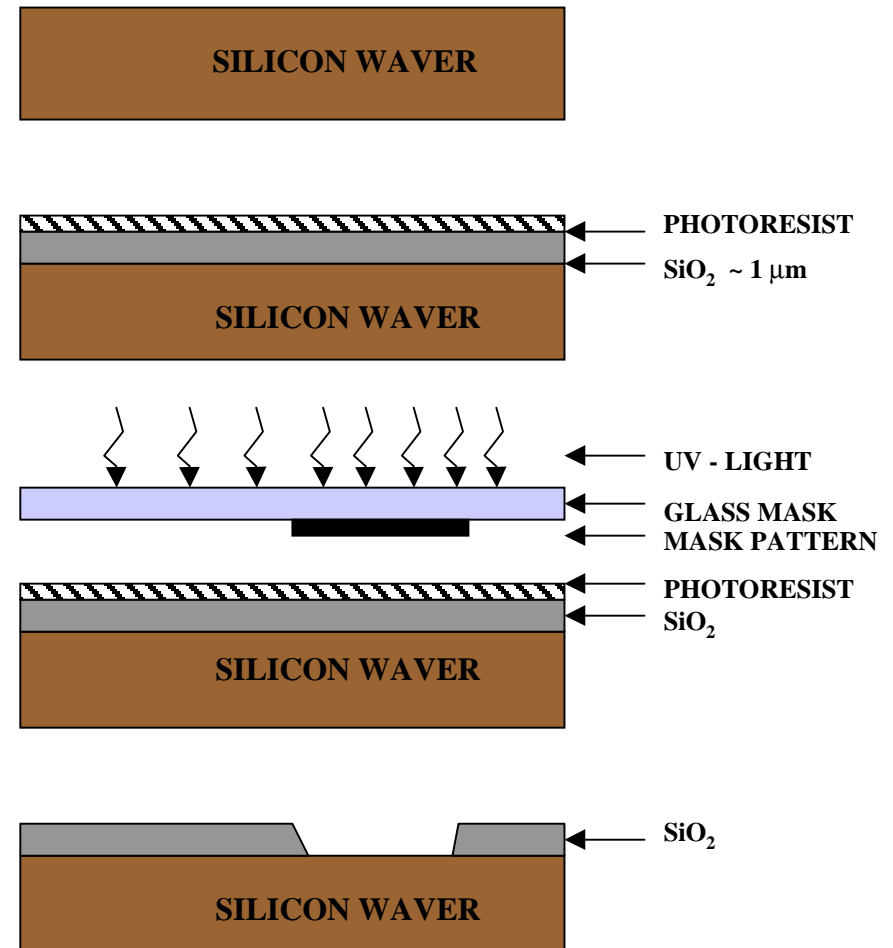
# Oxydation

- Siliziumoxyd ( $\text{SiO}_2$ ) ist ein guter Isolator. Es wird erzeugt, indem der Wafer einer oxydierenden Umgebung ausgesetzt wird
- Wasserdampf bei  $900^\circ\text{C}$  bis  $1000^\circ\text{C}$  (schnelle Oxydierung)
- Sauerstoff bei  $1200^\circ\text{C}$  (langsame Oxydierung)
- $\text{SiO}_2$  besitzt etwa das doppelte Volumen von Silizium und es wächst sowohl vertikal als auch horizontal



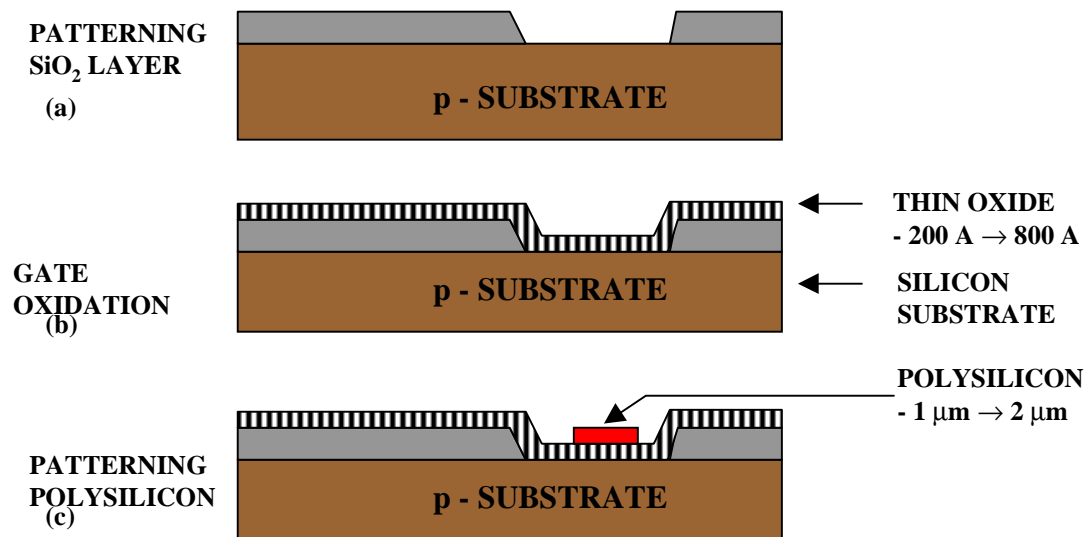
# Selektive Diffusion

- Selektive Diffusion ist das Erzeugen verschieden dotierter Siliziumschichten.
- Flächen müssen dabei
  - ⇒ beliebige Formen annehmen können
  - ⇒ genau plaziert sein
  - ⇒ genau skaliert sein
- Das  $\text{SiO}_2$  verhindert den Dotierungsvorgang. Es kann später durch eine Säure entfernt werden, die das Silizium nicht angreift.
- Prinzip der selektiven Dotierung:
  - ⇒ Oxydieren der Siliziumoberfläche
  - ⇒ Beschichten mit einem lichtempfindlichen Lack
  - ⇒ Belichten mit UV-Licht über eine Maske
  - ⇒ Entfernen des nicht belichteten Photolacks und des darunterliegenden Siliziumoxyds

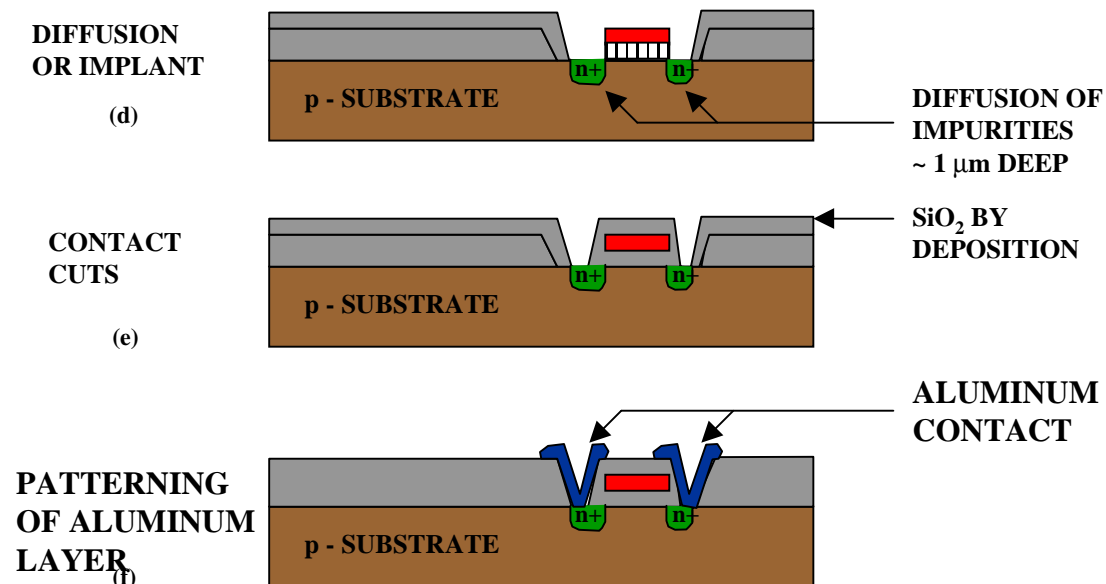


## 4.2 Entstehung eines nMOS Transistors

- Zunächst wird der Wafer mit einer dicken SiO<sub>2</sub>-Schicht überdeckt
- An den Stellen, an denen Transistoren entstehen sollen, werden diese freigelegt (a)
- Die gesamte Fläche wird mit einer dünnen, sehr einheitlichen SiO<sub>2</sub>-Schicht überdeckt (b)
- Der Wafer wird mit einem Photolack überzogen und an den Stellen, an denen Gates entstehen sollen, freigelegt. Polykristallines Silizium wird aufgedampft ( c )

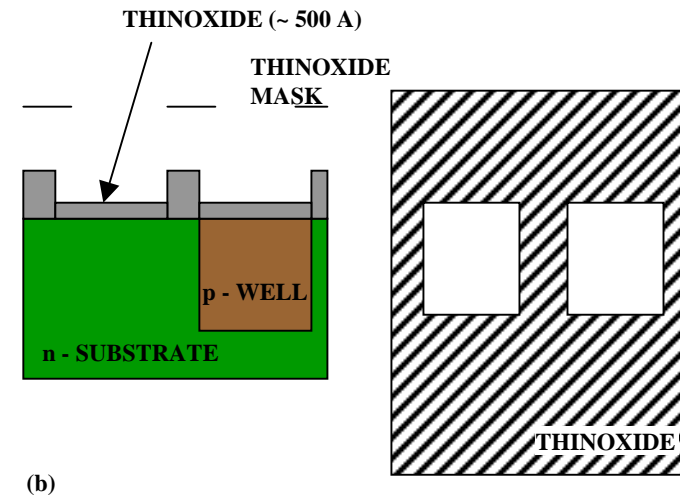
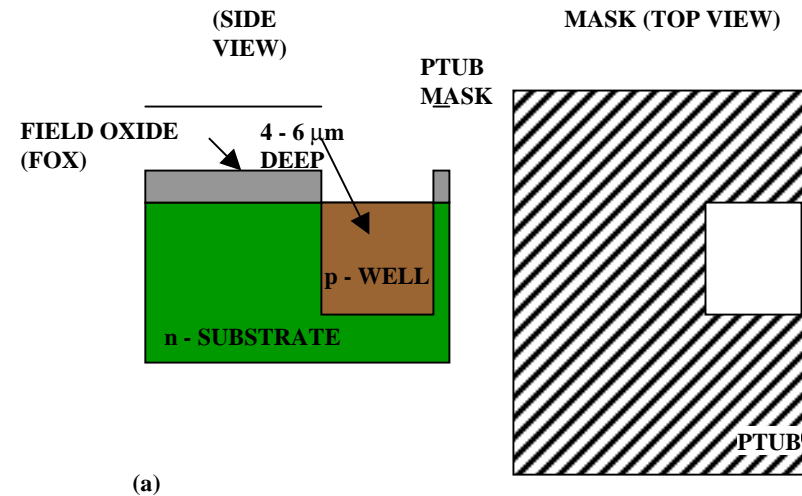


- Mit den gleichen Arbeitsschritten werden die Flächen für die negative Dotierung freigelegt. Die freigelegten Flächen werden negativ dotiert (d). Der Wafer wird erneut mit einer SiO<sub>2</sub>-Schicht überdeckt
- Die Kontaktstellen werden durch Ätzung freigelegt.
- Die Metallbahnen zur Verbindung werden aufgedampft.



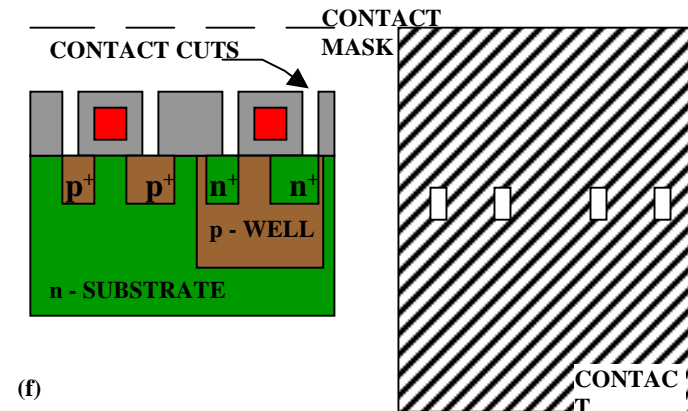
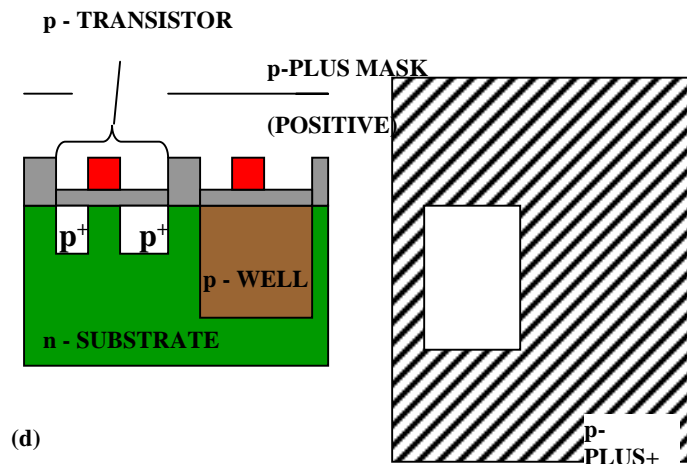
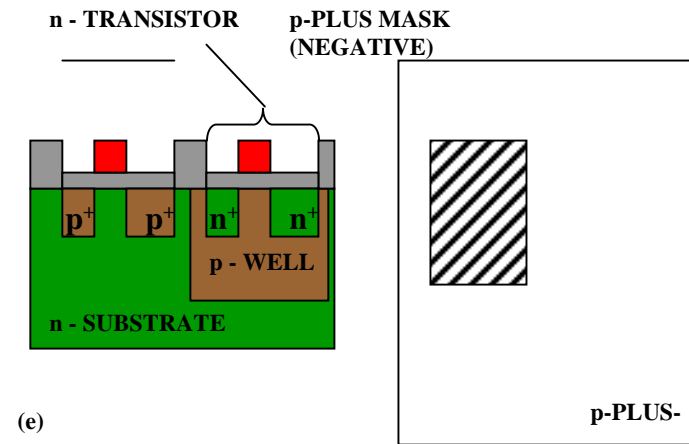
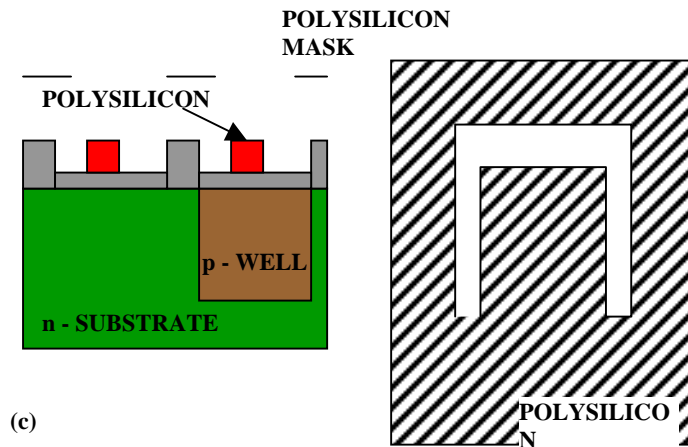
## 4.3 Entstehung eines CMOS-Inverters

- Beim CMOS-Prozeß müssen negativ dotierte Flächen für pMOS-Transistoren geschaffen werden (p-Well, p-Wannen).

