Technische Informatik I
Elektrotechnische Grundlagen

Prof. Dr. U. Kebschull
Technische Informatik

Sprechstunde: Mi 11:00 -12:00 Uhr
kebschull@informatik.uni-leipzig.de

Ziele der Vorlesungen TI 1 und TI 2

- **Physikalische und elektrotechnische Grundlagen mit Bezug**
  - ⇨ **zum Aufbau von Rechnersystemen**
  - ⇨ **zur Speicherung von Daten**
  - ⇨ **zur Übertragung von Signalen**
- **Realisierung von digitalen Funktionen**
  - ⇨ **der Transistor als Schalter**
  - ⇨ **Darstellung**
  - ⇨ **Entwurf**
  - ⇨ **Optimierung von digitalen Schaltungen**
- **Aufbau von Rechnersystemen**
  - ⇨ **am Beispiel der Komponenten eines PC**

Inhalt der Vorlesungen TI1 und TI2

- **Elektrotechnische Grundlagen**
  - ⇨ **Einfache physikalische Zusammenhänge, die verwendet werden um Schaltvorgänge in Rechnersystemen durchzuführen**
- **Halbleitertechnologie**
  - ⇨ **Funktionsweise von Dioden und Transistoren**
  - ⇨ **Einsatz von Transistoren als Schalter**
  - ⇨ **Aktive und passive Bauelemente aus denen Rechnersysteme aufgebaut werden**
- **Digitale Schaltungen**
  - ⇨ **Entwurf, Darstellung und Optimierung von Schaltnetzen und Schaltwerken**
  - ⇨ **Einfache Bausteine aus denen Rechnersysteme aufgebaut sind**

Inhalt der Vorlesungen TI1 und TI2

- **Einführung in die Rechnerarchitektur**
  - ⇨ **Funktion und Aufbau komplexer Bausteine**
  - ⇨ **Komponenten aus denen Rechnersysteme aufgebaut sind**
- **Rechnerarithmetik**
  - ⇨ **Darstellung von Zahlen und Zeichen in Rechnersystemen**
  - ⇨ **Algorithmen zur Berechnung von Operationen wie die vier Grundrechenarten**

Übersicht

Übersicht

Übersicht

Literatur zu dieser Vorlesung

- **Die Vorlesung basiert auf dem Lehrbuch:**
  - ⇨ W. Schiffmann, R. Schmitz:"Technische Informatik 1
    Grundlagen der digitalen Elektronik“
    Springer-Lehrbuch, Springer-Verlag (1992).

- **Weitere Empfehlungen:**
  - ⇨ R.J. Smith, R.C. Dorf: "Circuits, Devices and Systems“
    5. Auflage, John Wiley & Sons (1992)
  - ⇨ Hütte: "Die Grundlagen der Ingenieurwissenschaften“
    29. Auflage, Springer (1992)
    "Hütte" ist ein sehr empfehlenswertes Nachschlagewerk für die Gebiete Mathematik, Physik und Technische Informatik

1 Historischer Überblick

- Griechenland 6. Jh. v.Chr.
  - Mit Seidentuch geriebener Bernstein zieht Staubteilchen, Wollfäden u.a. Körper an. Name: Elektron = Bernstein Magneteisenstein zieht Eisen an
- Gilbert William 1540-1603
  - führt den Begriff *Elektrizität* ein
- Coulomb Charles 1736-1806
  - Coulombsches Gesetz.
- Galvani Luigi 1737-1798
  - Galvanische Elemente: Stromquellen deren Energie durch chemische Vorgänge frei wird

Historischer Überblick

- Volta Alessandro 1745-1827
  - führt die Arbeit Galvanis fort. Konstruiert die Voltaische Säule, die erste brauchbare Elektrizitätsquelle. Von ihm stammt der Begriff des stationären elektrischen Stromes
- Oerstedt Hans Christian 1777-1851
  - entdeckt 1820 die Ablenkung der Magnetnadel durch elektrischen Strom (Elektromagnetismus)
- Ampere Andre Marie 1775-1836
  - entdeckt die mechanische Wirkung stromdurchflossener Leiter aufeinander (Elektrodynamisches Gesetz). Nach ihm wurde die Einheit der Basisgröße Stromstärke benannt
- Faraday Michael 1791-1867 Elektromagnetische Induktion
- Ohm Georg Simon 1787-1854 Ohmsches Gesetz

Historischer Überblick

- Siemens Werner 1816-1892
  - Elektrische Maschinen (dynamoelektrisches Prinzip)
- Kirchhoff Gustav Robert 1824-1887
  - entdeckt die Gesetze der Stromverzweigung.
- Maxwell James Clerk 1831-1879
  - Maxwellsche Gleichungen: Beschreiben alle Erscheinungen, bei denen Elektrizität und Magnetismus miteinander verknüpft sind
- Hertz Heinrich 1857-1894
  - entdeckt experimentell die elektromagnetischen Wellen
- Edison Thomas Alva 1847-1931
  - Erfinder verschiedener Elektrogeräte: Telegraph, Kohlemikrophon, Glühlampe, u.a. Baut 1882 das erste Elektrizitätswerk

Historischer Überblick

- 1886 Lochkarte
  - Herman Hollerith (1860-1929) benutzt die Lochkartentechnik zur Datenverarbeitung. Es handelt sich dabei um ein elektromechanisches Verfahren.
- 1941 Z 3
  - Konrad Zuse baut die erste funktionsfähige Datenverarbeitungsanlage mit Programmsteuerung in Relaistechnik.

Historischer Überblick

- 1946 Eniac
  - Die erste Computergeneration basiert auf der Röhrentechnik Die Erfinder sind J. Presper Eckert und J. William Mauchly und die logischeKonzeption stammt von J. von Neuman
- 1955 Die zweite Computergeneration
  - Shockley, Bardeen und Brattain entdecken 1948 die Transistorwirkung und legen damit den Grundstein für die Mikroelektronik
- 1960 Integrierte Schaltkreise (IC)
  - Die Funktionen von Transistoren, Widerständen und Dioden werden in Planartechnik auf ein Halbleiter-Plättchen aufgebracht

2 Physikalische Grundlagen

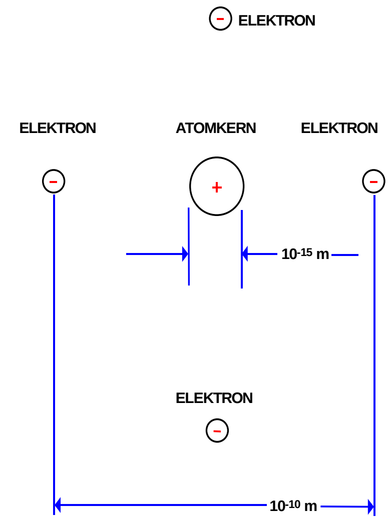
2.1 Elektrische Ladung

- Die Einheit der elektrischen Ladung ist

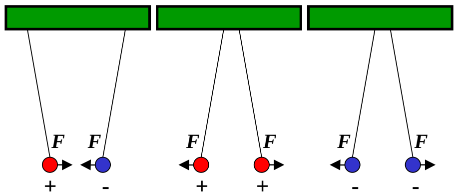
  1C = 1As

- Die Elektrische Ladung eines Elektrons beträgt

  $e_0 = 1{,}602 \times 10^{-19}$ C

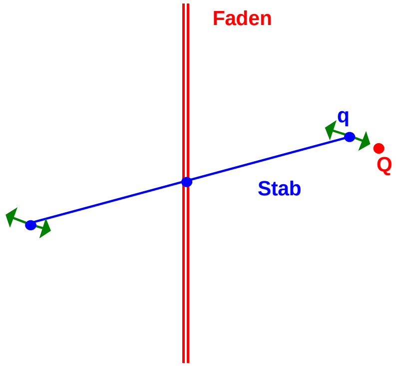


Elektrische Kraft



- Elektrische Ladungen üben Kräfte aufeinander aus
  - ungleiche Ladungen ziehen sich an
  - gleiche Ladungen stoßen sich ab

Messung der Kraft



Torsionswaage (Coulomb, 1785)

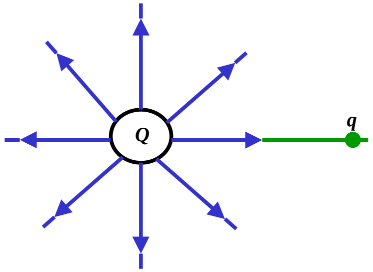
- Für zwei Punktladungen Q und q im Vakuum und im Abstand d gilt:
  - Die Kraft ist proportional dem Produkt der beiden Ladungen $F \sim Q \cdot q$
  - Die Kraft ist umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands

    $$F \sim \frac{1}{d^2}$$

  - Zusammengefaßt ergibt sich

    $$F \sim \frac{Q \cdot q}{d^2}$$

Elektrisches Feld



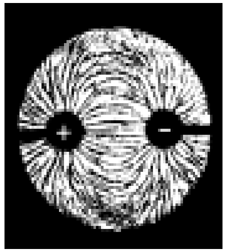
- **Jedem Punkt des Raumes um eine vorgegebene Ladung Q wird eine vektorielle Größe zugeordnet, die um die Probeladung q normiert wird**

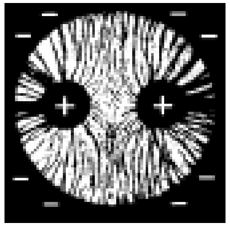
$$\vec{F} = q\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{d^2}\cdot\vec{r}_0$$
$$= q\cdot\vec{E}$$

$$\vec{E} = \lim_{q\to 0}\frac{\vec{F}}{q}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{d^2}\cdot\vec{r}_0$$

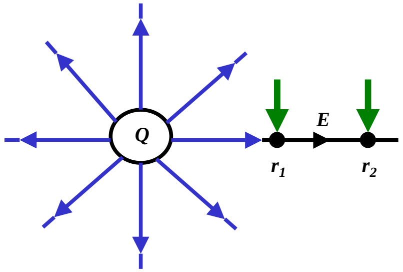
Elektrische Feldlinien





- **Elektrische Feldlinien sind ein Hilfsmittel zur Beschreibung von elektrischen Feldern**
  - ⇨ **sie zeigen immer in Richtung der wirkenden Kraft**
  - ⇨ **sie erfüllen den Raum kontinuierlich**
  - ⇨ **sie beginnen mit einer positiven Ladung und enden mit einer negativen Ladung**
  - ⇨ **sie sind nicht geschlossen**
- **Sie sind keine physikalische Realität**
  - ⇨ **können jedoch sichtbar gemacht werden**

Die elektrische Spannung



- **Wird eine Ladung in einem elektrischen Feld entgegen der Richtung der Feldlinien bewegt, so muß Arbeit verrichtet werden**
  $$W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$$
- **In einem elektrischen Feld wirkt die Kraft** $\vec{F} = \vec{E}\cdot q$
- **Damit beträgt die Arbeit um eine Ladung q von r_1 nach r_2 zu bewegen**

$$W_{r_1\to r_2} = \int_{r_1}^{r_2}\vec{F}\cdot dr = q\int_{r_1}^{r_2}\vec{E}\cdot dr$$

Die elektrische Spannung

- **Die Spannung zwischen r_1 und r_2 wird definiert als die Arbeit, die verrichtet werden muß, um die Elementarladung q von r_1 nach r_2 zu bewegen, normiert um die Ladung q**

$$U_{r_1\to r_2} = \frac{W_{r_1\to r_2}}{q} = \int_{r_1}^{r_2}\vec{E}\cdot dr$$

$$\textbf{Spannung} = \frac{\textbf{Arbeit}}{\textbf{Ladung}}$$

$$1\,\mathrm{V} = 1\frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{C}}$$

Das elektrische Potenzial

- **Normiert man die Energie auf einen Bezugspunkt, so erhält man das elektrische Potenzial φ**

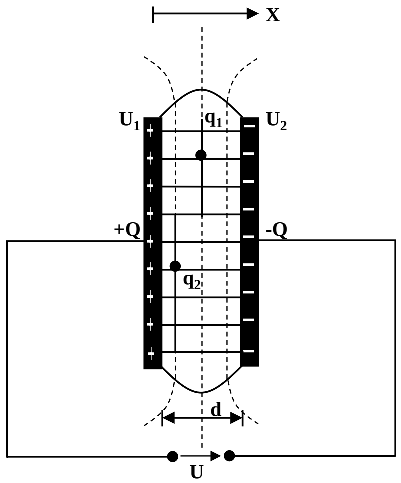
$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \cdot \frac{1}{\vec{r}_0}$$

- **Die Spannung ergibt sich als Potenzialdifferenz**

$$U_{12} = \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2)$$

Elektrische Ladung auf Leitern

- **Auf metallischen Leitern sind Ladungen frei beweglich**
  - ⇨ **sie stoßen sich ab und verteilen sich gleichmäßig an der Oberfläche**
- **Alle Feldlinien stehen senkrecht zur Oberfläche**
  - ⇨ **im Innern eines metallischen Hohlraums ist ein feldfreier Raum (faradayscher Käfig)**
- **Stehen sich zwei Metallflächen gegenüber, so entsteht ein Plattenkondensator**
  - ⇨ **Die Flächen bilden Potenzialflächen $\varphi_1 \varphi_2$**



Elektrische Flußdichte

- **Flußdichte *D* ist die Ladungsmenge pro Flächeneinheit** $D = \frac{Q}{A}$
- **Für eine beliebige Fläche**

$\iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$ **wenn Q innerhalb der von A umschlossenen Fläche liegt**

$\iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = 0$ **sonst**

- **Für eine Kugelfläche bei der die Ladung im Mittelpunkt steht:**

$$\iint_{Kugelfläche} \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q \quad \textbf{mit} \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{d^2} \cdot \vec{r}_0 \quad \textbf{folgt}$$

$$D \cdot 4\pi r^2 = Q \qquad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$D = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{Q}{r^2} \qquad [\varepsilon_0] = \frac{[D]}{[E]} = \frac{C}{m^2} \cdot \frac{m}{V} = \frac{C}{V \cdot m}$$

Wirkung eines Dielektrikum

- **ε_0 gilt für Vakuum**
- **Die Kraft auf eine Probeladung q verändert sich, wenn der Raum ausgefüllt ist**
  - ⇨ **Dielektrizitätskonstante ε_r**

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \vec{E}$$

- **Beispiele für ε_r**

Material	ε_r
Vakuum	1,0
Luft	1,006
Papier	5,4
Porzellan	5,5
Glas	3...15
Marmor	8,4...14
Ethylalkohol	25,1
Glycerin	41,1
Wasser	81,0
Bariumtitanat	1000...9000

Kapazität eines Plattenkondensators

- **Näherung d << A**
  - **alle Feldlinien laufen parallel und befinden sich innerhalb der Platten**
- **damit gilt mit der Potenzialdifferenz**

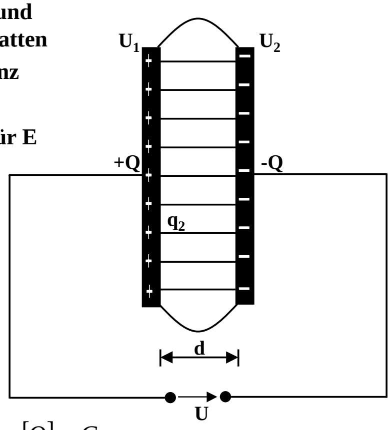
$$U = E \cdot d$$

- **mit der vereinfachten Gleichung für E**

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 \cdot A}$$

gilt

$$U = \frac{Q}{\varepsilon_0 \cdot A} \cdot d$$



- **Kapazität C ist**

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{d}$$

- **Einheit der Kapazität: Farad**

$$[C] = \frac{[Q]}{[U]} = \frac{C}{V} = F$$

2.2 Elektrischer Strom

- **Elektrischer Strom ist der Fluß von Elektronen**
- **Ladung eines Elektrons e_0= 1.602*10^{-19} C**

$$1\,\mathrm{C} = \frac{1}{1{,}602} \cdot 10^{19} \text{ Elektronenladungen}$$

- **Die Stromstärke I entspricht der bewegten Ladungsmenge pro Zeiteinheit**

$$I = \frac{Q}{t}$$

- **Fließen durch einen Leiter pro Sekunde n Coulomb, so messen wir einen Strom von n Ampere [A]**

$$1\,\mathrm{A} = 1\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}} = \frac{1}{1{,}602} \cdot 10^{19} \frac{\text{Elektronen}}{\text{s}}$$