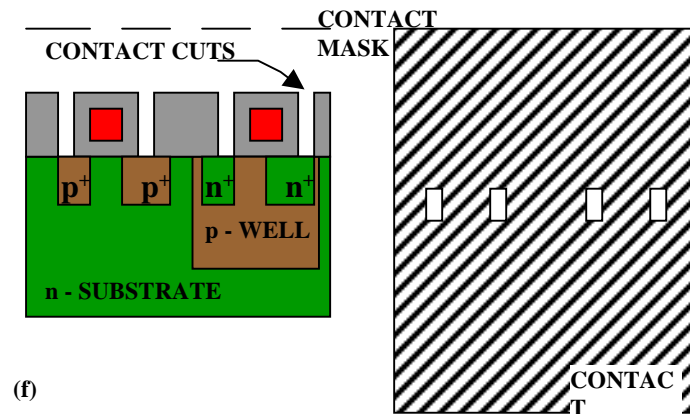
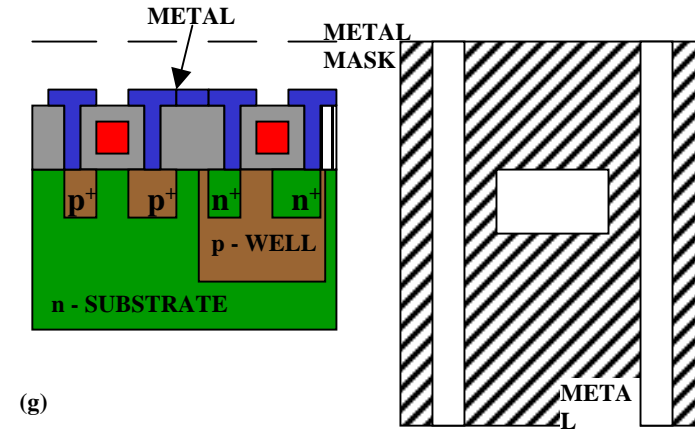
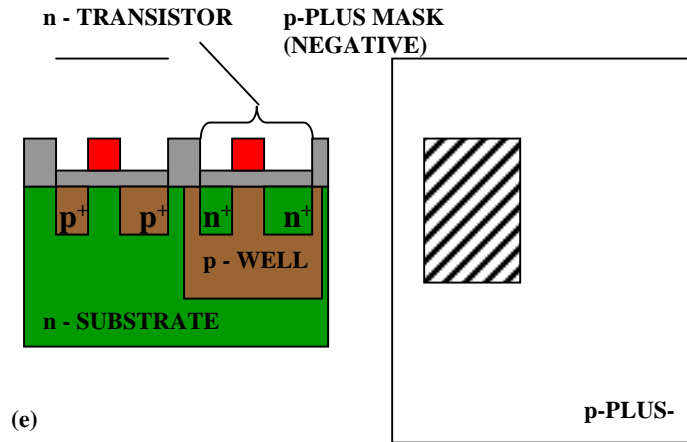




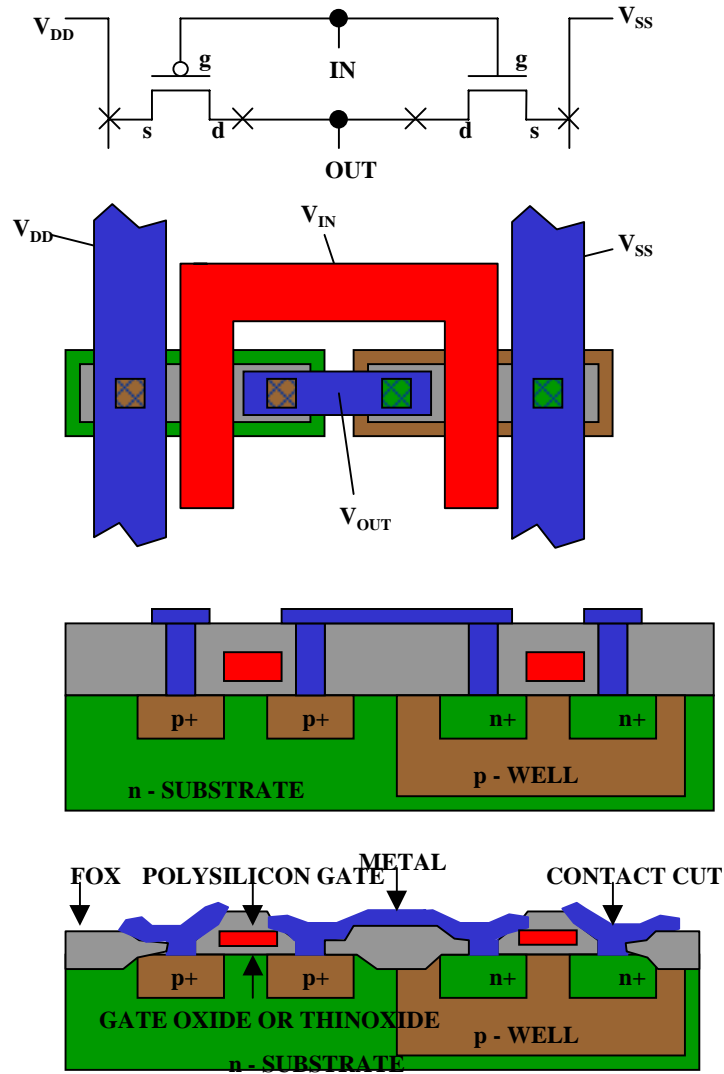
# Entstehung eines CMOS-Inverters



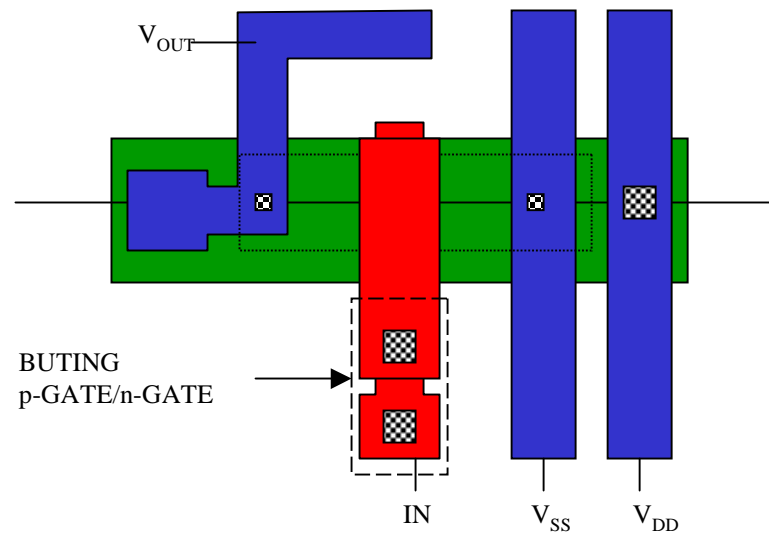
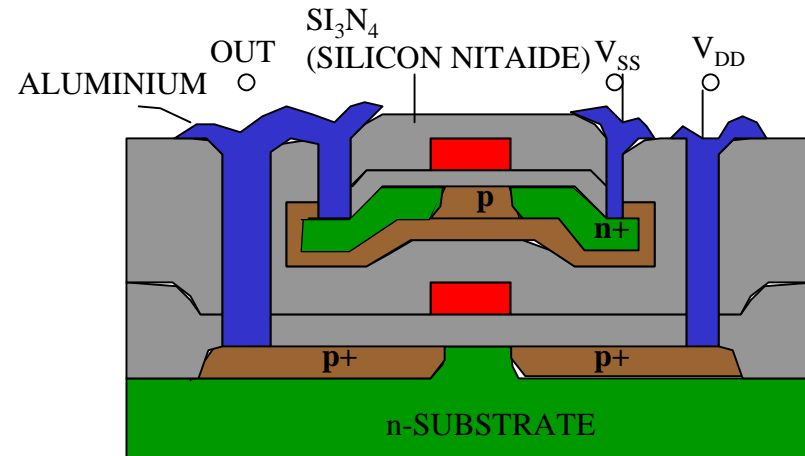
# Entstehung eines CMOS-Inverters



# Zusammenhang zwischen Schaltplan und Realisierung



# Moderne CMOS-Techniken: ein 3D-CMOS-Inverter



# 5 Schaltnetze

---

- **Entwurf und Realisierung digitaler Schaltnetze**
  - ⇒ **Formale Grundlagen**
  - ⇒ **Realisierung**
  - ⇒ **Entwurf**
  - ⇒ **Laufzeiteffekte**

# 5.1 Formale Grundlagen

---

○ George Boole (1815-1864)

⇒ Algebra der Logik (Boolesche Algebra)

**Def. 5.1: Eine Boolesche Algebra ist eine Menge  $V = \{a, b, c, \dots\}$ , auf der zwei einstellige Operationen  $\diamond$  und  $\#$  so definiert sind, daß durch ihre Anwendung auf Elemente aus  $V$  wieder Elemente aus  $V$  entstehen (Abgeschlossenheit). Es müssen die Huntingtonschen Axiome gelten.**

# Huntingtonschen Axiome

---

## ○ Kommutativgesetze:

$$a \diamond b = b \diamond a$$

$$a \# b = b \# a$$

## ○ Distributivgesetze:

$$a \diamond (b \# c) = (a \diamond b) \# (a \diamond c)$$

$$a \# (b \diamond c) = (a \# b) \diamond (a \# c)$$

## ○ Neutrale Elemente:

Es existieren zwei Elemente  $e, n \in V$ , so daß gilt:

$$a \diamond e = a \quad (e \text{ wird } \underline{\text{Einselement}} \text{ genannt)}$$

$$a \# n = a \quad (n \text{ wird } \underline{\text{Nullelement}} \text{ genannt)}$$

## ○ Inverse Elemente:

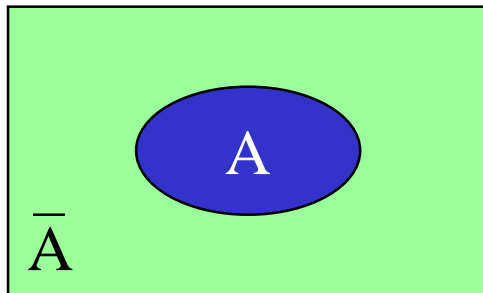
Für alle  $a \in V$  gibt es ein  $\bar{a}$ , so daß gilt:

$$a \diamond \bar{a} = n$$

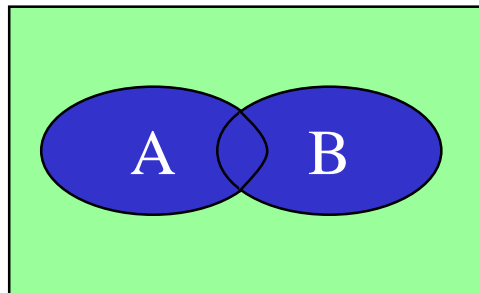
$$a \# \bar{a} = e$$

# Beispiel: Mengenalgebra

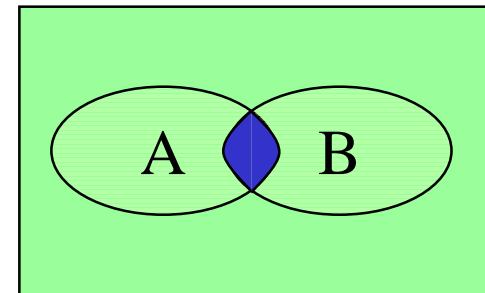
Boolesche Algebra	Mengenalgebra	
$V$	$P(T)$	Potenzmenge einer Grundmenge $T$
$\#$	$\cup$	Vereinigung
$\diamond$	$\cap$	Schnitt
$n$	$\emptyset$	Leere Menge
$e$	$T$	Grundmenge
$\bar{a}$	$\bar{A}$	Komplementmenge von $A$



Komplement



$A \cup B$



$A \cap B$



# Beispiel: Mengenalgebra

- **Grundmenge**

$$T = \{\text{Keyboard}, \text{Mouse}, \text{Laptop}\}$$

- **Potenzmenge**

$$P(T) = \{\emptyset, \{\text{Keyboard}\}, \{\text{Mouse}\}, \{\text{Laptop}\}, \{\text{Keyboard}, \text{Mouse}\}, \{\text{Keyboard}, \text{Laptop}\}, \{\text{Mouse}, \text{Laptop}\}, \{\text{Keyboard}, \text{Mouse}, \text{Laptop}\}\}$$

- **Für alle  $A, B, C \in P(T)$  gilt:**

- ⇒ **Abgeschlossenheit**

$$A \cup B \in P(T)$$

$$A \cap B \in P(T)$$

- ⇒ **Kommutativgesetz**

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

- ⇒ **Distributivgesetz**

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

- ⇒ **Neutrale Elemente**

$$A \cap T = A$$

$$A \cup \emptyset = A$$

- ⇒ **Inverse Elemente**

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$A \cup \bar{A} = T$$

# Schaltalgebra

○ Boolesche Algebra bei der die folgende Zuordnungstabelle gilt:

Boolesche Algebra	Schaltalgebra	
$V$	$B = \{0,1\}$	<b>Boolesche Grundmenge</b>
$\#$	$\vee$	<b>Oder</b>
$\diamond$	$\wedge$	<b>Und</b>
$n$	$0$	<b>neutrales Element</b>
$e$	$1$	<b>Einselement</b>
$\bar{a}$	$\bar{x}_i$	<b>Negation</b>

○ Andere Schreibweisen

⇒ **Oder:**  $x_1 + x_2, x_1 \mid x_2$

⇒ **Und:**  $x_1 \bullet x_2, x_1 * x_2, x_1 \cdot x_2, x_1 \& x_2, x_1 x_2$

⇒ **Negation:**  $/x_1, 'x_1, \neg x_1$

# Funktionstabellen

- Aus den Huntington'schen Axiomen lassen sich bereits die Funktionstabellen der in der Algebra definierten Verknüpfungen ableiten

Oder

$x_1$	$x_2$	$x_1 \vee x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Und

$x_1$	$x_2$	$x_1 \wedge x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Nicht

$x_1$	$\bar{x}_1$
0	1
1	0

# Weitere Sätze

---

- Aus den vier Huntington'schen Axiomen lassen sich weitere Sätze ableiten

⇒ **Assoziativgesetze**

$$(x_1 \wedge x_2) \wedge x_3 = x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3) \quad (x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3)$$

⇒ **Idempotenzgesetze**

$$(x_1 \wedge x_1) = x_1$$

$$(x_1 \vee x_1) = x_1$$

⇒ **Absorptionsgesetze**

$$x_1 \wedge (x_1 \vee x_2) = x_1$$

$$x_1 \vee (x_1 \wedge x_2) = x_1$$

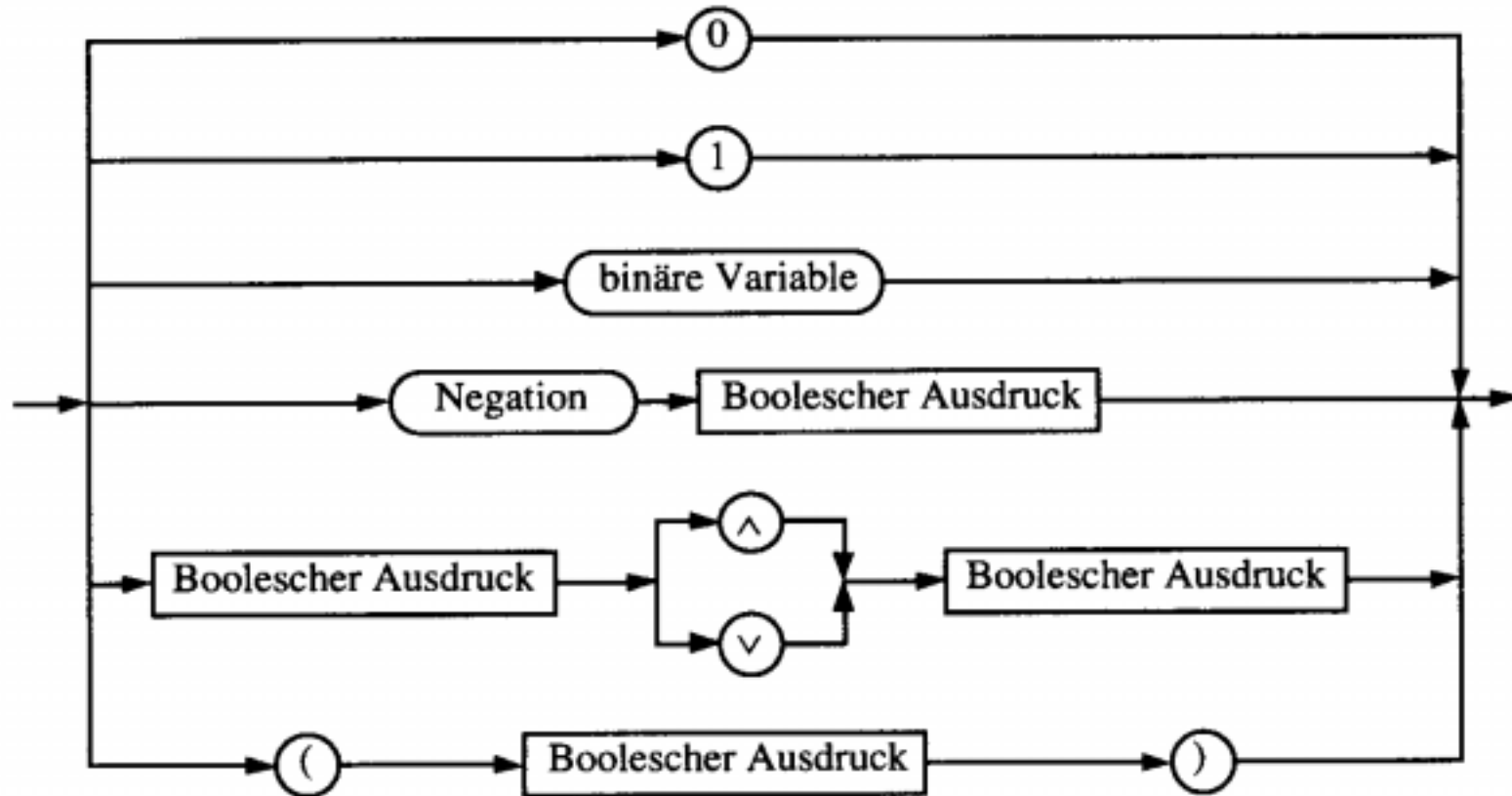
⇒ **DeMorgan-Gesetze**

$$\overline{x_1 \wedge x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$$

$$\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$$

# Boolescher Ausdruck

- Zeichenfolge, die aus binären Variablen, den Operatoren  $\wedge$ ,  $\vee$  und Klammern besteht und den folgenden syntaktischen Regeln folgt:



# Boolescher Ausdruck

---

- **Boolesche Ausdrücke sind nur eine syntaktische Konstruktion**
  - ⇒ **Bedeutung erhält ein Boolescher Ausdruck erst, wenn den Konstanten 0 und 1 die Wahrheitswerte „falsch“ oder „wahr“ zugeordnet wird**
- **Interpretation**
  - ⇒ **Belegung der binären Variablen eines Booleschen Ausdrucks mit Wahrheitswerten**
  - ⇒ **Liefert eine Aussage, die entweder „wahr“ oder „falsch“ sein kann**
  - ⇒ **Anwendung: Simulation**
- **Tautologie**
  - ⇒ **Boolescher Ausdruck, bei dem alle Belegungen der binären Variablen den Wahrheitswert „wahr“ liefern**
  - ⇒  $(x_1 \vee x_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2)$
  - ⇒ **Anwendung: Verifikation von Schaltungen**

# Boolesche Funktion

---

**Def. 5.2:** Es sei ein  $n$ -Tupel von binären Variablen  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  gegeben. Eine  $n$ -stellige Boolesche Funktion ordnet jeder Belegung der Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  mit den Wahrheitswerten „wahr“ oder „falsch“ genau einen Wahrheitswert zu.

$$f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\} \quad \text{oder} \quad f : B^n \rightarrow B$$

**Satz 5.1:** Es gibt genau  $2^n$  verschiedene Belegungen der Variablen einer  $n$ -stelligen Booleschen Funktion. Die Anzahl verschiedener  $n$ -stelliger Boolescher Funktionen beträgt  $2^{(2^n)}$

**Bew:** Über Funktionstabelle

# Übersicht der 2-stelligen Booleschen Funktionen

Benennung der Verknüpfung	Funktionswert		Schreibweise mit den Zeichen $\wedge \vee -$	Bemerkung
	$y$	$= f(x_1, x_2)$		
	$x_1$	$= 0\ 1\ 0\ 1$		
	$x_2$	$= 0\ 0\ 1\ 1$		
Null	$y_0$	$= 0\ 0\ 0\ 0$	0	Null
UND-Verknüpfung	$y_1$	$= 0\ 0\ 0\ 1$	$x_1 \wedge x_2$	$x_1$ UND $x_2$
Inhibition	$y_2$	$= 0\ 0\ 1\ 0$	$\bar{x}_1 \wedge x_2$	
Transfer	$y_3$	$= 0\ 0\ 1\ 1$	$x_2$	
Inhibition	$y_4$	$= 0\ 1\ 0\ 0$	$x_1 \wedge \bar{x}_2$	
Transfer	$y_5$	$= 0\ 1\ 0\ 1$	$x_1$	
Antivalenz	$y_6$	$= 0\ 1\ 1\ 0$	$(x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2)$	Exklusiv-ODER
ODER-Verknüpfung	$y_7$	$= 0\ 1\ 1\ 1$	$x_1 \vee x_2$	$x_1$ ODER $x_2$
NOR-Verknüpfung	$y_8$	$= 1\ 0\ 0\ 0$	$\overline{x_1 \vee x_2}$	NICHT-ODER
Äquivalenz	$y_9$	$= 1\ 0\ 0\ 1$	$(x_1 \wedge x_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2)$	
Komplement	$y_{10}$	$= 1\ 0\ 1\ 0$	$\bar{x}_1$	
Implikation	$y_{11}$	$= 1\ 0\ 1\ 1$	$\bar{x}_1 \vee x_2$	
Komplement	$y_{12}$	$= 1\ 1\ 0\ 0$	$\bar{x}_2$	
Implikation	$y_{13}$	$= 1\ 1\ 0\ 1$	$x_1 \vee \bar{x}_2$	
NAND-Verknüpfung	$y_{14}$	$= 1\ 1\ 1\ 0$	$\overline{x_1 \wedge x_2}$	NICHT-UND
Eins	$y_{15}$	$= 1\ 1\ 1\ 1$	1	Eins

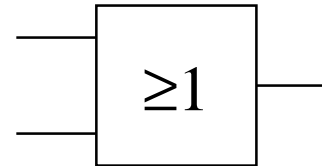


# Darstellung einiger zweistelliger Funktionen

---

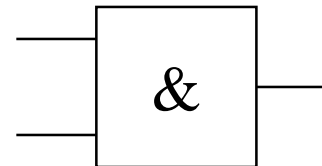
**ODER**

$x_1$	$x_2$	$x_1 \vee x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



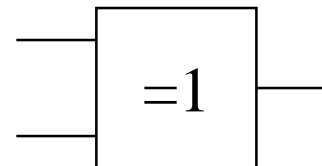
**UND**

$x_1$	$x_2$	$x_1 \wedge x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



**Exklusiv-Oder**

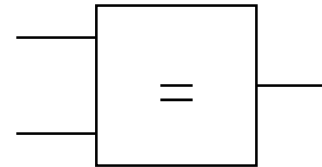
$x_1$	$x_2$	$x_1 \oplus x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



# Darstellung einiger zweistelliger Funktionen

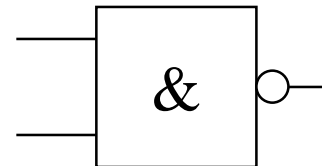
**Äquivalenz**

$x_1$	$x_2$	$x_1 \equiv x_2$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



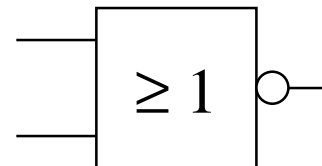
**NAND**

$x_1$	$x_2$	$x_1 \overline{\wedge} x_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



**NOR**

$x_1$	$x_2$	$x_1 \overline{\vee} x_2$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



# Operatorensysteme

**Def. 5.3: Ein vollständiges Operatorensystem erlaubt die Darstellung beliebiger Boolescher Funktionen mit einer beschränkten Anzahl von Operatoren**

○ **Beispiele für vollständiges Operatorensysteme:**

Operatorensystem	Negation	Konjunktion	Disjunktion
$(\wedge, \vee, \bar{\phantom{x}})$	$\bar{x}_1$	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$
$(\wedge, \bar{\phantom{x}})$	$\bar{x}_1$	$x_1 \wedge x_2$	$\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2$
$(\vee, \bar{\phantom{x}})$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$	$x_1 \vee x_2$
$(\wedge)$	$x_1 \wedge x_1$	$(x_1 \wedge x_2) \wedge (x_1 \wedge x_2)$	$(x_1 \wedge x_1) \wedge (x_2 \wedge x_2)$
$(\vee)$	$x_1 \vee x_1$	$(x_1 \vee x_1) \vee (x_2 \vee x_2)$	$(x_1 \vee x_2) \vee (x_1 \vee x_2)$
$(\wedge, \oplus)$	$x_1 \oplus 1$	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \wedge x_2 \oplus x_1 \oplus x_2$
$(\vee, \equiv)$	$x_1 \equiv 0$	$(x_1 \vee x_2) \equiv x_1 \equiv x_2$	$x_1 \vee x_2$

# Auswertung

---

- **Zum Wahrheitswert einer Aussage gelangt man durch rekursives Auswerten der Booleschen Funktionen in einem Ausdruck**
  - ⇒ **Negation vor Konjunktion**
  - ⇒ **Konjunktion vor Disjunktion**
  - ⇒ **Klammerung beachten**
- **Beispiel: Ist die folgende Funktion eine Tautologie?**

$$f(x_1, x_2) = (x_1 \wedge x_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2) \equiv (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2)$$

## 5.2 Normalformen

---

- **Eine Funktion kann durch verschiedene Boolesche Ausdrücke beschrieben werden**
  - ⇒ **Auch bei der Beschränkung auf ein vollständiges Operatorensystem ergeben sich noch mehrere Darstellungsmöglichkeiten**
- **Normalformen bilden eine Standarddarstellung in einem vollständigen Operatorensystem**
  - ⇒ **Disjunktive Normalform**
  - ⇒ **Konjunktive Normalform**
- **Es gibt weitere Normalformen, die in dieser Vorlesung nicht behandelt werden**
  - ⇒ **Reed-Muller-Form**
  - ⇒ **Äquivalenzpolynom**

# Literal und Produktterm

---

**Def. 5.4:** Ein Literal  $L_i$  ist entweder eine Variable  $x_i$  oder ihre Negation  $\bar{x}_i$ .  $L_i \in \{x_i, \bar{x}_i\}$

**Def. 5.5:** Ein Produktterm  $K(x_1, \dots, x_m)$  ist die Konjunktion von Literalen oder den Konstanten 0 oder 1:

$$\bigwedge_{i=1}^m L_i = L_1 \wedge \dots \wedge L_m$$

○ **Jeder Produktterm  $K(x_1, \dots, x_m)$  kann so dargestellt werden, dass eine Variable  $x$  in höchstens einem Literal vorkommt.**

⇒ Falls  $L_j = x$  und  $L_k = x$  ist, gilt  $L_j \wedge L_k = x$

⇒ Falls  $L_j = \bar{x}$  und  $L_k = \bar{x}$  ist, gilt  $L_j \wedge L_k = \bar{x}$

⇒ Falls  $L_j = x$  und  $L_k = \bar{x}$  ist, gilt  $L_j \wedge L_k = 0$

# Implikant und Minterm

---

**Def. 5.6:** Ein Produktterm  $K(x_1, \dots, x_m)$  heißt Implikant einer Booleschen Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$ , wenn aus  $K(x_1, \dots, x_m)=1$  für eine Belegung  $x_1, \dots, x_m \in B^n$  folgt, dass  $f(x_1, \dots, x_n)=1$ .

**Def. 5.7:** Ein Implikant  $K(x_1, \dots, x_n)$  heißt Minterm ( $m$ ), wenn ein Literal jeder Variablen  $x_i$  der Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  genau einmal in  $K$  vorkommt.

- Implikanten haben ein oder mehrere 1-Stellen in der Funktion
  - ⇒ mehrere Implikanten können sich überdecken
- Ein Minterm ist genau bei einer Belegung der Variablen gleich 1
  - ⇒ Ein Minterm trägt zu genau einer 1-Stelle der Funktion bei
  - ⇒ Die Minterme einer Funktion können sich nicht überdecken

# Mintermtabelle

**Satz 5.2:** Zu einer Booleschen Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  mit  $n$  Literalen gibt es maximal  $2^n$  verschiedene Minterme  $m_i$ .

**Bew:** Durch Aufzählung aller Kombinationen und Induktion über  $n$ .

○ Man definiert eine Reihenfolge aller Minterme über den Index  $i$

$i_{10}$	$i_2$	Minterm $m_i$
0	000	$\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_0$
1	001	$\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_0$
2	010	$\bar{x}_2 \wedge x_1 \wedge \bar{x}_0$
3	011	$\bar{x}_2 \wedge x_1 \wedge x_0$
4	100	$x_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_0$
5	101	$x_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_0$
6	110	$x_2 \wedge x_1 \wedge \bar{x}_0$
7	111	$x_2 \wedge x_1 \wedge x_0$



# Disjunktive Normalform

**Def. 5.8:** Es sei eine Boolesche Funktion  $f(x_1, \dots, x_n): B^n \rightarrow B$  gegeben. Ein Boolescher Ausdruck heißt **disjunktive Normalform (DNF)** der Funktion  $f$ , wenn er aus einer disjunktiven Verknüpfung von **Mintermen**  $K_i$  besteht.

$$f(x_1, \dots, x_n) = K_0 \vee K_1 \vee \dots \vee K_k \text{ mit } 0 \leq k \leq 2^n - 1$$

$$= \bigvee_0^{2^n - 1} \alpha_i \wedge K_i \text{ mit } \alpha_i \in \{0, 1\}$$

○  $\alpha_i$  heißt **Mintermkoeffizient**

⇒  $\alpha_i = 1$ , wenn der Minterm  $m_i$  zu  $f$  gehört,

⇒  $\alpha_i = 0$ , sonst

○ **Beispiele**

$f(x_2, x_1, x_0) = x_2 x_1 x_0 \vee x_2 \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_2 x_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0$  **ist eine DNF**

$f(x_2, x_1, x_0) = x_2 x_1 x_0 \vee x_2 \bar{x}_1 \vee x_1 (x_2 x_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_0)$  **ist keine DNF**

# Disjunktion und Maxterm

**Def. 5.9:** Es sei  $D(x_1, \dots, x_m)$  eine Disjunktion von Literalen, wobei die Konstanten 0 und 1 auftreten dürfen.  $D(x_1, \dots, x_m)$  heißt Implikat einer Booleschen Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$ , wenn aus  $D(x_1, \dots, x_m)=0$  für eine Belegung  $x_1, \dots, x_n \in B^n$  folgt, dass  $f(x_1, \dots, x_n)=0$ .

**Def. 5.10:** Ein Implikat  $D(x_1, \dots, x_n)$  heißt Maxterm ( $M$ ), wenn ein Literal jeder Variablen  $x_i$  der Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  genau einmal in  $D$  vorkommt.

- Implikate haben ein oder mehrere 0-Stellen in der Funktion
  - ⇒ mehrere Implikaten können sich überdecken
- Ein Maxterm ist genau bei einer Belegung der Variablen gleich 0
  - ⇒ Ein Maxterm trägt zu genau einer 0-Stelle der Funktion bei
  - ⇒ Die Maxterme einer Funktion können sich überdecken

# Min- und Maxtermtabelle

**Satz 5.3:** Zu einer Booleschen Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  mit  $n$  Literalen gibt es maximal  $2^n$  verschiedene Maxterme  $M_i$ .

**Bew:** Durch Aufzählung aller Kombinationen und Induktion über  $n$

- Man definiert eine Reihenfolge aller Maxterme über den Index  $i$  analog zu den Mintermen

$i_{10}$	$i_2$	Minterm $m_i$	Maxterm $M_i$
0	000	$\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_0$	$x_2 \vee x_1 \vee x_0$
1	001	$\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_0$	$x_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0$
2	010	$\bar{x}_2 \wedge x_1 \wedge \bar{x}_0$	$x_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0$
3	011	$\bar{x}_2 \wedge x_1 \wedge x_0$	$x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0$
4	100	$x_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_0$	$\bar{x}_2 \vee x_1 \vee x_0$
5	101	$x_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_0$	$\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0$
6	110	$x_2 \wedge x_1 \wedge \bar{x}_0$	$\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0$
7	111	$x_2 \wedge x_1 \wedge x_0$	$\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0$

U. Keschull

# Konjunktive Normalform

**Def. 5.11:** Es sei eine Boolesche Funktion  $f(x_1, \dots, x_n): B^n \rightarrow B$  gegeben. Ein Boolescher Ausdruck heißt **Konjunktive Normalform (KNF)** der Funktion  $f$ , wenn er aus einer konjunktiven Verknüpfung von Maxtermen  $D_i$  besteht.