Variabler elektrischer Strom

- **Ist die Stromstärke von der Zeit abhängig, benutzt man die differentielle Schreibweise**

$$i(t) = \frac{dQ}{dt}$$

- **daraus folgt**

$$dQ = i(t) \cdot dt$$

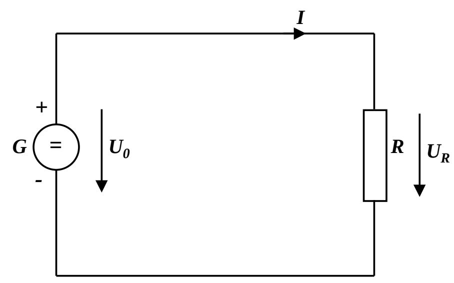
$$Q = \int_{t_0}^{t_1} i(t) \cdot dt$$

- **in Einheiten**

$$1\,\mathrm{C} = 1As$$

Elektrischer Stromkreis

- **Ein elektrischer Stromkreis ist eine Anordnung aus**
  - **Stromerzeuger *G* (Generator)**
  - **Verbraucher *R***
  - **Verbindungsleitungen**
- **In *G* wird Energie aufgewendet**
  - **(W< 0)**
- **In R wird Energie verbraucht**
  - **(W> 0)**
- **Der elektrische Strom fließt (per Definition) von Plus (+)nach Minus (-)**
- **Spannung im Stromerzeuger *G* bewirkt im Verbraucher R einen Stromfluß von Plus nach Minus (Pfeilrichtung)**

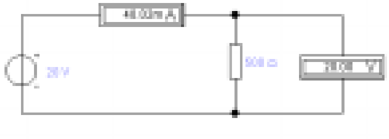


Leitwert und Widerstand

- **Zahlenmäßiger Zusammenhang zwischen Spannung und Strom an einem Verbraucher**
  - **Der gemessene Strom *I* ist proportional zur Spannung *U***

$$I \sim U$$

$$I = G \cdot U$$



- **Der Proportionalitätsfaktor *G* wird Leitwert genannt**
- **Die Einheit von *G* ist *Siemens***

$$1\mathrm{S} = 1\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}}$$

- **in der Praxis verwendet man den Kehrwert von *G*, den Widerstand *R***

$$R = \frac{1}{G}$$

Ohmsches Gesetz

- **Es gibt einen festen Zusammenhang zwischen dem Strom *I* und der Spannung *U***
  - **ohmsches Gesetz**

$$I = \frac{1}{R} \cdot U$$

$$U = R \cdot I$$

$$R = \frac{U}{I}$$

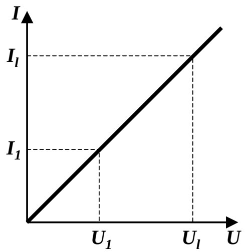
- **Die Einheit für den Widerstand ist Ohm Ω**

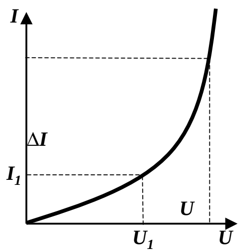
$$1\Omega = 1\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}$$

Kennlinienfeld

- **Der Zusammenhang zwischen dem Strom *I* und der Spannung *U* kann in einem Kennlinienfeld dargestellt werden**
  - **X-Achse: Spannung *U***
  - **Y-Achse: Strom *I***
- **Ist der Proportionalitätsfaktor *G* konstant, so spricht man von einem *linearen* Widerstand**
- **Beispiel: metallische Leiter sind lineare Widerstände; er ist**
  - **proportional zur Länge *l***
  - **umgekehrt proportional zur Fläche *A***
  - **abhängig vom Material**

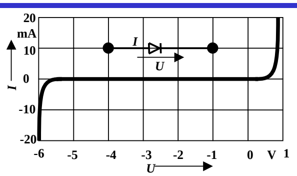
$$R = \rho \frac{l}{A} \qquad [\rho] = \Omega \frac{\mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$$



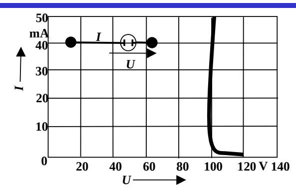


Kennlinien verschiedener Bauelemente

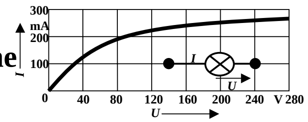
Diode



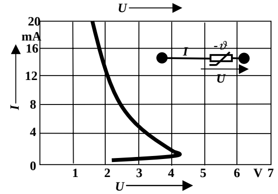
Glimm-lampe



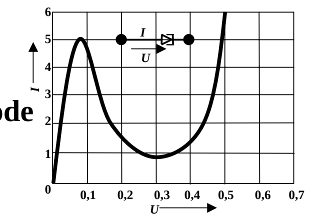
Glühbirne



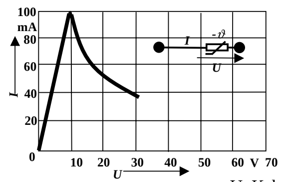
Heiß-leiter



Tunneldiode



Kalt-leiter



Arbeit und Leistung des elektrischen Stroms

- **Elektrische Arbeit *W* wird verrichtet, wenn eine Ladung *Q* von einem Potenzial φ_1 zu einem Potenzial φ_2 transportiert wird**

$$W = q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = Q \cdot U$$
$$= I \cdot t \cdot U$$
$$= I^2 \cdot R \cdot t$$

- **Die Einheit der elektrischen Arbeit ist Joule (J)**

$$1\mathrm{J} = 1\mathrm{Ws} = 1\mathrm{AVs}$$

- **Mit [V]=Nm/C und [A]=C/s gilt**

$$1\mathrm{J} = 1\mathrm{AVs} = 1\frac{\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{C}} \cdot \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}} \cdot \mathrm{s} = 1\,\mathrm{Nm}$$

- **Die elektrische Leistung *P* entspricht der (elektrischen) Arbeit pro Zeiteinheit**

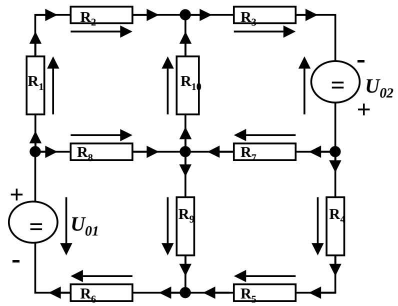
$$P = \frac{W}{t} = U \cdot I = I^2 R = \frac{U^2}{R}$$

- **Die Einheit der elektrischen Leistung ist Watt (W)**

$$1\mathrm{W} = 1\mathrm{VA}$$

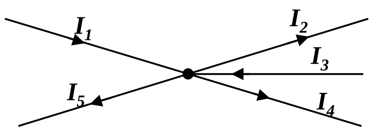
Die Kirchhoffschen Sätze

- **Nur selten wird an einem Stromerzeuger *G* nur ein einzelner Verbraucher *R* angeschlossen**
- **Eine Anordnung aus Spannungsquellen und Verbrauchen heißt Netz**
- **Es besteht aus Knoten und Maschen**
  - **Knoten: Verzweigungspunkte**
  - **Masche: Pfad, bei dem kein Knoten mehrfach durchlaufen wird**
- **Richtung der Pfeile (Vorzeichen)**
  - **Spannung ist von Plus nach Minus gerichtet**
  - **Strom fließt von Plus nach Minus**



Knotenregel (1. Kirchhoffscher Satz)

- **In einem Knoten ist die Summe aller Ströme Null**
  - **An keiner Stelle des Netzes werden Ladungen angehäuft**
- **Definition der Stromrichtung für die mathematische Formulierung**
  - **zufließende Ströme werden mit einem positiven Vorzeichen behaftet**
  - **abfließende Ströme werden mit einem negativen Vorzeichen behaftet**



$$0 = I_1 - I_2 + I_3 - I_4 - I_5$$

oder

$$I_2 + I_4 + I_5 = I_1 + I_3$$

allgemein

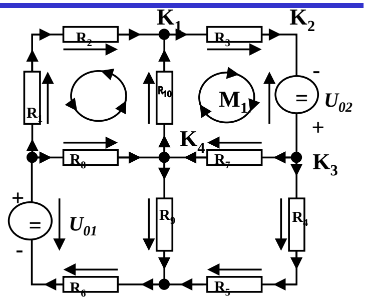
$$\sum_{i=0}^{n} I_i = 0$$

Maschenregel (2. Kirchhoffscher Satz)

- **Bei einem geschlossenen Umlauf einer Masche ist die Summe aller Spannungen Null**
  - **die Spannungsquellen erzeugen die Spannungen U_{01} und U_{02}**
  - **durch die Widerstände fließt ein Strom**
  - **nach dem Ohmschen Gesetz gilt für die Spannung**

$$U = R \cdot I$$

  - **die Knotenpunkte K_1, K_2, K_3 und K_4 können deshalb unterschiedliches Potenzial besitzen**



$$\varphi_2 - \varphi_1 = U_{K_{12}}$$
$$\varphi_3 - \varphi_2 = U_{K_{23}} = U_{02}$$
$$\varphi_4 - \varphi_3 = U_{K_{34}}$$
$$\varphi_1 - \varphi_4 = U_{K_{14}}$$

Maschenregel (2. Kirchhoffscher Satz)

- Werden die Potenzialdifferenzen addiert, so folgt:

$$\varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_3 - \varphi_2 + \varphi_4 - \varphi_3 + \varphi_1 - \varphi_4 = 0$$

$$U_{K_{12}} + U_{K_{23}} + U_{K_{34}} + U_{K_{14}} = 0$$

- Vorzeichen der Spannung
  - ⇨ die Spannungsrichtung der Quellen ist vorgegeben (von + nach -)
  - ⇨ Umlaufrichtung der Masche wird festgelegt
  - ⇨ Spannungspfeile gegen die Umlaufrichtung werden negativ gezählt
  - ⇨ Spannungspfeile mit der Umlaufrichtung werden positiv gezählt

$$U_{K_{12}} - U_{02} + U_{K_{34}} + U_{K_{14}} = 0$$

$$U_{K_{12}} + U_{K_{34}} + U_{K_{14}} = U_{02}$$

Anwendung 1: Knotenregel

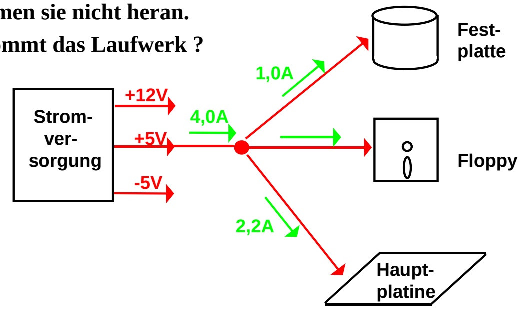
Sie haben einen neuen Personal Computer gekauft.

Sie benutzen ein Strommeßgerät (Ampere-Meter) und stellen damit fest, daß die 5 Volt Stromversorgung Ihres PC im eingeschalteten Zustand 4,0 A liefert. Versorgt wird damit die Hauptplatine, das Festplattenlaufwerk und das Floppy Laufwerk.

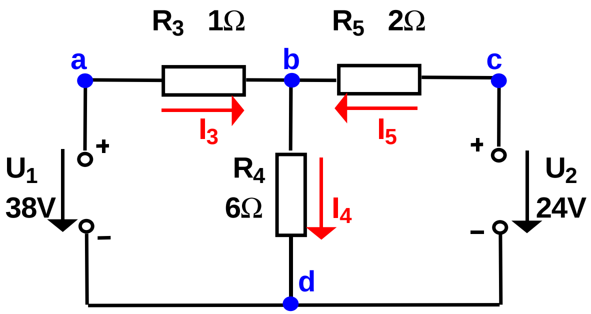
Sie messen, daß der Strom in die Hauptplatine 2,2 A beträgt und der Strom in die Festplatte 1,0 A.

An das Floppylaufwerk kommen sie nicht heran.

Wieviel Strom zu 5 Volt bekommt das Laufwerk ?



Anwendung 2: Knoten- und Maschenregel



- Gesucht sind I_3, I_4 und I_5
- Knotenregel: $\sum I_b = +I_3 - I_4 + I_5 = 0$
- Maschenregel: $\sum U_{abd} = U_1 - I_3 R_3 - I_4 R_4 = 0$

  $\sum U_{cbd} = U_2 - I_5 R_5 - I_4 R_4 = 0$

$$I_3 - I_4 + I_5 = 0$$
$$1 \cdot I_3 + 6 \cdot I_4 = 38$$
$$2 \cdot I_5 + 6 \cdot I_4 = 24$$

Substitutionsmethode

$$I_3 + I_5 = I_4 \qquad I_4 = 8 - 3 = 5$$
$$1 \cdot I_3 + 6 \cdot (I_3 + I_5) = 38$$
$$2 \cdot I_5 + 6 \cdot (I_3 + I_5) = 24$$

$$(1+6) \cdot I_3 + 6 \cdot I_5 = 38$$
$$6 \cdot I_3 + (6+2) \cdot I_5 = 24$$

$$I_3 = \frac{38 - 6 \cdot I_5}{7} \qquad I_3 = \frac{38 - (6 \cdot -3)}{7} = \frac{38+18}{7} = \frac{56}{7} = 8$$

$$6 \cdot \frac{38 - 6 \cdot I_5}{7} + 8 \cdot I_5 = 24$$
$$6 \cdot 38 - 36 \cdot I_5 + 56 \cdot I_5 = 24 \cdot 7$$
$$20 \cdot I_5 = 168 - 228$$
$$I_5 = -\frac{60}{20} = -3$$

Negatives Vorzeichen, da falsche Annahme der Stromrichtung

Lösung über Determinaten

System von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}X_1 & + & a_{12}X_2 & + & a_{13}X_3 & + & \cdots & a_{1n}X_n & = b_1 \\ a_{21}X_1 & + & a_{22}X_2 & + & a_{23}X_3 & + & \cdots & a_{2n}X_n & = b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{n1}X_1 & + & a_{n2}X_2 & + & a_{n3}X_3 & + & \cdots & a_{nn}X_n & = b_n \end{array}$$

Determinate der Koeffizienten des Gleichungssystems

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Cramersche Regel

$$X_1 = \frac{1}{D} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{D_1}{D}$$

Berechnung von Determinaten

- **Determinante 2. Ordnung**

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- **Determinate 3. Ordnung**

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Berechnung von Determinaten

- **Determinate 4. Ordnung**

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$
$$+ a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{41} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

Für das Beispiel

- **Gleichungssystem**

$$I_3 - I_4 + I_5 = 0$$
$$I_3 + 6 \cdot I_4 = 38$$
$$6 \cdot I_4 + 2 \cdot I_5 = 24$$

- **Determinate D**

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot 6 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 6 \cdot 1$$
$$-1 \cdot 6 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 \cdot 2 - 0 \cdot 6 \cdot 1$$
$$= 12 + 6 + 2 = 20$$

- **Für I_5**

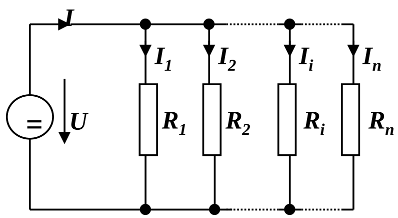
$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & 38 \\ 0 & 6 & 24 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot 6 \cdot 24 + (-1) \cdot 38 \cdot 0 + 1 \cdot 6 \cdot 0$$
$$- 0 \cdot 6 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 \cdot 24 - 38 \cdot 6 \cdot 1$$
$$= 6 \cdot 24 + 24 - 38 \cdot 6 = 144 + 24 - 228 = -60$$

$$I_5 = \frac{D_5}{D} = \frac{-60}{20} = -3$$

Sonderfall 1: Parallelschaltung von Widerständen

- Für die Teilströme $I_1, I_2, \ldots, I_n$ gilt:

$$I_1 = \frac{U}{R_1}, I_2 = \frac{U}{R_2}, \ldots, I_n = \frac{U}{R_n}$$



- Nach der Knotenregel ist der Gesamtstrom:

$$I = I_1 + I_2 + \ldots + I_n$$
$$= \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \ldots + \frac{U}{R_n}$$
$$= U \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n} \right)$$