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= D_0 \wedge D_1 \wedge \dots \wedge D_k \text{ mit } 0 \leq k \leq 2^n - 1 \\ &= \bigwedge_0^{2^n - 1} (\beta_i \vee D_i) \text{ mit } \beta_i \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

○  $\beta_i$  heißt Maxtermkoeffizient

⇒  $\beta_i = 0$ , wenn der Maxterm  $m_i$  zu  $f$  gehört,

⇒  $\beta_i = 1$ , sonst

○ **Beispiel**

$f(x_2, x_1, x_0) = (x_2 \vee x_1 \vee x_0) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0)$  ist eine **KNF**

# KNF-DNF Umwandlung

---

**Satz 5.4:** Für jede Boolesche Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  gilt  $\alpha_i = \beta_i$ .

**Bew: (Skizze) 2 Fälle**

⇒ **Fall 1:**  $\alpha_i=1$

⇒  $m_i$  gehört zur DNF der Funktion  $f$

⇒  $M_i$  gehört nicht zur KNF der Funktion  $f$

⇒  $\beta_i=1$

⇒ **Fall 2:**  $\alpha_i=0$

⇒  $m_i$  gehört nicht zur DNF der Funktion  $f$

⇒  $M_i$  gehört zur KNF der Funktion  $f$

⇒  $\beta_i=0$

# Zusammenfassung der wichtigsten Begriffe

---

- **Literal:** Boolesche Variable
- **Produktterm:** UND-Verknüpfung von Literalen
- **Implikant:** Produktterm, der eine oder mehrere „1“-Stellen einer booleschen Funktion beschreibt (impliziert)
- **Implikat:** Disjunktion (ODER-Verknüpfung) von Literalen
- **Minterm:** Implikant, der genau eine „1“-Stelle einer booleschen Funktion beschreibt
- **Maxterm:** Implikat, der genau eine „0“-Stelle einer booleschen Funktion beschreibt
- **Normalform:** Darstellung einer Booleschen Funktion durch Minterme (DNF) oder Maxterme (KNF)

# Der Shannonsche Entwicklungssatz

- DNF und KNF können durch einfache logische Umformungen in gewöhnliche disjunktive und konjunktive Formen gebracht werden
  - ⇒ DF und KF
- Zur Berechnung der Normalformen ist der Shannonsche Entwicklungssatz hilfreich

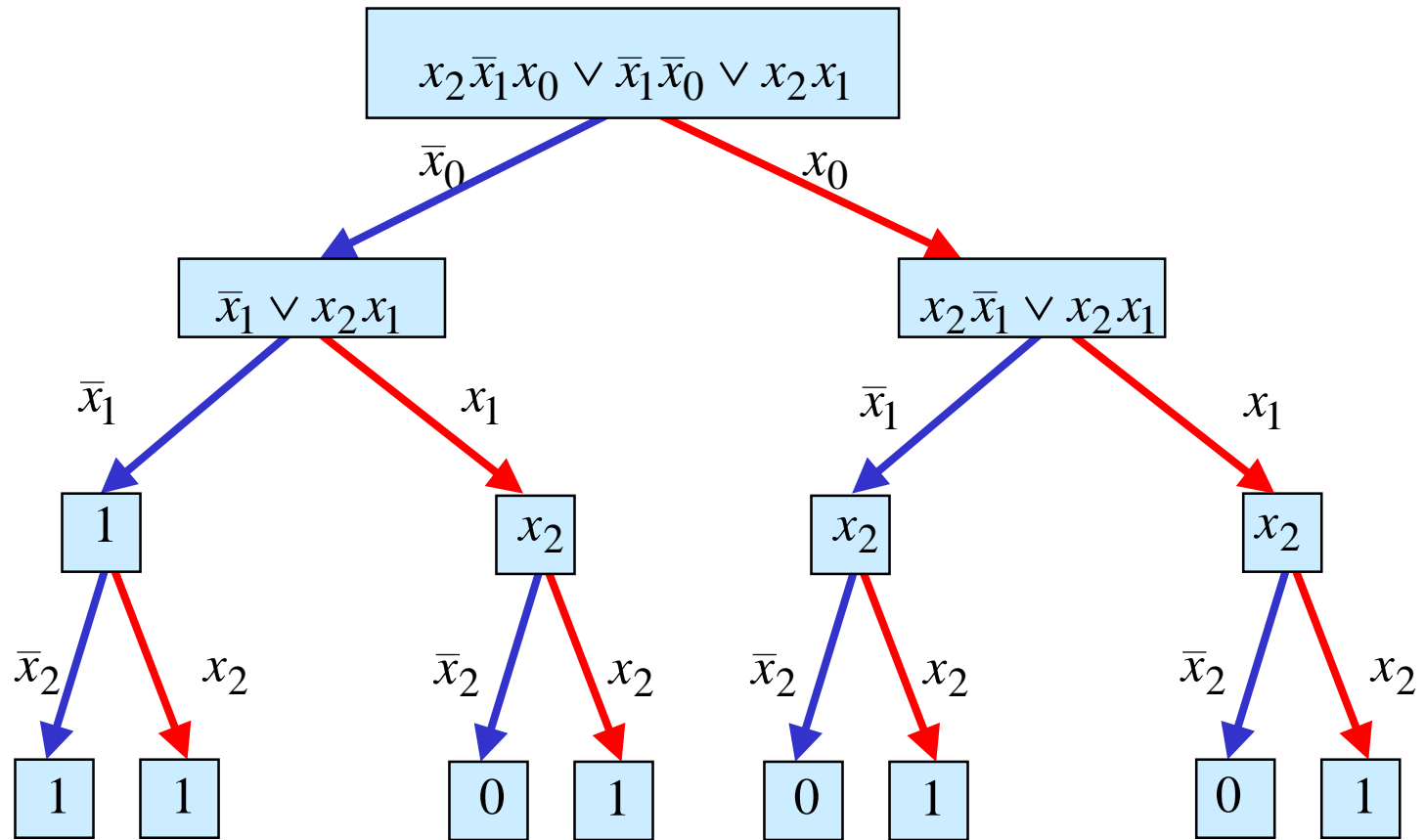
**Satz 5.5: Für jede Boolesche Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  gilt**

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_i \wedge f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)) \vee (\bar{x}_i \wedge f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n))$$

○ **Beispiel:**

$$\begin{aligned} f(x_2, x_1, x_0) &= x_2 \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee x_2 x_1 \\ &= x_0 (x_2 \bar{x}_1 \vee x_2 x_1) \vee \bar{x}_0 (\bar{x}_1 \vee x_2 x_1) \\ &= x_2 \bar{x}_1 x_0 \vee x_2 x_1 x_0 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee x_2 x_1 \bar{x}_0 \\ &= x_2 (\bar{x}_1 x_0 \vee x_1 x_0 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee x_1 \bar{x}_0) \vee \bar{x}_2 (\bar{x}_1 \bar{x}_0) \\ &= x_2 x_1 x_0 \vee x_2 \bar{x}_1 x_0 \vee x_2 x_1 \bar{x}_0 \vee x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \end{aligned}$$

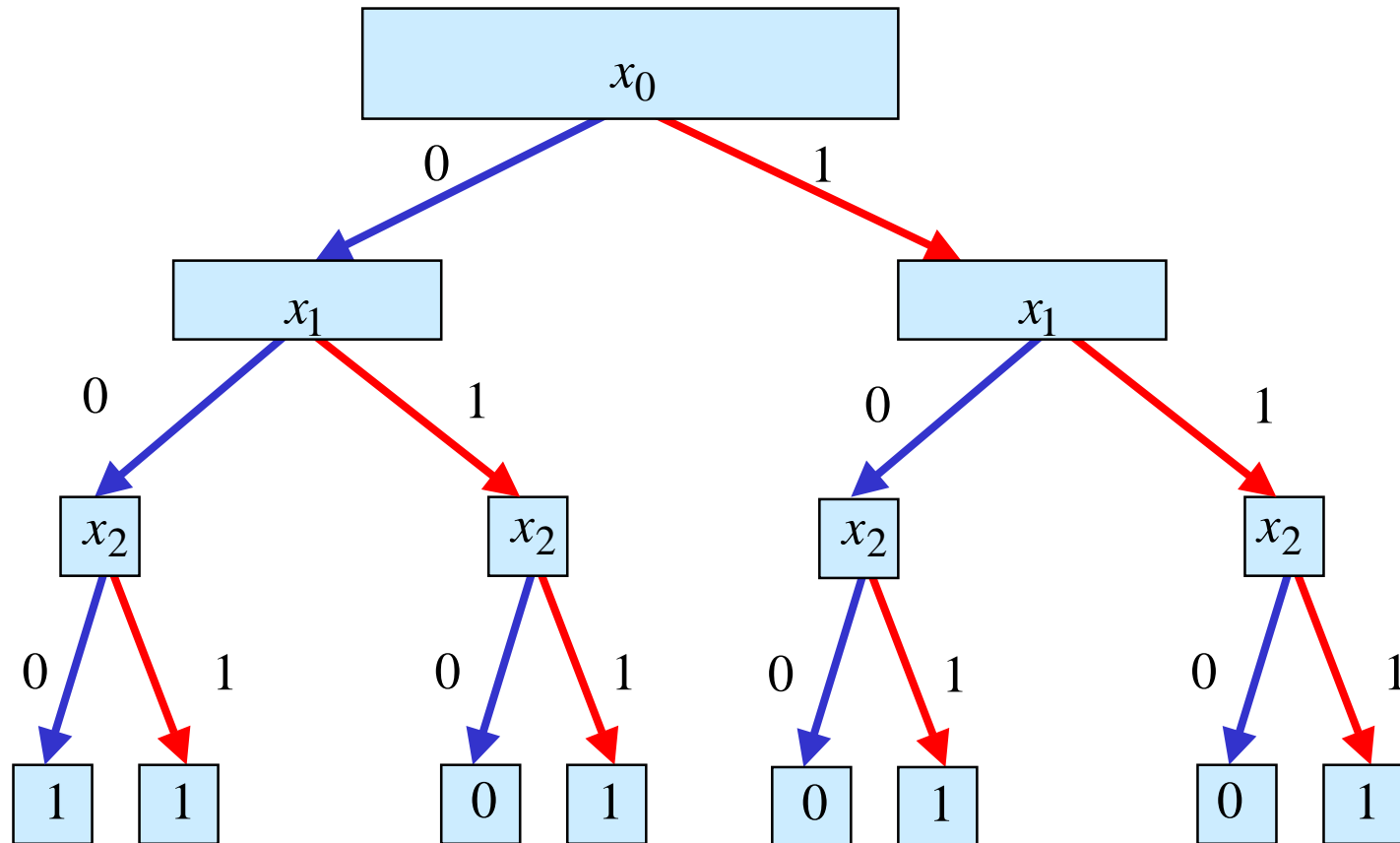
# Baumdarstellung





# Binary Decision Diagram (BDD)

- Andere Interpretation der Shannon-Entwicklung



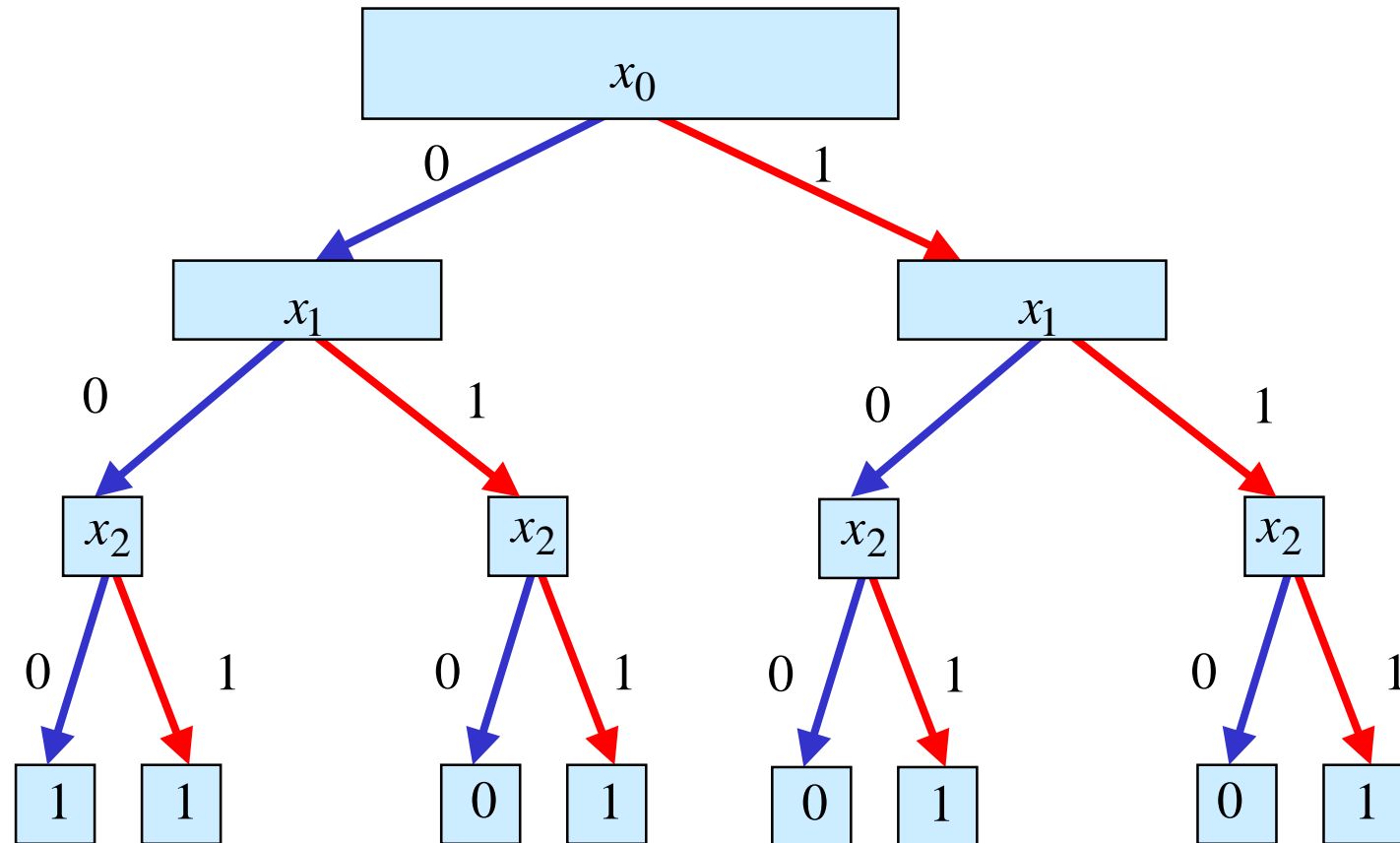
# Reduzierte Baumdarstellungen

---

- Da die Variablen in allen Pfaden in der gleichen Reihenfolge auftauchen, spricht man auch von einem ordered BDD (OBDD)
- Ein BDD benötigt  $2^n$  Knoten bei  $n$  Variablen
  - ⇒ Für viele Anwendung ist die Speicherung aller Knoten nicht notwendig
  - ⇒ Knoten, deren Nachfolger gleich sind, können eliminiert werden (Regel 1)
  - ⇒ Teile des Baumes, die genau so noch einmal vorkommen, können gemeinsam genutzt werden (Regel 2)
- Es entsteht ein bezüglich einer Ordnung der Variablen eindeutiger reduzierter Baum