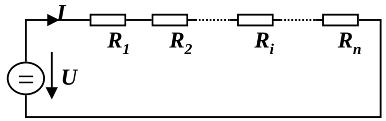
- Der Ersatzwiderstand der gesamten Schaltung berechnet sich durch:

$$\frac{1}{R_{gesamt}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}$$

Sonderfall 2: Serienschaltung von Widerständen

- Für die Spannungen $U_1, U_2, \ldots, U_n$ an den Widerständen gilt:

$$U_1 = I \cdot R_1, U_2 = I \cdot R_2, \ldots, U_n = I \cdot R_n$$



- Nach Maschenregel ist die Gesamtspannung:

$$U = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$$
$$= I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + \ldots + I \cdot R_n$$
$$= I \cdot (R_1 + R_2 + \ldots + R_n)$$

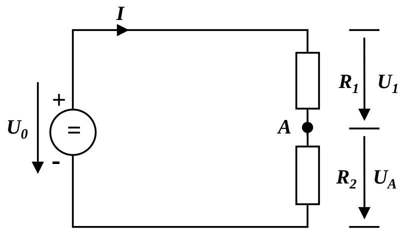
- Der Ersatzwiderstand der gesamten Schaltung berechnet sich durch:

$$R_{gesamt} = R_1 + R_2 + \ldots + R_n$$

Sonderfall 3: Spannungsteiler

- Reihenschaltung von zwei Widerständen
- Für das Verhältnis der Spannungen U_1 und U_2 gilt:

$$I = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_A}{R_2} \Rightarrow \frac{U_1}{U_A} = \frac{R_1}{R_2}$$



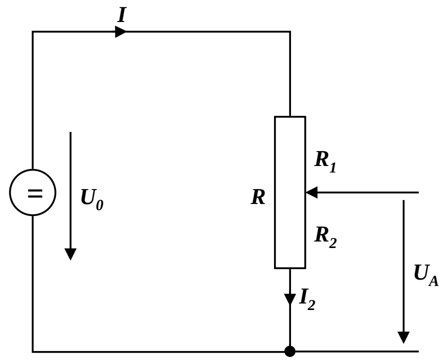
- Ist U_0, R_1 und R_2 gegeben, so folgt für U_A:

$$\frac{U_1}{U_A} = \frac{R_1}{R_2}, \; U_1 = U_0 - U_A \;\Rightarrow \frac{U_0 - U_A}{U_A} = \frac{R_1}{R_2}$$
$$\Rightarrow \frac{U_0}{U_A} - \frac{U_A}{U_A} = \frac{R_1}{R_2}$$
$$\Rightarrow \frac{U_0}{U_A} = \frac{R_1}{R_2} + 1$$
$$\Rightarrow U_A = \frac{U_0}{\frac{R_1}{R_2} + 1}$$

Sonderfall 4: Potentiometerschaltung

- Bei einem Potentiometer gilt zusätzlich:

$$R_1 = R - R_2$$

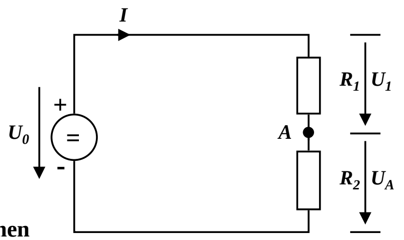


- Damit folgt:

$$U_A = \frac{U_0}{\frac{R_1}{R_2} + 1}$$
$$= \frac{U_0}{\frac{R - R_2}{R_2} + 1}$$
$$= \frac{U_0}{\frac{R - R_2}{R_2} + \frac{R_2}{R_2}} = \frac{U_0}{\frac{R - R_2 + R_2}{R_2}} = U_0 \cdot \frac{R_2}{R}$$

Graphische Bestimmung des Arbeitspunkts

- **Praktische Anwendung bei nichtlinearen Kennlinien**
  - ⇨ **Dioden, Transistoren**
- **Vorgehen:**



1. Kennlinie für R2 einzeichnen

2. Kennlinie für R1 in das selbe Diagramm einzeichnen

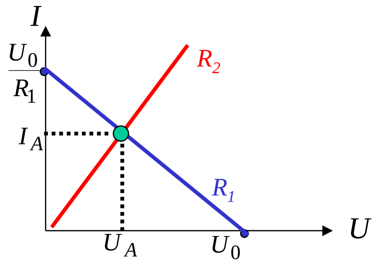
$$I = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_0 - U_A}{R_1}$$

2 Punkte:

$$U_A = 0 \Rightarrow I = \frac{U_0}{R_1}$$

$$U_A = U_0 \Rightarrow I = 0$$

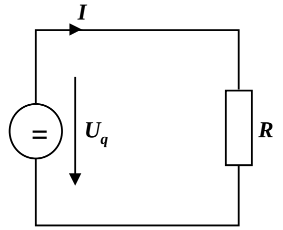
3. Schnittpunkt A ergibt den Arbeitspunkt mit Spannung U_A und Strom I_A



Quellen- und Klemmenspannung

- **Ideale Spammungsquelle:**
  - ⇨ **nach dem Ohmschen Gesetz**

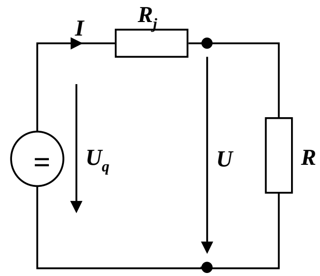
$$\lim_{R \to 0} I = \infty$$



- **Eine reale Spannungsquelle kann durch Hinzufügen eines Innenwiderstands modelliert werden**
  - ⇨ **die abgreifbare Spannung heißt Klemmenspannung**

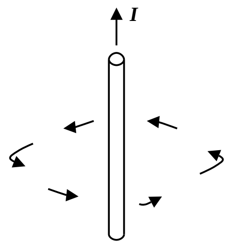
$$U = U_q - I \cdot R_i$$

$$I = \frac{U_q}{R + R_i}$$



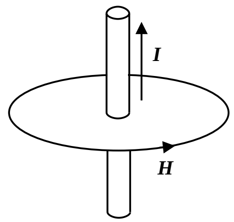
2.3 Elektromagnetisches Feld

- **Versuch von Oerstedt (1819/1820)**
  - ⇨ **in der Nähe eines stromdurchflossenen Leiters werden Magnetnadeln abgelenkt**
  - ⇨ **alle Magnetnadeln richten sich kreisförmig aus**
  - ⇨ **alle Magnetnadel haben den gleiche Drehsinn**



Magnetische Feldlinien

- **Das magnetische Feld wird wie das elektrische Feld anschaulich durch Feldlinien beschrieben**
  - ⇨ **die magnetischen Feldlinien umschließen den Leiter ringförmig**
  - ⇨ **Feldlinien sind konzentrisch um den Leiter angeordnet**
- **Für die Richtung der Feldlinien gilt die Rechte-Hand-Regel:**
  - ⇨ **zeig der Daumen der <u>rechten</u> Hand in Richtung des Stromes im Leiter, so zeigen die Finger, die den Leiter umfassen in Richtung der Feldlinien**



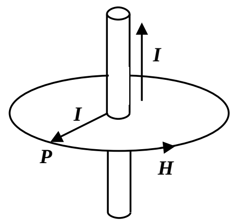
Magnetische Feldstärke

- Grad der Auslenkung der Magnetnadeln als Maß für die Kraft
  - Kraft F proportional zur magnetischen Feldstärke H

    $$F \sim H$$
  - die magnetische Feldstärke H ist proportional zum Strom I

    $$H \sim I$$
  - die magnetische Feldstärke H ist umgekehrt proportional zum Abstand r

    $$H \sim \frac{1}{r}$$



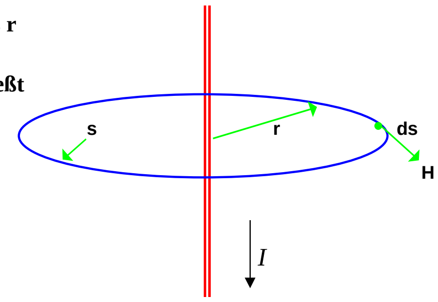
- Die Konstante wird $\frac{1}{2\pi}$ gesetzt

$$H = \frac{I}{2\pi r} \qquad [H] = \frac{[I]}{[l]} = \frac{A}{m}$$

Das Durchflutungsgesetz

- Zusammenhang zwischen dem magnetischen Feld und dem verursachenden elektrischen Strom
  - A = Kreisfläche mit dem Radius r
  - j = Strom, der durch das Teilelement dA der Fläche A fließt (Stromdichte)
  - s = geschlossener Weg (hier Kreisbahn, Radius r)
  - ds =kleines Teilstück von s

$$\oint \vec{H} ds = \int_A j d\vec{A} = \sum_k I_k = I$$

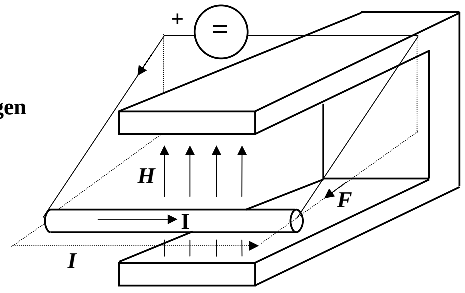


(mathematisch: Linienintegral der magnetischen Feldstärke H längs des geschlossenen Weges s = "magnetische Umlaufspannung“)

Kraftwirkung magnetischer Felder auf stromdurchflossene Leiter

- Wechselwirkung zweier Magnetfelder
  - Leiter
  - Hufeisenmagnet
- Quantitative Untersuchungen ergeben:

$$F \sim I$$
$$F \sim l$$
$$F \sim H$$
$$F = \mu \cdot I \cdot l \cdot H$$



l	Länge des Drahtstücks
H	magnetisches Feld
F	Kraft
I	Strom

Magnetische Induktion

- Man definiert die magnetische Induktion B über die Kraft F
- Wenn der Draht senkrecht zur Feldrichtung steht gilt:
  - Die magnetische Induktion B beträgt genau 1 Tesla (T), wenn ein 1m langer Draht die Kraft von 1N erfährt

$$\vec{F} = I \cdot l \cdot \vec{B}$$

- In Einheiten

$$[B] = \frac{[A]}{[I] \cdot [l]} = \frac{N}{A \cdot m} = \frac{V \cdot s}{m^2}$$

Magnetische Feldstärke und Induktion

- Die magnetische Feldstärke *H* beschreibt die Ursache des magnetische Felds
  - ⇨ unabhängig von Materialeigenschaften
  - ⇨ wird verursacht durch einen Strom
- Die magnetische Induktion *B* beschreibt die Wirkung des magnetische Felds
  - ⇨ Kraft auf Eisenteile
  - ⇨ Kraft auf stromdurchflossenen Leiter
- Es gilt

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H}$$

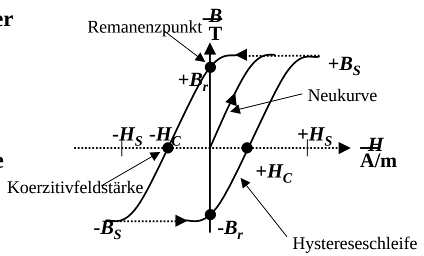
Permeabilität

- Proportionalitätsfaktor $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$
- Permeabilitätszahl μ_r beschreibt die magnetische Eigenschaft von Stoffen

Stoff	Eigenschaft	Permeabilitäts-zahl μ_r	Verhalten	Anwendung
Cu, Si, Bi, H_2O	diamagnetisch	< 1	Abstoßung vom Magnetfeld	technisch nicht verwendbar
Al, Pt, Luft	paramagnetisch	> 1	Anziehung vom Magnetfeld	technisch nicht verwendbar
Cr, FeO_2	antiferro-magnetisch	= 1	unmagnetisch	technisch nicht verwendbar
Fe, Stähle, Legierungen	ferro-magnetisch	$10^1 \ldots 10^6$	stark magnetisch	Transformatoren, elektrische Maschinen, magnetische Kreise
Ferrite	ferri-magnetisch	bis $3 \cdot 10^3$	stark magnetisch	Permanentmagnete, HF-Spulkerne

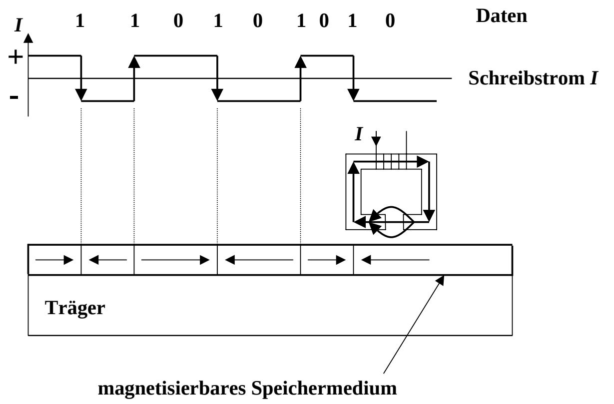
Ferromagnetische Stoffe im Magnetfeld

- Die Permeabilität ist in Ferromagnetischen Stoffen nicht konstant
  - ⇨ Hysterese
- Erklärung: Drehprozesse kleiner Elementarmagneten im ferromagnetischen Material
  - ⇨ Zunächst nimmt die magnetische Induktion *B* proportional zur Feldstärke *H* zu (Neukurve)
  - ⇨ B_s entspricht der Sättigung
  - ⇨ Auch nach Wegnahme des magnetischen Felds *H* bleibt der ein magnetische Induktion B_r bestehen
  - ⇨ Erst bei $-H_c$ wird *B* wieder 0



Anwendung

- Speicherung binärer Daten auf einem magnetischen Träger
- FM-Verfahren
  - ⇨ bei jeder „1“ wird die Schreibstromrichtung geändert



Elektromagnetische Induktion

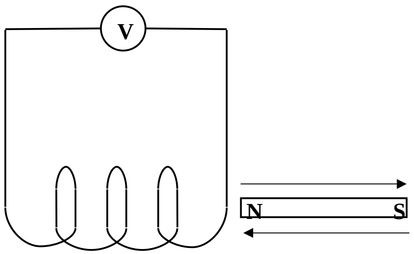
- **Wird ein Stabmagnet in eine Spule eingebracht, so sieht man während der Bewegung einen Ausschlag am Voltmeter**
- **Wird der Stabmagnet wieder herausgezogen, schlägt das Voltmeter in die Gegenrichtung aus**
  - ⇨ **Eine Spannung U_i wird induziert**

$$U_i \sim \frac{1}{\Delta t}$$

$$U_i \sim B$$

$$U_i \sim A$$

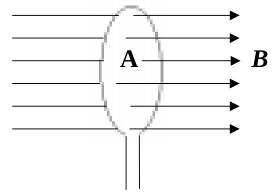
$$U_i \sim \frac{B \cdot A}{\Delta t}$$



Magnetischer Fluß

- **Der magnetische Fluß Φ entspricht anschaulich der Anzahl der Feldlinien, die durch eine Fläche gehen**
- **Die magnetische Induktion B ist ist die Dichte der Feldlinien**

$$\Phi = B \cdot A$$



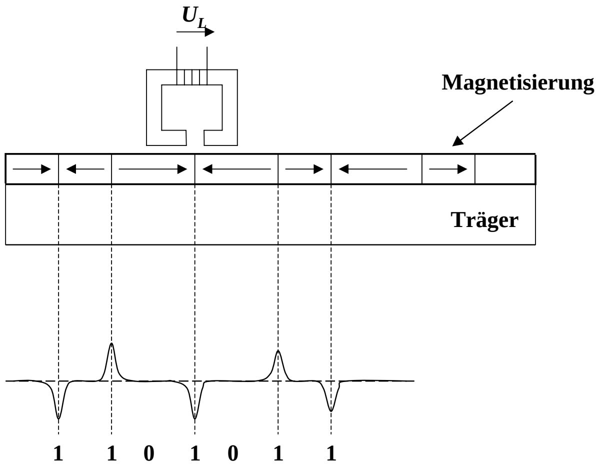
- **Daraus folgt**

$$U_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

- **Das Minuszeichen entspricht der Lenzschen Regel:**
  Die induzierte Spannung ist so gepolt, daß sie durch einen von ihr erzeugten Strom der Ursache des Induktionsvorgangs entgegen wirken kann