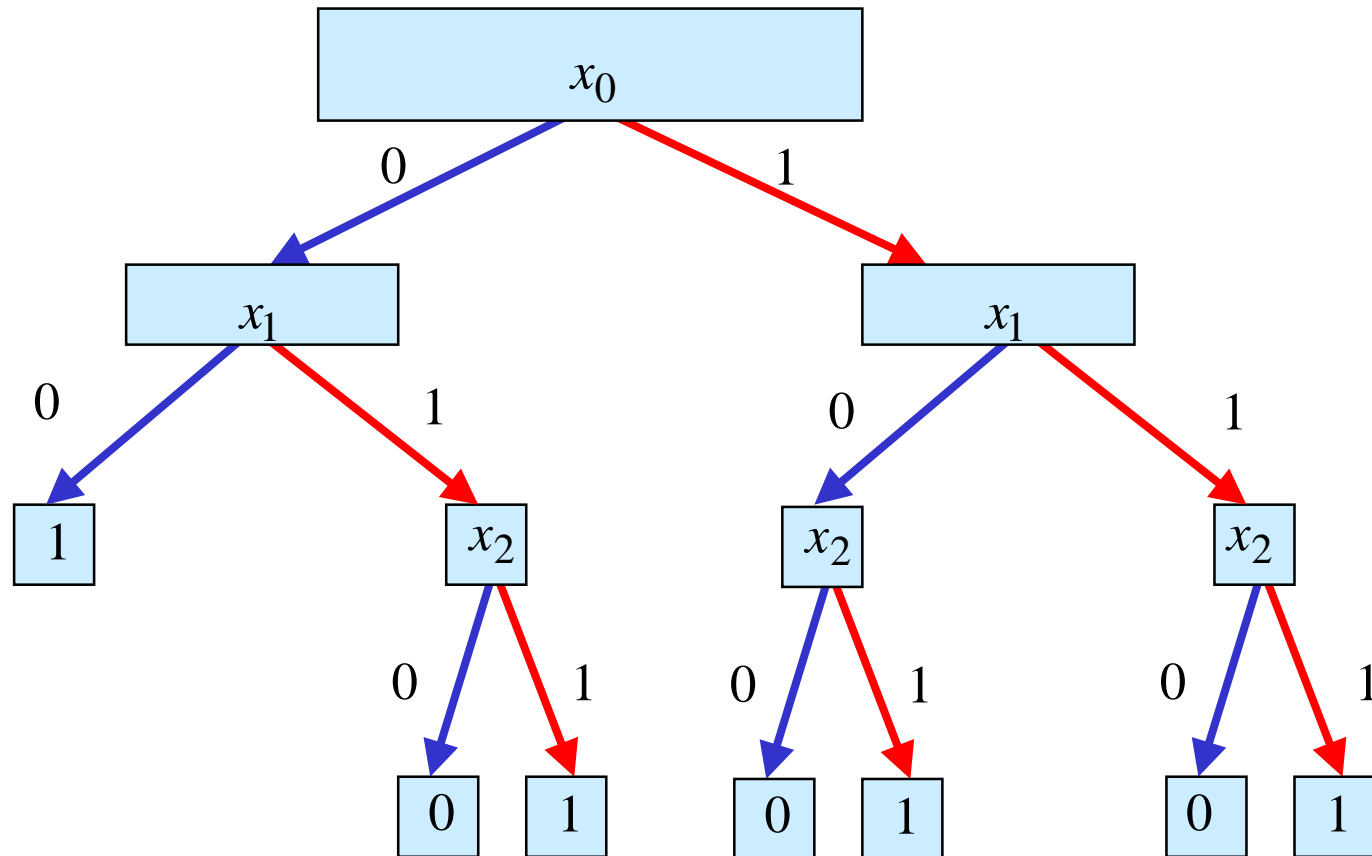
# Reduced Ordered BDD (ROBDD)

## Ausgangsgraph



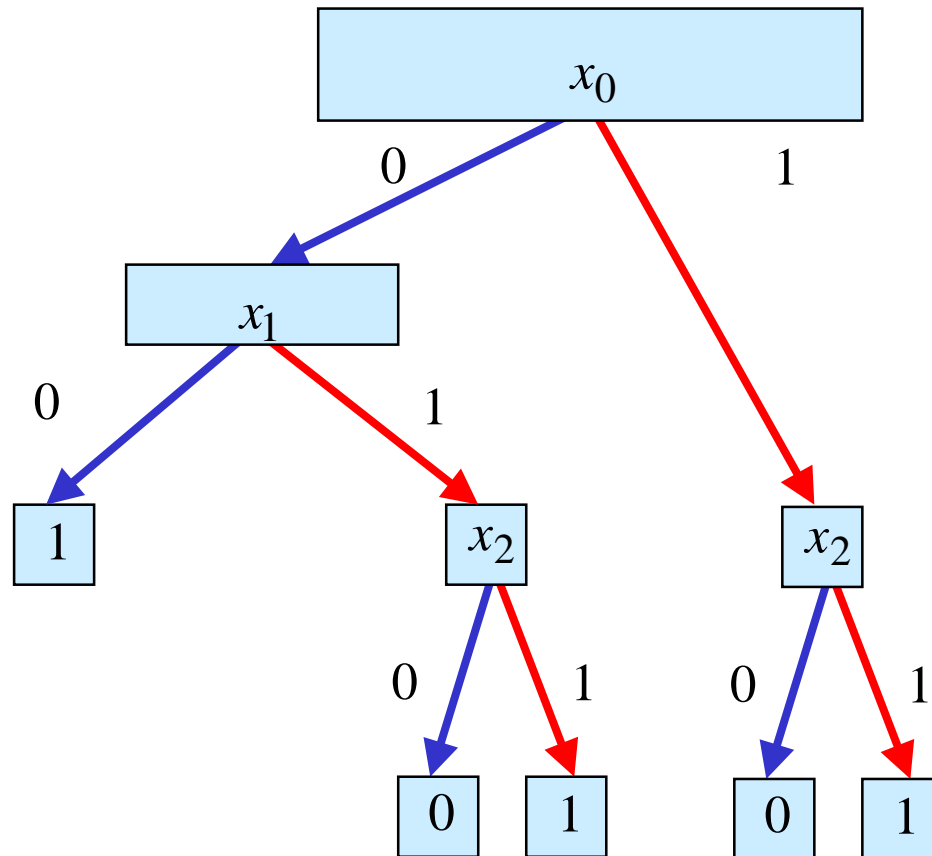
# Reduced Ordered BDD (ROBDD)

## Regel 1



# Reduced Ordered BDD (ROBDD)

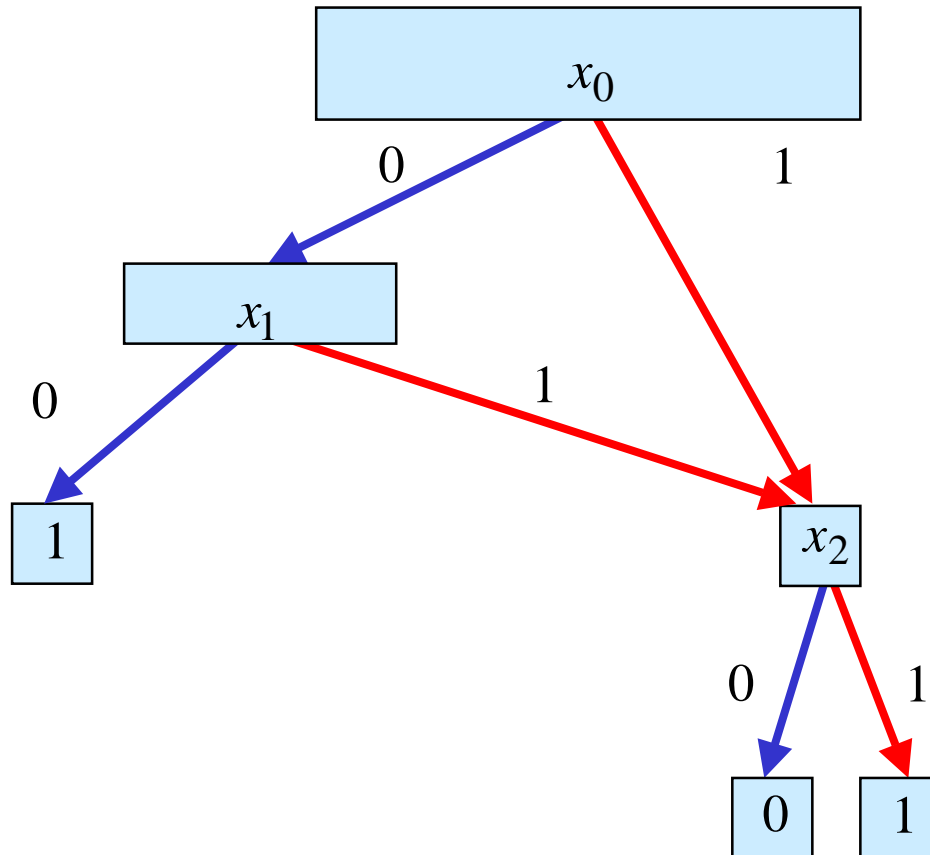
## Regel 1



# Reduced Ordered BDD (ROBDD)

---

## Regel 2



# DNF/KNF-Konversion

---

- **Statt der Min- und Maxterme kann man auch deren Indizes angeben**
  - ⇒  $f = \text{MIN}_t(0,3,4,7)$
  - ⇒  $f = \text{MAX}_t(1,2,5,6)$
- **Für die Umwandlung der DNF einer Funktion  $f$  in die entsprechende KNF folgt direkt aus Satz 2.4:**
  - ⇒ **Die Indizes der Minterme, die nicht in der Funktionsdarstellung der DNF der Funktion verwendet werden, sind Indizes der Maxterme der KNF der Funktion**

# DNF/KNF-Konversion

$i_{10}$	$x_2 x_1 x_0$	Minterme	Maxterme
0	000	$\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_0$	
1	001		$x_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0$
2	010		$x_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0$
3	011	$\bar{x}_2 \wedge x_1 \wedge x_0$	
4	100	$x_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_0$	
5	101		$\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0$
6	110		$\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0$
7	111	$x_2 \wedge x_1 \wedge x_0$	

**DNF :**  $f(x_2, x_1, x_0) = \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_2 x_1 x_0 \vee x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee x_2 x_1 x_0$

**KNF :**  $f(x_2, x_1, x_0) = (x_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0)$



# NAND-NOR-Konversion

---

- Sowohl NAND- als auch NOR-System sind vollständige Operatorensysteme
  - ⇒ alle Booleschen Funktionen lassen sich mit diesen Operatoren darstellen
  - ⇒ da sowohl NAND- als auch NOR-Gatter besonders einfach realisiert werden, haben diese Darstellungen eine besondere Bedeutung
- NAND-Konversion aus der DNF:

$$\begin{aligned} f(x_2, x_1, x_0) &= x_2 x_1 \bar{x}_0 \vee x_2 \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_2 x_1 x_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \\ &= \overline{\overline{x_2 x_1 \bar{x}_0 \vee x_2 \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_2 x_1 x_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0}} \\ &= \overline{\overline{x_2 x_1 \bar{x}_0} \wedge \overline{x_2 \bar{x}_1 x_0} \wedge \overline{\bar{x}_2 x_1 x_0} \wedge \overline{\bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0}} \\ &= \mathbf{NAND}_4(\mathbf{NAND}_3(x_2 x_1 \bar{x}_0), \mathbf{NAND}_3(x_2 \bar{x}_1 x_0), \\ &\quad \mathbf{NAND}_3(\bar{x}_2 x_1 x_0), \mathbf{NAND}_3(\bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0)) \end{aligned}$$

# NAND-NOR-Konversion

---

## ○ NOR-Konversion aus der KNF:

$$\begin{aligned} f(x_2, x_1, x_0) &= x_2 x_1 \bar{x}_0 \vee x_2 \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_2 x_1 x_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \\ &= (x_2 \vee x_1 \vee x_0)(x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0)(\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0) \\ &= \overline{(x_2 \vee x_1 \vee x_0)(x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0)(\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0)} \\ &= \overline{(x_2 \vee x_1 \vee x_0) \vee (x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0) \vee (\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0) \vee (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0)} \\ &= \mathbf{NOR}_4(\mathbf{NOR}_3(x_2, x_1, x_0), \mathbf{NOR}_3(x_2, \bar{x}_1, \bar{x}_0), \\ &\quad \mathbf{NOR}_3(\bar{x}_2, x_1, \bar{x}_0), \mathbf{NOR}_3(\bar{x}_2, \bar{x}_1, \bar{x}_0)) \end{aligned}$$

# 6 Minimalformen

---

- **Boolesche Ausdrücke für eine Boolesche Funktion  $f$  in einer kürzestmöglichen Darstellung**
  - ⇒ **technische Realisierung mit möglichst geringen Kosten**
- **Disjunktive und konjunktive Minimalformen**
  - ⇒ **Disjunktion von Implikanten (DMF)**
  - ⇒ **Konjunktion von Implikaten (KMF)**
- **Die DNF und KMF sind nicht eindeutig**

$$f(x_1, x_0) = \bar{x}_1 x_0 \vee x_1 \bar{x}_0$$

**DMF**

$$g(x_1, x_0) = \bar{x}_1 x_0 \vee x_1 x_0$$

**keine DMF**

$$= x_0$$

**DMF**

$$h(x_2, x_1, x_0) = (x_1 \vee \bar{x}_0) \wedge (x_2 \vee x_0)$$

**KMF**

$$k(x_2, x_1, x_0) = \bar{x}_0 \wedge (x_2 \vee \bar{x}_0) \wedge (x_2 \vee x_1)$$

**keine KMF**

$$= \bar{x}_0 \wedge (x_2 \vee x_1)$$

**KMF**

# Minimalformen

---

- **Das Finden einer Minimalform ist nicht trivial**
  - ⇒ **besonders bei Funktionen mit vielen Variablen**
  - ⇒ **oft nur suboptimale Lösungen**
  - ⇒ **Einsatz von Heuristiken**
- **Allgemeines zweisechrittiges Vorgehen:**
  - ⇒ **Finden einer Menge von Implikanten bzw. Implikate mit einer möglichst geringen Anzahl von Literalen**
  - ⇒ **Auswahl aus dieser Menge, so daß deren Disjunktion bzw. Konjunktion die gesuchte Funktion erhält**

# Ökonomische Kriterien für den Entwurf von Schaltnetzen

---

- **Geringe Kosten für den Entwurf (Entwurfsaufwand)**
  - ⇒ Lohnkosten
  - ⇒ Rechnerbenutzung, Softwarelizenzen
- **Geringe Kosten für die Realisierung (Realisierungsaufwand)**
  - ⇒ Bauelemente, Gehäuseformen
  - ⇒ Kühlung
- **Geringe Kosten für die Inbetriebnahme**
  - ⇒ Kosten für den Test
  - ⇒ Fertigstellung programmierbarer Bauelemente
- **Geringe Kosten für den Betrieb**
  - ⇒ Wartung
  - ⇒ Energie

# Entwurfsziele

---

- **Manche Kriterien stehen im Widerspruch**
  - ⇒ **zuverlässigere Schaltungen erfordern einen höheren Realisierungsaufwand**
  - ⇒ **Verringerung des Realisierungsaufwand erfordert eine Erhöhung der Entwurfskosten**
- **Ziel des Entwurfs ist das Finden des günstigsten Kompromisses**
  - ⇒ **Korrektheit der Realisierung**
  - ⇒ **Einhaltung der technologischen Grenzen**
  - ⇒ **ökonomischen Kriterien**

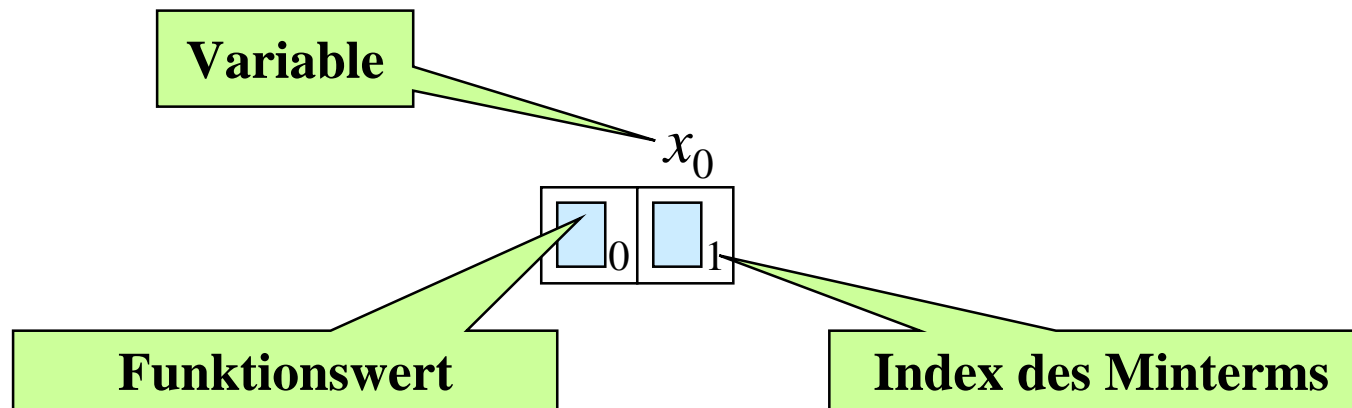
# Minimierungsverfahren

---

- **Finden von Minimalformen Boolescher Funktionen**
  - ⇒ ohne Betrachtung der Zieltechnologie
  - ⇒ mit Betrachtung der Zieltechnologie
- **Drei Minimierungsansätze**
  - ⇒ algebraische Verfahren
  - ⇒ graphische Verfahren
  - ⇒ tabellarische Verfahren
- **Man unterscheidet**
  - ⇒ **exakte Minimierungsverfahren (z.B. Quine McCluskey), deren Ergebnis das absolute Minimum einer Schaltungsdarstellung ist**
  - ⇒ **heuristische Minimierungsverfahren auf der Basis von iterativen Minimierungsschritten**