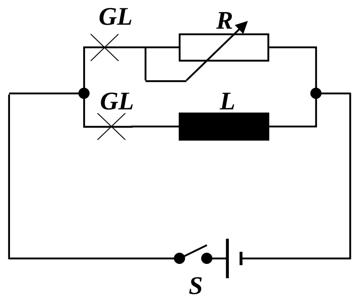
Anwendung

- **Lesen von Daten auf magnetischen Datenträgern**



Selbstinduktion

- **In einer Spule ändert sich beim Einschalten der Fluß**
  - ⇨ **Die Flußänderung induziert in der selben Spule eine Gegenspannung**
  - ⇨ **Selbstinduktion**
  - ⇨ **Die Glühlampe im Stromkreis der Spule L erreicht ihre Helligkeit merklich später**



- **Es gilt:**

$$U_i \sim \frac{dI}{dt}$$

$$U_i = -L \cdot \frac{dI}{dt}$$

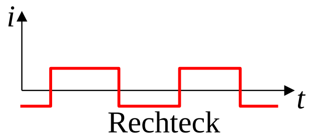
- ***L* ist die Induktivität der Spule**
- ***L* hängt ab von der Windungszahl *N*, der Spulenlänge *l*, der Fläche *A* und der Permeabilität *μ***

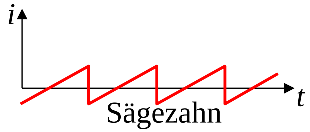
$$L = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{N^2 \cdot A}{l}$$

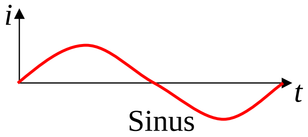
$$[L] = \frac{V \cdot s}{I} = H$$

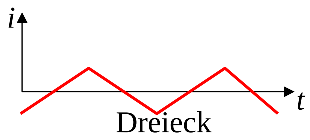
2.4 Wechselstromkreis

- Unterschied zum Gleichstrom
  - Die Richtung und Stärke des Stroms ändert sich periodisch
  - Hier: Wechselstrom mit Mittelwert null (kein Gleichstromanteil)









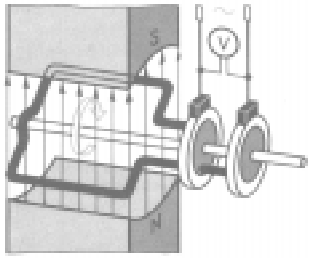
Wechselspannung und Wechselstrom

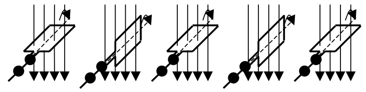
- Anwendung des Induktionsgesetzes
  - In einem homogenen Magnetfeld dreht sich eine Schleife mit konstanter Winkelgeschwindigkeit w
  - Der magnetische Fluß durch die Schleife beträgt

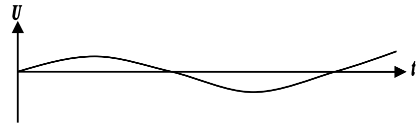
$$\Phi = B \cdot A \cdot \cos(\alpha)$$

  - α entspricht dem Winkel der Feldlinien mit der Flächennormalen der Leiterschleife

$$\alpha = \omega \cdot t$$

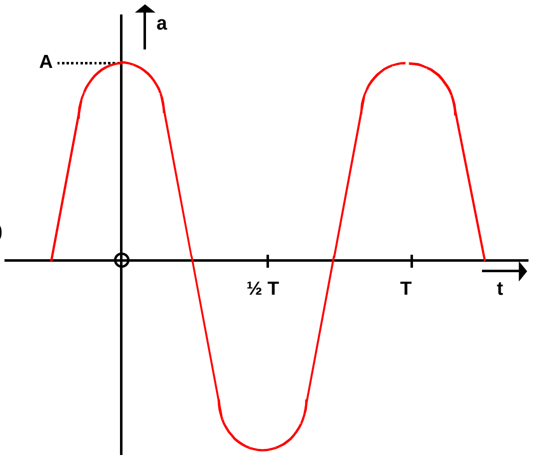






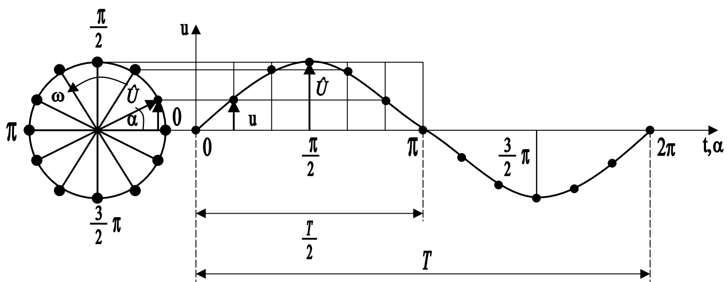
Kennwerte einer Wechselgröße

- a = A cos ωt
- ω = 2πf
- f = 1/T
- a = Funktionswert
- A = Scheitelwert
- ω = Kreisfrequenz
- t = Zeit (Sekunden)
- f = Frequenz (Hertz)
- T = Periodendauer



Zeiger- und Liniendiagramm

- Ein mit konstanter Winkelgeschwindigkeit im Gegenuhrzeigersinn umlaufender Zeiger bildet den Augenblickswert sinusförmiger Wechselgrößen ab
- Entstehung des Liniendiagramms aus dem Zeigerdiagramm

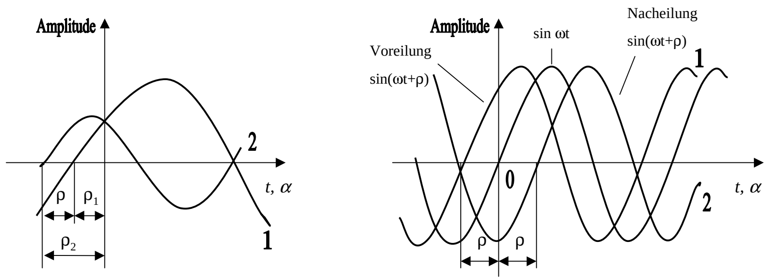


Phasenverschiebung

- **Differenz der Nullphasenwinkel zwischen mehreren Wechselgrößen**

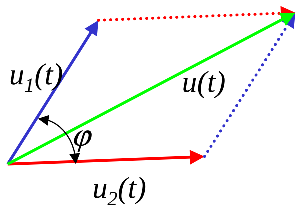
$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

- **Positiver Phasenwinkel oder Voreilung bedeutet die Verschiebung der Sinuswelle in negativer Richtung der Zeitachse**



Addition phasenverschobener Wechselspannungen

- **Überlagerung zweier Wechselspannungen oder Wechselströme**
  - **Der resultierende Zeiger ist gleich der Diagonalen des aus den beiden Komponenten gebildeten Parallelogramms**



$$\vec{u}(t) = \vec{u}_2(t) + \vec{u}_1(t)$$

- **Das Ergebnis ist wieder eine Sinuskurve**
  - **sind die Komponenten gleich groß, so beträgt der Phasenwinkel der Resultierenden** $\dfrac{\varphi}{2}$

Wechselspannung und Wechselstrom

- **Durch die Flußänderung wird eine Spannung induziert**

$$u(t) = -\frac{\mathbf{d}\Phi}{\mathbf{d}t} = -\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}(B \cdot A \cdot \cos \omega t)$$

$$u(t) = B \cdot A \cdot \omega \cdot \sin \omega t$$

- **Mit der maximalen Spannung**

$$\hat{u} = B \cdot A \cdot \omega$$

Folgt für die Spannung u(t)

$$u(t) = u = \hat{u} \cdot \sin \omega t$$

- **Wird ein Widerstand R an die Wechselspannung angeschlossen, so entsteht ein Wechselstromkreis.**
- **In ihm fließt der Strom i**