# 6.1 KV-Diagramme

- Nach Karnaugh und Veitch
- Möglichkeit, Boolesche Funktionen übersichtlich darzustellen
  - ⇒ bis 6 Variablen einsetzbar
- Ausgangspunkt ist ein Rechteck mit 2 Feldern





# KV-Diagramme

## ○ Beispiele

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & x_0 \\ \hline 0_0 & 1_1 \\ \hline \end{array}$$

$$f(x_0) = x_0$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & x_0 \\ \hline 1_0 & 0_1 \\ \hline \end{array}$$

$$f(x_0) = \bar{x}_0$$

## ○ Erweiterung durch Spiegelung

⇒ für jede zusätzliche Variable verdoppelt sich die Zahl der Felder

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & x_0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$x_1$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \bar{x}_0 & & \\ \hline 0 & 1 & 5 & 4 \\ \hline 2 & 3 & 7 & 6 \\ \hline \end{array}$$

$$x_1$$

$$x_2$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \bar{x}_0 & & \\ \hline 0 & 1 & 5 & 4 \\ \hline 2 & 3 & 7 & 6 \\ \hline 10 & 11 & 15 & 14 \\ \hline 8 & 9 & 13 & 12 \\ \hline \end{array}$$

$$x_1$$

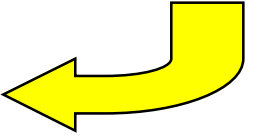
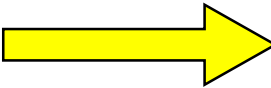
$$x_2$$

$$x_3$$

# Eigenschaften von KV-Diagrammen

- Jedes Feld ist ein Funktionswert
  - ⇒ Minterm der Funktion
  - ⇒ eindeutige Variablenzuordnung
- Oft werden  $x_1$  und  $x_2$  vertauscht
  - ⇒ andere Numerierung der Felder
  - ⇒ kein Einfluß auf das Minimierungsverfahren
- Aufstellen der KV-Diagramme über die Funktionstabelle:

Index	$x_2$	$x_1$	$x_0$	$y$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

$$f(x_2, x_1, x_0) = x_1 \bar{x}_0 \vee x_2 x_1 \vee x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0$$



	$\bar{x}_0$			
	0 <sub>0</sub>	0 <sub>1</sub>	0 <sub>5</sub>	1 <sub>4</sub>
	1 <sub>2</sub>	0 <sub>3</sub>	1 <sub>7</sub>	1 <sub>6</sub>
	$x_2$			

 $x_1$

# KV-Diagramme über die KNF

---

- **Argumentation über die Nullstellen der Funktion**
  - ⇒ **Jede Nullstelle entspricht einem Maxterm (Satz 2.4)**

- **Beispiel**

$$f(x_2, x_1, x_0) = x_1 \bar{x}_0 \vee x_2 x_1 \vee x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0$$

$\bar{x}_0$			
$0_0$	$0_1$	$0_5$	$1_4$
$1_2$	$0_3$	$1_7$	$1_6$
$\bar{x}_2$			

$x_1$

$$f(x_2, x_1, x_0) = (x_2 \vee x_1 \vee x_0) \wedge (x_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0)$$

# Minimalformen aus KV-Diagrammen

- Zusammenfassen von Mintermen zu Implikanten
- Beispiel:

$$\begin{array}{c}
 \overline{x_0} \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 1_0 & 0_1 & 1_5 & 1_4 \\
 \hline
 1_2 & 0_3 & 1_7 & 1_6 \\
 \hline
 \end{array} \\
 x_1 \\
 \hline
 \overline{x_2}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \overline{x_0} \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 1_0 & 0_1 & \boxed{1_5} & 1_4 \\
 \hline
 1_2 & 0_3 & 1_7 & 1_6 \\
 \hline
 \end{array} \\
 x_1 \\
 \hline
 \overline{x_2}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \overline{x_0} \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 1_0 & 0_1 & 1_5 & 1_4 \\
 \hline
 1_2 & 0_3 & \boxed{1_7} & \boxed{1_6} \\
 \hline
 \end{array} \\
 x_1 \\
 \hline
 \overline{x_2}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \overline{x_0} \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 \boxed{1_0} & 0_1 & 1_5 & \boxed{1_4} \\
 \hline
 \boxed{1_2} & 0_3 & 1_7 & \boxed{1_6} \\
 \hline
 \end{array} \\
 x_1 \\
 \hline
 \overline{x_2}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \overline{x_0} \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 1_0 & 0_1 & 1_5 & 1_4 \\
 \hline
 1_2 & 0_3 & 1_7 & 1_6 \\
 \hline
 \end{array} \\
 x_1 \\
 \hline
 \overline{x_2}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \overline{x_0} \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 1_0 & 0_1 & \boxed{1_5} & \boxed{1_4} \\
 \hline
 1_2 & 0_3 & \boxed{1_7} & \boxed{1_6} \\
 \hline
 \end{array} \\
 x_1 \\
 \hline
 \overline{x_2}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \overline{x_0} \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 \boxed{1_0} & 0_1 & \boxed{1_5} & \boxed{1_4} \\
 \hline
 \boxed{1_2} & 0_3 & \boxed{1_7} & \boxed{1_6} \\
 \hline
 \end{array} \\
 x_1 \\
 \hline
 \overline{x_2}
 \end{array}$$

U. Kebschüll

# Implikant k-ter Ordnung

---

**Def. 6.11:** Es sei eine Boolesche Funktion  $f(x_0, \dots, x_{n-1}): B^n \rightarrow B$  gegeben. Ein Implikant k-ter Ordnung umfaßt  $2^k$  Felder eines KV-Diagramms.

○ Man erhält

⇒ Implikanten 0-ter Ordnung

⇒ Implikanten 1-ter Ordnung

⇒ Implikanten 2-ter Ordnung

⇒ usw.

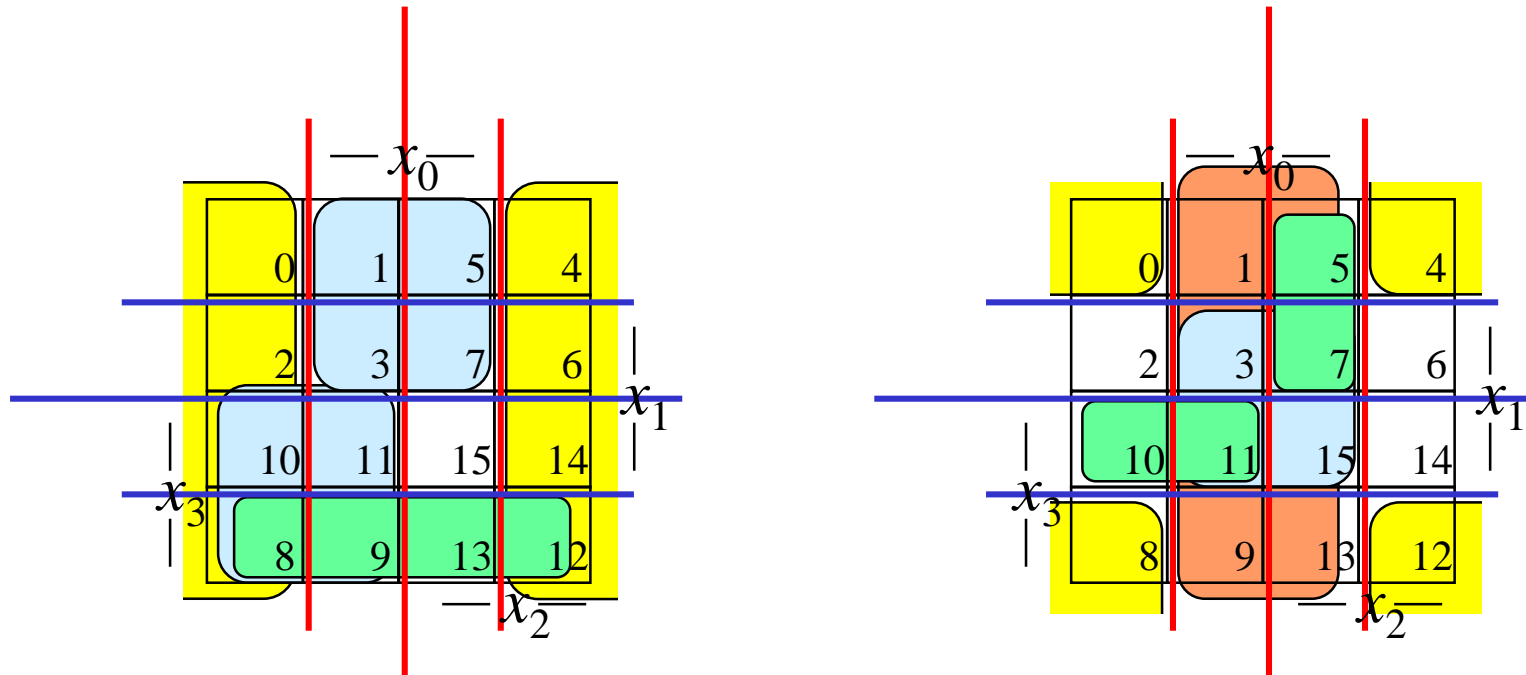
Minterme

Zusammenfassung zweier  
Minterme

Zusammenfassung zweier  
Implikanten 1-ter  
Ordnung

# Finden möglicher Zusammenfassungen

- Finden von 1-Blöcken, die symmetrisch zu denjenigen Achsen, an denen eine Variable von 0 auf 1 wechselt
- Jede Funktion lässt sich als disjunktive Verknüpfung solcher Implikanten darstellen
- Beispiele

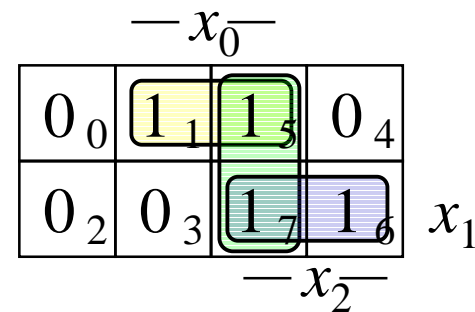
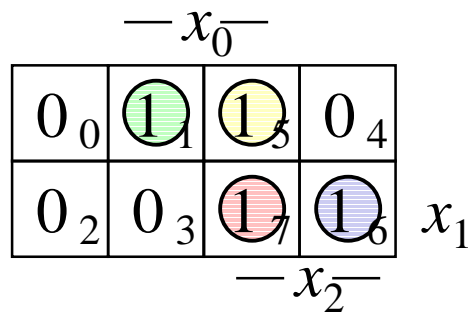


# Primimplikant

**Def. 6.11:** Es sei eine Boolesche Funktion  $f(x_0, \dots, x_{n-1}): B^n \rightarrow B$  gegeben. Ein Implikant  $p$  heißt Primimplikant, wenn es keinen Implikanten  $q$  gibt, der  $p$  impliziert.

- Ein Primimplikant  $p$  ist von größtmöglicher Ordnung
  - ⇒ Primimplikanten sind einfach aus einem KV-Diagramm herauszulesen
  - ⇒ man sucht die größtmöglichen Implikanten

$$f(x_2, x_1, x_0) = x_2 x_1 \bar{x}_0 \vee x_2 x_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 x_0$$



# Überdeckung

---

**Satz 6.6: Zu jeder Booleschen Funktion  $f$  gibt es eine minimale Überdeckung aus Primimplikanten**

**Bew. (Skizze):**

**Angenommen wir haben eine minimale Überdeckung der Funktion, die einen Implikanten  $k$  besitzt, der kein Primimplikant ist.**

**$\Rightarrow$  Dieser Implikant  $k$  kann durch einen Primimplikant  $p$  ersetzt werden, der  $k$  enthält**

**$\Rightarrow$  Das Ergebnis ist eine Überdeckung der Funktion  $f$  aus Primimplikanten mit der gleichen Anzahl von Termen**

**$\Rightarrow$  Die Überdeckung ist minimal**

**○ Einschränkung des Suchraums**

**$\Rightarrow$  man braucht nur die Primimplikanten für die Minimierung betrachten**



# Kernprimimplikant

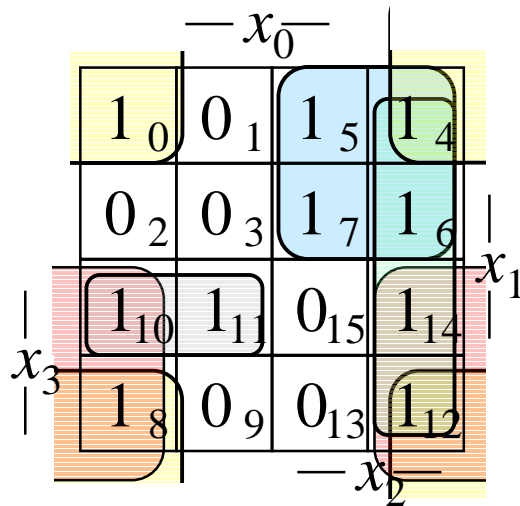
**Def. 6.11:** Es sei eine Boolesche Funktion  $f(x_0, \dots, x_{n-1}): B^n \rightarrow B$  gegeben. Ein Implikant  $p$  heißt **Kernprimimplikant**, wenn er einen Minterm überdeckt, der von keinem anderen Primimplikant überdeckt wird.

- Man nennt solche Primimplikanten auch **essentielle Primimplikanten**
  - ⇒ Ein Kernprimimplikant muß auf jeden Fall in der disjunktiven Minimalform vorkommen
- Ziel der Minimierung:
  - ⇒ Überdecken der Funktion durch Kernprimimplikanten und möglichst wenigen zusätzlichen Primimplikanten
- Zwei Schritte
  1. Finde alle Primimplikanten
  2. Suche eine Überdeckung der Funktion mit möglichst wenigen Primimplikanten

# Beispiel

$$\begin{aligned}
 f(x_3, x_2, x_1, x_0) &= \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 x_0 \vee \\
 &\quad \bar{x}_3 x_2 x_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_3 x_2 x_1 x_0 \vee x_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee \\
 &\quad x_3 \bar{x}_2 x_1 \bar{x}_0 \vee x_3 \bar{x}_2 x_1 x_0 \vee x_3 x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee x_3 x_2 x_1 \bar{x}_0 \\
 &= \text{MINt}(0, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14)
 \end{aligned}$$

**DNF**

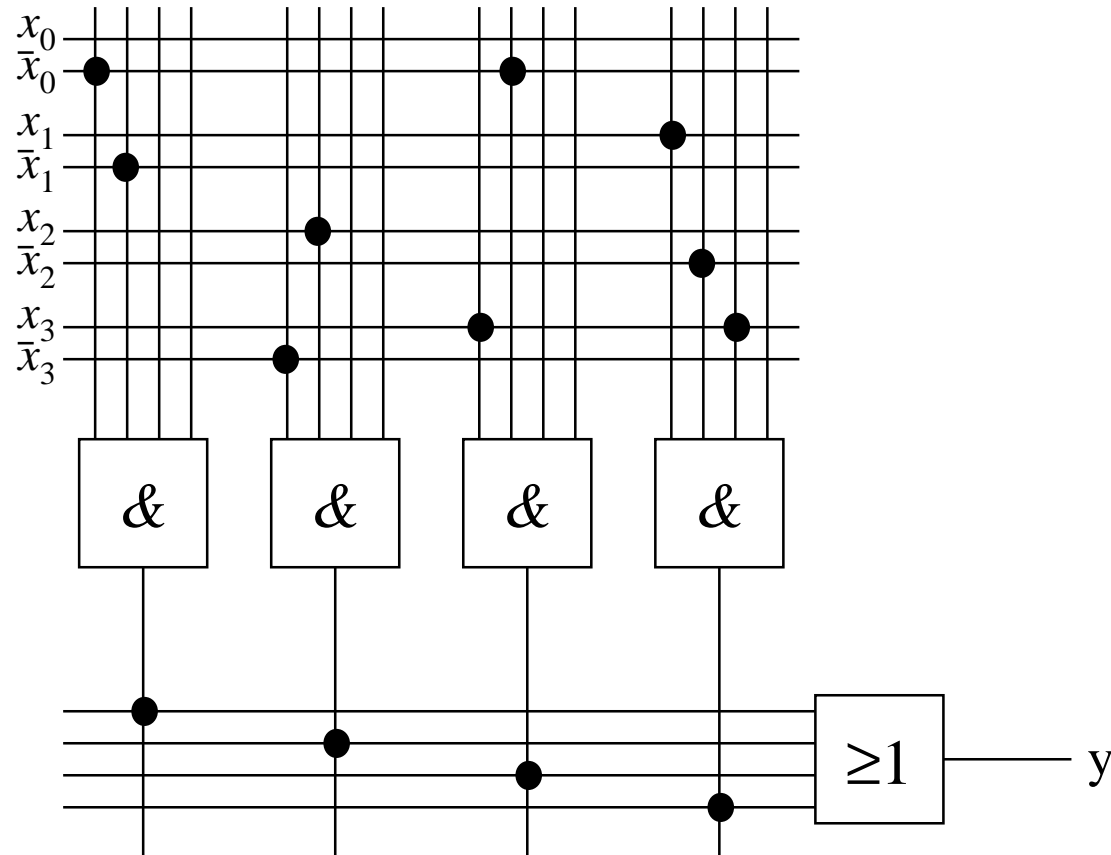


- $e$   $\bar{x}_1 \bar{x}_0$  (0,4,8,12)
- $e$   $\bar{x}_3 x_2$  (4,5,6,7)
- $e$   $x_2 \bar{x}_0$  (4,6,12,14)
- $e$   $x_3 \bar{x}_0$  (8,10,12,14)
- $e$   $x_3 \bar{x}_2 x_1$  (10,11)

$$\begin{aligned}
 f(x_3, x_2, x_1, x_0) &= \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_3 x_2 \vee x_3 \bar{x}_0 \vee x_3 \bar{x}_2 x_1 \\
 &= \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_3 x_2 \vee x_2 \bar{x}_0 \vee x_3 \bar{x}_2 x_1
 \end{aligned}$$

**DMF**

# Realisierung als PLA



$$f(x_3, x_2, x_1, x_0) = \bar{x}_1\bar{x}_0 \vee \bar{x}_3x_2 \vee x_3\bar{x}_0 \vee x_3\bar{x}_2x_1$$

# Zusammenfassung der wichtigsten Begriffe

---

- **Primimplikant:** Implikant maximaler Größe
- **Überdeckung:** alle 1-Stellen einer Funktion werden „abgedeckt“
- **Kernprimimplikant:** Primimplikant der einen Minterm abdeckt, der in keinem anderen Primimplikanten enthalten ist

## 6.3 Bündelminimierung

- Funktionen mit mehreren Ausgängen werden gemeinsam minimiert
- gemeinsame Implikanten sollten mehrfach genutzt werden
- Beispiel: Transformation eines Codes



- Transformationstabelle

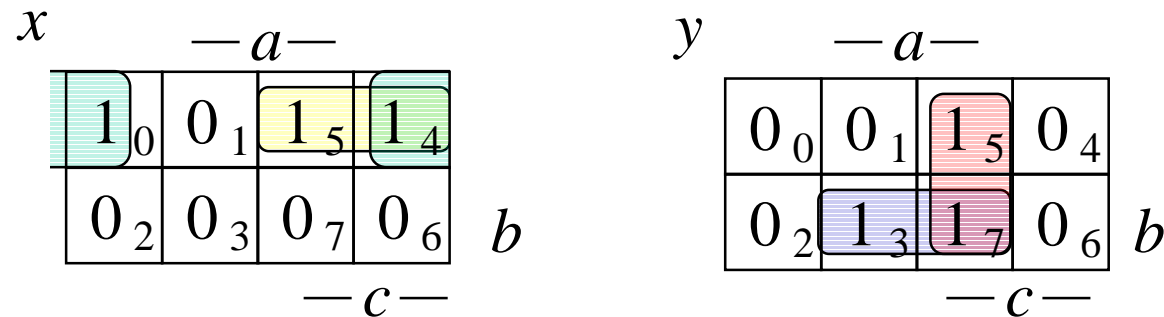
System1			System2	
c	b	a	x	y
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	1	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	0	1

$\overline{x_0}$				
1 <sub>0</sub>	0 <sub>1</sub>	1 <sub>5</sub>	1 <sub>4</sub>	$x_1$
0 <sub>2</sub>	0 <sub>3</sub>	0 <sub>7</sub>	0 <sub>6</sub>	
$\overline{x_2}$				
$\overline{x_0}$				
0 <sub>0</sub>	0 <sub>1</sub>	1 <sub>5</sub>	0 <sub>4</sub>	$x_1$
0 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>7</sub>	0 <sub>6</sub>	
$\overline{x_2}$				

# Bündelminimierung

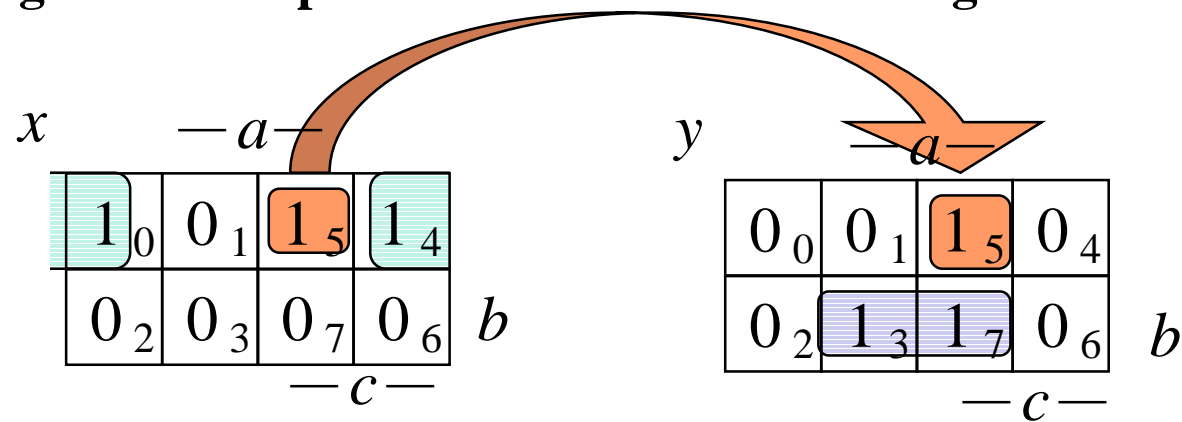
## ○ Getrennte Minimierung

⇒ insgesamt 4 Implikanten für die Realisierung

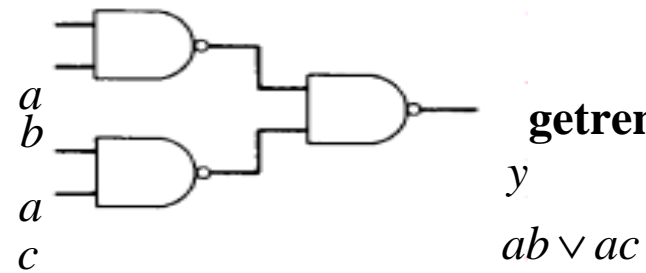
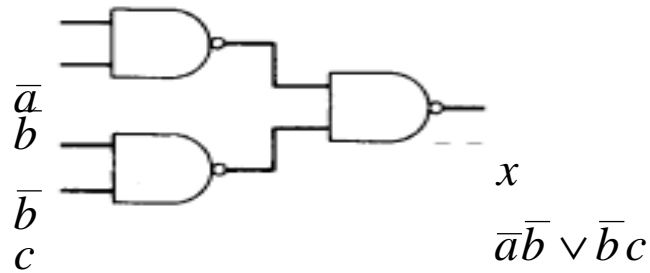


## ○ Bündelminimierung

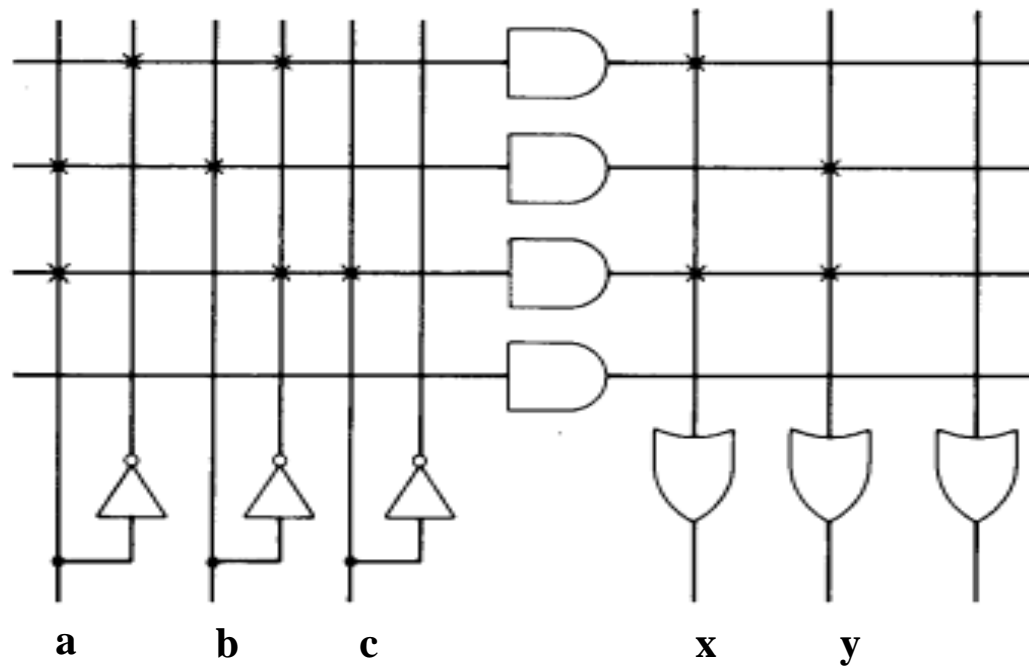
⇒ insgesamt 3 Implikanten für die Realisierung



# Bündelminimierung



getrennte Minimierung



Bündelminimierung

$$x = \bar{a}\bar{b} \vee \bar{a}b$$

$$y = ab \vee \bar{a}b$$

## 6.4 Unvollständig definierte Funktionen

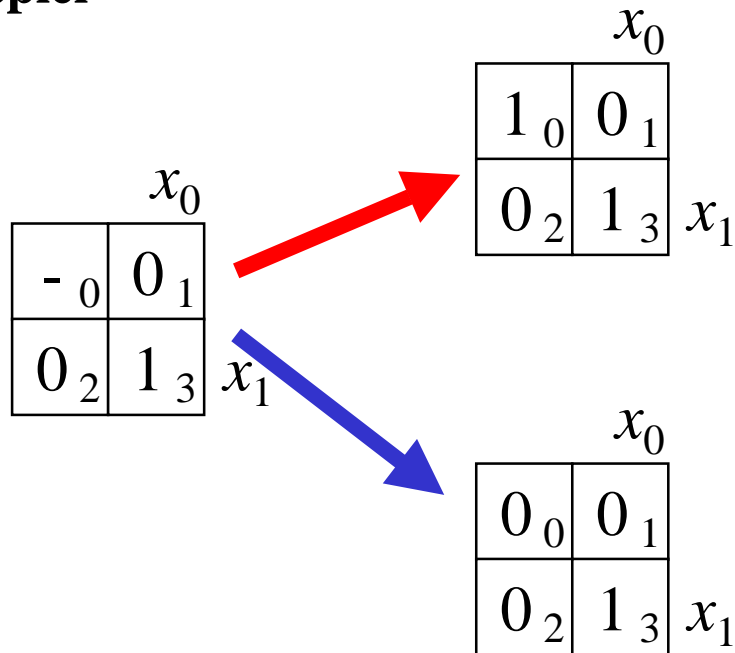
---

- Bisher war für alle Belegungen der Eingänge ein Funktionswert festgelegt
  - ⇒ in praktischen Fällen kommt es sehr häufig vor, daß die Funktionswerte für bestimmte Eingangsbelegungen frei wählbar sind
  - ⇒ diese Funktionswerte sind frei verfügbar
- Solche Funktionen heißen unvollständig oder partiell definierte Funktionen
  - ⇒ die nicht verwendeten Eingangsbelegungen heißen auch don't-care-Belegungen
  - ⇒ in KV-Diagrammen werden diese Felder mit einem „-“ gekennzeichnet
- wichtiges Potential für die Minimierung!
  - ⇒ um eine DMF zu erhalten, müssen diese mit „0“ oder „1“ belegt werden



# Minimierung unvollständiger Boolescher Funktionen

## ○ Beispiel



$$f(x_1, x_0) = x_1x_0 \vee \bar{x}_1\bar{x}_0$$

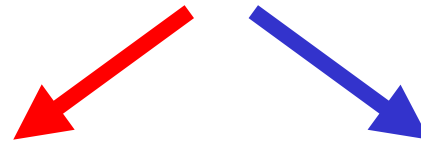
$$f(x_1, x_0) = x_1x_0$$

# Minimierung unvollständiger Boolescher Funktionen

	$\overline{x_0}$					
	1 <sub>0</sub>	0 <sub>1</sub>	- 5	0 <sub>4</sub>		
	- 2	0 <sub>3</sub>	- 7	0 <sub>6</sub>	$x_1$	
$x_3$	0 <sub>10</sub>	1 <sub>11</sub>	0 <sub>15</sub>	0 <sub>14</sub>		
	- 8	1 <sub>9</sub>	1 <sub>13</sub>	1 <sub>12</sub>		
		$\overline{x_2}$				

	$\overline{x_0}$					
	1 <sub>0</sub>	0 <sub>1</sub>	0 <sub>5</sub>	0 <sub>4</sub>		
	0 <sub>2</sub>	0 <sub>3</sub>	0 <sub>7</sub>	0 <sub>6</sub>	$x_1$	
$x_3$	0 <sub>10</sub>	1 <sub>11</sub>	0 <sub>15</sub>	0 <sub>14</sub>		
	1 <sub>8</sub>	1 <sub>9</sub>	1 <sub>13</sub>	1 <sub>12</sub>		
		$\overline{x_2}$				

$$f = x_3 \bar{x}_1 \vee x_3 \bar{x}_2 x_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0$$



	$\overline{x_0}$					
	1 <sub>0</sub>	0 <sub>1</sub>	0 <sub>5</sub>	0 <sub>4</sub>		
	1 <sub>2</sub>	0 <sub>3</sub>	0 <sub>7</sub>	0 <sub>6</sub>	$x_1$	
$x_3$	0 <sub>10</sub>	1 <sub>11</sub>	0 <sub>15</sub>	0 <sub>14</sub>		
	1 <sub>8</sub>	1 <sub>9</sub>	1 <sub>13</sub>	1 <sub>12</sub>		
		$\overline{x_2}$				

$$f = x_3 \bar{x}_1 \vee x_3 \bar{x}_2 x_0 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_0$$

## 6.5 Das Verfahren nach Quine-McCluskey

---

- **KV-Diagramme mit mehr als 6 Variablen werden sehr groß und unübersichtlich**
  - ⇒ dieses Problem wurde zuerst von Quine und McCluskey erkannt und gelöst
  - ⇒ das Verfahren nach Quine-McCluskey ist ein tabellarisches Verfahren
  - ⇒ es führt auf eine DMF (disjunktive minimale Form)
- **Ausgangspunkt ist die Funktionstabelle der Funktion**
  - ⇒ nur die Minterme werden berücksichtigt
- **Der Suchraum wird eingeschränkt, weil der Satz 2.6 gilt:**
  - ⇒ zu jeder Booleschen Funktion  $f$  gibt es eine minimale Überdeckung aus Primimplikanten
- **Verfahren nach Quine McCluskey in 2 Schritten:**
  1. Schritt: berechne alle Primimplikanten
  2. Schritt: suche eine minimale Überdeckung aller Minterme

# Beispiel: Die vollständige Funktionstabelle

Nr.	e	d	c	b	a	y	Nr.	e	d	c	b	a	y
0	0	0	0	0	0	0	16	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	17	1	0	0	0	1	0
2	0	0	0	1	0	1	18	1	0	0	1	0	1
3	0	0	0	1	1	0	19	1	0	0	1	1	0
4	0	0	1	0	0	1	20	1	0	1	0	0	0
5	0	0	1	0	1	1	21	1	0	1	0	1	0
6	0	0	1	1	0	1	22	1	0	1	1	0	1
7	0	0	1	1	1	0	23	1	0	1	1	1	0
8	0	1	0	0	0	0	24	1	1	0	0	0	0
9	0	1	0	0	1	0	25	1	1	0	0	1	0
10	0	1	0	1	0	1	26	1	1	0	1	0	1
11	0	1	0	1	1	0	27	1	1	0	1	1	0
12	0	1	1	0	0	1	28	1	1	1	0	0	0
13	0	1	1	0	1	1	29	1	1	1	0	1	0
14	0	1	1	1	0	1	30	1	1	1	1	0	1
15	0	1	1	1	1	0	31	1	1	1	1	1	0

# 1. Schritt: Berechnung aller Primimplikanten

---

## ○ Schreibweise

- ⇒ **1** steht für eine nicht negierte Variable
- ⇒ **0** steht für eine negierte Variable
- ⇒ **-** steht für eine nicht auftretende Variable

## ○ Man betrachtet nur die Minterme

- ⇒ **1-Stellen der Funktion**

## ○ Die Minterme werden geordnet

- ⇒ **Gruppen mit der gleichen Anzahl von Einsen**
- ⇒ **innerhalb der Gruppen: aufsteigende Reihenfolge**
- ⇒ **man erhält die 1. Quinesche Tabelle, 0. Ordnung**

## ○ Minterme benachbarter Gruppen die sich nur in 1 Variable unterscheiden werden gesucht

- ⇒ **diese können durch Streichen der Variable zusammengefaßt werden**
- ⇒ **man erhält die 1. Quineschen Tabellen höherer Ordnung**

# Beispiel: 1. Quinesche Tabelle

Nr.	e	d	c	b	a
2	0	0	0	1	0
4	0	0	1	0	0
5	0	0	1	0	1
6	0	0	1	1	0
10	0	1	0	1	0
12	0	1	1	0	0
18	1	0	0	1	0
13	0	1	1	0	1
14	0	1	1	1	0
22	1	0	1	1	0
26	1	1	0	1	0
30	1	1	1	1	0

0. Ordnung

Nr.	e	d	c	b	a
2,6	0	0	-	1	0
2,10	0	-	0	1	0
2,18	-	0	0	1	0
4,5	0	0	1	0	-
4,6	0	0	1	-	0
4,12	0	-	1	0	0
5,13	0	-	1	0	1
6,14	0	-	1	1	0
6,22	-	0	1	1	0
10,14	0	1	-	1	0
10,26	-	1	0	1	0
12,13	0	1	1	0	-
12,14	0	1	1	-	0
18,22	1	0	-	1	0
18,26	1	-	0	1	0
14,30	-	1	1	1	0
22,30	1	-	1	1	0
26,30	1	1	-	1	0

1. Ordnung

Nr.	e	d	c	b	a
2,6,10,14	0	-	-	1	0
2,6,18,22	-	0	-	1	0
2,10,18,26	-	-	0	1	0
4,5,12,13	0	-	1	0	-
4,6,12,14	0	-	1	-	0
6,14,22,30	-	-	1	1	0
10,14,26,30	-	1	-	1	0
18,22,26,30	1	-	-	1	0

2. Ordnung

Nr.	e	d	c	b	a
2,6,10,14					
18,22,26,30	-	-	-	1	0

3. Ordnung

## 2. Schritt: Suche einer minimalen Überdeckung

- **Aufstellen der 2. Quineschen Tabelle**

- ⇒ alle Primimplikanten werden zusammen mit der Nummer des Minterms aus dem sie hervorgegangen sind in eine Überdeckungstabelle eingetragen

- **Kosten für einen Primimplikanten:**

- ⇒ Anzahl der UND-Eingänge (Anzahl der Variablen des Terms)

Primimplikant	2	4	5	6	10	12	13	14	18	22	26	30	Kosten
A		X	X			X	X						3
B		X		X		X		X					3
C	X			X	X			X	X	X	X	X	2

- **Aufgabe: Finden einer Überdeckung aller Minterme mit minimalen Kosten**

# Systematische Lösung des Überdeckungsproblems

## ○ Aufstellung einer Überdeckungsfunktion $\ddot{u}_f$

⇒  $w_A, w_B$  und  $w_C$  sind Variablen, die kennzeichnen, ob ein entsprechender Primimplikant in der vereinfachten Darstellung aufgenommen wird, oder nicht

⇒ Konjunktive Form über alle den jeweiligen Minterm überdeckenden Primimplikanten

Primimplikant	2	4	5	6	10	12	13	14	18	22	26	30
A		X	X			X	X					
B		X		X		X		X				
C	X			X	X			X	X	X	X	X

$$\begin{aligned}
 \ddot{u}_f &= w_C(w_A \vee w_B)w_A(w_B \vee w_C)w_C(w_A \vee w_B)w_A(w_B \vee w_C)w_Cw_Cw_Cw_C \\
 &= w_C(w_A \vee w_B)w_A(w_B \vee w_C) \\
 &= (w_Cw_A \vee w_Cw_B)(w_Aw_B \vee w_Aw_C) \\
 &= w_Cw_Bw_A \vee w_Aw_C \\
 & (= w_Aw_C)
 \end{aligned}$$



# Systematische Lösung des Überdeckungsproblems

---

○ Ergebnis nach der Vereinfachung:  $\ddot{u}_f = w_C w_B w_A \vee w_A w_C$

○ Damit  $f$  ganz überdeckt ist, muß  $\ddot{u}_f$  eine Tautologie sein

⇒ man sucht einen konjunktiven Term mit minimalen Kosten

$$w_C w_B w_A \quad \text{Kosten : } 3 + 3 + 2 = 8$$

$$w_A w_C \quad \text{Kosten : } 3 + 2 = 5$$

○ Als Endergebnis der Minimierung für die Funktion  $f$  erhält man

$$f(e, d, c, b, a) = \bar{e} c \bar{b} \vee b \bar{a}$$

# Vereinfachung des Überdeckungsproblems

- Die Primimplikantentabelle kann reduziert werden, indem essentielle Primterme (Kernprimimplikanten) und die von ihnen überdeckten Minterme gestrichen werden
  - ⇒ tragen mit einem einzigen „X“ zu einer Spalte bei
  - ⇒ müssen auf jeden Fall in der Überdeckung enthalten sein

- In diesem Beispiel sind dies die beiden Primimplikanten A und C

Primimplikant	2	4	5	6	10	12	13	14	18	22	26	30	Kosten
A		X	X			X	X						3
B		X		X		X		X					3
C	X			X	X			X	X	X	X	X	2

⇒ A: 5, 13

⇒ C: 2, 10, 18, 22, 26, 30

⇒ B ist vollständig überdeckt und kann ebenfalls gestrichen werden

# Aufwandsbetrachtungen

---

- **Alle Verfahren benötigen 2 Schritte**
  - ⇒ **1. Erzeugen aller Primimplikanten (Primimplikate)**
  - ⇒ **2. Auswahl der Primimplikanten (Primimplikate), welche die Minterme (Maxterme) mit minimalen Kosten überdecken**
- **Die Anzahl der Primimplikanten (Primimplikaten) kann exponentiell steigen**
  - ⇒ **Es gibt Funktionen mit  $\frac{3^n}{n}$  Primimplikanten**
- **Das Überdeckungsproblem ist NP-Vollständig**
  - ⇒ **es besteht wenig Hoffnung einen Algorithmus zu finden, der dieses Problem in polynomial mit der Zahl der Eingabevariablen löst**

# Heuristische Verfahren

---

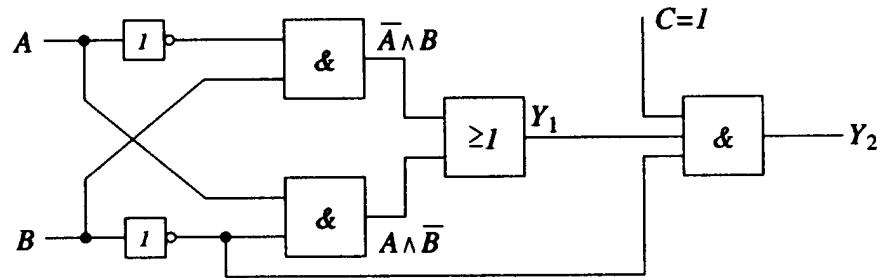
- **Heuristische Minimierungsverfahren werden eingesetzt,**
  - ⇒ wenn die zweistufige Darstellung optimiert werden muß, aber
  - ⇒ nur begrenzte Rechenzeit und Speicherplatz zur Verfügung steht
- **Die meisten heuristischen Minimierungsansätze basieren auf einer schrittweisen Verbesserung der Schaltung**
- **Unterschiede zu exakten Verfahren:**
  - ⇒ man wendet eine Menge von Transformationen direkt auf die Überdeckung des *ON-Sets* an
  - ⇒ man definiert die Optimierung als beendet, wenn diese Transformationen keine Verbesserungen mehr bringen

## 6.6 Laufzeiteffekte in Schaltnetzen

---

- **Bisher wurden Schaltnetze mit idealen Verknüpfungsgliedern betrachtet**
  - ⇒ **die Verknüpfungsgliedern besaßen keine Signallaufzeit**
- **Bei realen Verknüpfungsgliedern dürfen Signallaufzeiten nicht vernachlässigt werden**
  - ⇒ **Schaltvariablen können Werte annehmen, die theoretisch oder bei idealen Verknüpfungsgliedern nie auftreten könnten**
- **Solche Störimpulse nennt man Hazards**
  - ⇒ **sie treten als Antwort auf die Änderung der Werte der Eingangsvariablen auf**

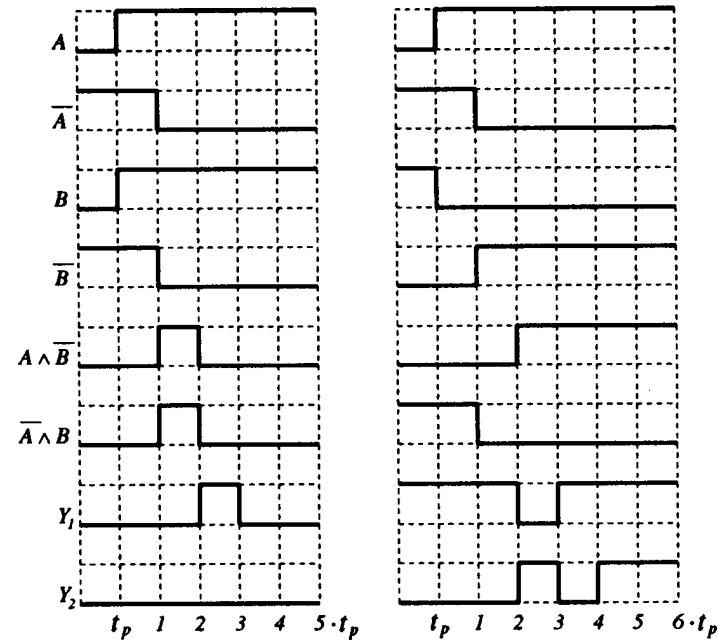
# Entstehung von Hazards



a) Schaltnetz

B	A	$Y_1$	$Y_2$
0	0	0	0
1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	1	1

b) Funktionstabelle



a) Impulsdiagramm

# Statische Hazards

---

- **Statische Hazards sind Störimpulse aus einer Verknüpfung, die theoretisch konstant Null oder Eins liefern müsste**

$X_t \wedge \bar{X}_{t-k}$  **müßte Null liefern**  
**statischer 1-Hazard bei einem Übergang von X: 0→1**

$X_t \vee \bar{X}_{t-k}$  **müßte Eins liefern**  
**statischer 0-Hazard bei einem Übergang von X: 1→0**

# Dynamische Hazards

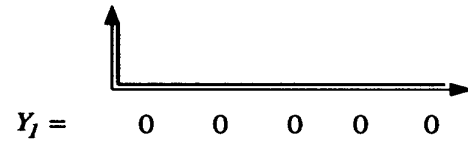
---

- **Dynamische Hazards entstehen als zusätzliche Übergänge beim Ausgang eines Schaltnetzes**
- **$X_t \wedge \bar{X}_{t-k} \vee X_l$ , mit  $l > k$** 
  - ⇒ **bei einem Übergang von  $X=0 \rightarrow X=1$  darf am Ausgang nur ein zu  $X_{t-l}$  synchroner  $0 \rightarrow 1$  Übergang auftreten**
  - ⇒ **durch den vorgeschalteten statischen Hazard kommt es aber zu einer zusätzlichen  $0 \rightarrow 1$  Flanke**
- **$X_t \wedge (\bar{X}_{t-k} \vee X_l)$ , mit  $l > k$** 
  - ⇒ **bei einem Übergang von  $X=0 \rightarrow X=1$  darf am Ausgang nur ein zu  $X_t$  synchroner  $0 \rightarrow 1$  Übergang auftreten**
  - ⇒ **durch den vorgeschalteten statischen Hazard kommt es aber zu einer zusätzlichen  $0 \rightarrow 1$  Flanke**

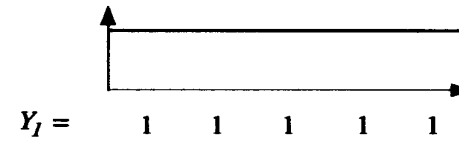


# Klassifikation von Hazards

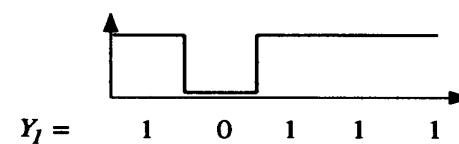
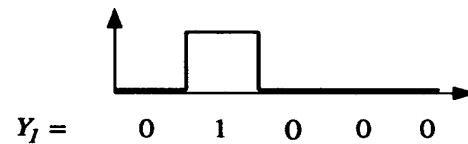
statt



oder



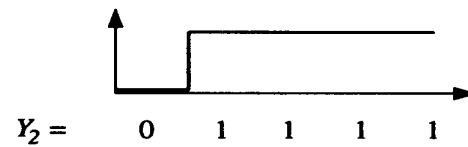
entsteht



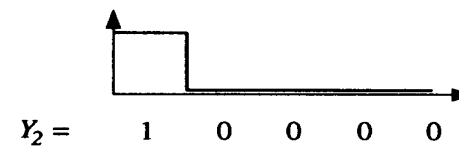
statischer 1 - Hazard

statischer 0 - Hazard

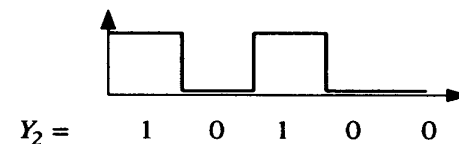
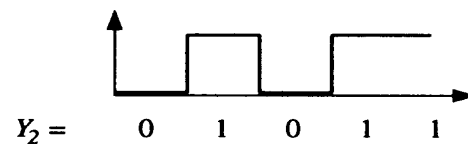
statt



oder



entsteht



dynamischer 0 - Hazard

dynamischer 1 - Hazard

# Behebung von Hazards

---

- Hazards können die Funktion von Schaltnetzen stören
  - ⇒ falsche Werte können an den Eingang eines Schaltnetzes zurückgekoppelt werden
- Um solche Fehler zu vermeiden werden taktflankengetriggerte Speicherglieder in die Rückkopplung eingefügt
- Die Signale werden erst übernommen, wenn die Hazards abgeklungen sind
  - ⇒ nur stabile, gültige Werte werden übernommen
  - ⇒ synchrone Schaltwerke: Schaltwerke, die durch einen zentralen Takt gesteuert werden
- Hazards haben einen Einfluß auf die maximale Schaltgeschwindigkeit
  - ⇒ maximaler Takt
  - ⇒ Entfernung von Hazards führt zu einer Erhöhung der Geschwindigkeit einer Schaltung