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{\hat{u}}{R} \cdot \sin \omega t = \hat{i} \cdot \sin \omega t$$

Kennwerte von Wechselgrößen

- **Beschreibung der mittleren Wirkung, unabhängig von der Kurvenform**
- **Linearer Mittelwert (Gleichstromanteil)**

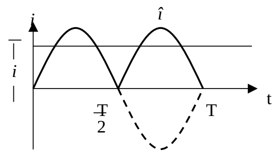
$$\bar{i} = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)\mathrm{d}t$$

- **Gleichrichtwert**
  - **Mittelwert des Betrags der Wechselspannung**
  - **Integral über die Absolutwerte des Stroms**

$$|\bar{i}| = \frac{1}{T}\int_0^T |i(t)|\mathrm{d}t$$

- **Für einen sinusförmigen Wechseltrom gilt**

$$|\bar{i}| = \frac{1}{T}\int_0^T |\hat{i} \cdot \sin(\omega t)|\mathbf{d}t = \frac{\hat{i} \cdot 2}{\pi} = 0{,}64 \cdot \hat{i}$$



Kennwerte von Wechselgrößen

- **Leistung des Gleichstroms** $P_= = U \cdot I = I^2 \cdot R$
- **Effektivwert I_{eff} des Wechselstroms $i(t)$: Wert eines Gleichstroms I der an einem Widerstand R die gleiche Leistung freisetzt, wie $i(t)$**
  - ⇨ **Es gilt**

$$P_= = I^2 \cdot R = R \cdot \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\mathrm{d}t$$

  - ⇨ **Daraus folgt** $I^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\mathrm{d}t \quad I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\mathrm{d}t}$
- **Für einen sinusförmigen Wechselstrom gilt**

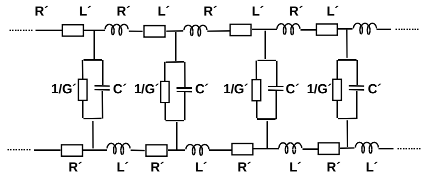
$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \hat{i}^2 \sin^2(\omega t)\mathrm{d}t} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}$$

- **Entsprechend gilt für eine sinusförmige Wechselspannung**

$$U_{eff} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$$

2.5 Schaltvorgänge

- **Ein- und Ausschalten einer Spannungsquelle**
  - ⇨ **Rechteckform oder Rechteckimpuls**
- **Anwendung**
  - ⇨ **Übertragung von Signalen auf Leitungen**
- **Problem:**
  - ⇨ **Leitungswiderstände, Leitungsinduktivitäten und Leitungskapazitäten sind in der Regel nicht zu vernachlässigen**
  - ⇨ **insbesondere bei hohen Frequenzen!**



Ersatzschaltbild für ein Leiterstück

R´	=	Längswiderstand pro Meter Leitungslänge
L´	=	Induktivität pro Meter Leitungslänge
C´	=	Kapazität pro Meter Leitungslänge
1/G´	=	Querwiderstand pro Meter Leitungslänge

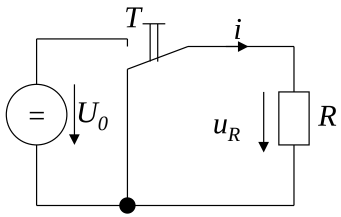
R´, L´, C´ = Widerstands-, Induktivitäts-, Kapazitätsbelag

Schaltverhalten an einem Widerstand

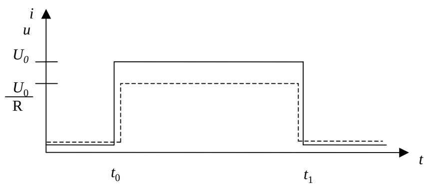
- **Stromkreis mit einem reinen Widerstand**
- **Zum Zeitpunkt t_0 wird der Taster losgelassen**
- **Nach der Maschenregel gilt**

$$U_0 = i \cdot R$$

$$i = \frac{U_0}{R}$$



- **Daraus folgt:**
  - ⇨ **Der Strom ändert sich sprunghaft, wenn die Spannung den Wert U_0 annimmt**
  - ⇨ **Der Strom ist sofort null, wenn die Spannung U_0 abgeschaltet wird**



Schaltverhalten an einer Kapazität

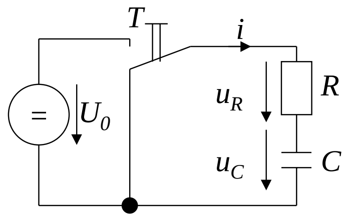
- **Reihenschaltung einer Kapazität C mit einem Widerstand R**
- **Zum Zeitpunkt t_0 wird der Taster T losgelassen**
  - ⇨ **die Spannung steigt sprunghaft auf den Wert U_0**
  - ⇨ **Nach der Maschenregel gilt**

$$U_0 = u_R + u_C = i \cdot R + u_C$$

- **Der Ladestrom zum Zeitpunkt t_0 ist dann**

$$U_0 = i_{t_0} \cdot R + 0$$

$$\Rightarrow i_{t_0} = \frac{U_0}{R}$$



- **Damit wird der Kondensator geladen, u_C wird ungleich Null und es folgt:**

$$i_{t_i} = \frac{U_0 - u_{C_{t_{i-1}}}}{R}$$

- **Für die Spannung u_C am Kondensator gilt:**

$$u_{C_{t_i}} = u_{C_{t_{i-1}}} + \frac{1}{C} \cdot i_{t_{i-1}} \cdot \Delta t$$

Sofern Δt hinreichen klein ist

Schaltverhalten an einer Kapazität: Strom

- **Der Ladestrom ist immer von der Differenz (U_0-u_C) abhängig:**

$$U_0 = i \cdot R + \frac{1}{C} \cdot i \cdot \Delta t$$

$$\Rightarrow i = \frac{U_0}{R} - \frac{1}{R \cdot C} \cdot i \cdot \Delta t$$

- **Die erste Ableitung ergibt**

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot i$$

oder

$$\frac{\mathrm{d}i}{i} = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot \mathrm{d}t$$

- **Die Lösung dieser Differentialgleichung ist:**

$$\ln i = -\frac{t}{RC} + \text{const.}$$

- **Die Konstante ergibt sich durch die Anfangsbedingung**

$$i_{t_0} = i_0 = \frac{U_0}{R}$$

- **Damit gilt**

$$\ln i = -\frac{t}{RC} + \ln \frac{U_0}{R}$$

oder

$$i = i_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

Schaltverhalten an einer Kapazität: Spannung

- **Für die Spannung gilt nach der Maschenregel**

$$\begin{aligned} u_C &= U_0 - i \cdot R \\ &= U_0 - i_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \cdot R \\ &= U_0 - \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \cdot R \\ &= U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \right) \end{aligned}$$

Schaltverhalten an einer Kapazität: Abschalten

- **Für die Spannung gilt nach der Maschenregel**

$$0 = i \cdot R + u_C$$

- **Es gilt**

$$i = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = C \cdot \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

- **Damit gilt**

$$0 = C \cdot \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \cdot R + u_C$$

oder

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{u_C} = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot \mathrm{d}t$$

- **Die Lösung der Gleichung lautet**

$$u_C = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

- **Für den Strom gilt**

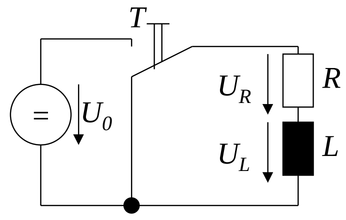
$$0 = i \cdot R + U_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

$$\Rightarrow i = -\frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

$$= -i_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

Schaltverhalten an einer Induktivität

- **Eine Spule und ein Widerstand werden in Reihe geschaltet**
- **Zum Zeitpunkt t_0 wird der Taster T losgelassen**
  - ⇨ **Die Spannung steigt sprunghaft auf den Wert U_0**
  - ⇨ **Der Innenwiderstand der Spule wird vernachlässigt**



- **Nach der Maschenregel gilt:**

$$U_0 = u_R + u_L = i \cdot R + u_L$$

- **Die Stromquelle verursacht einen veränderlichen Stromfluß** $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ **der die Spannung** $u_i = -L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ **induziert**

- **Damit folgt:**

$$u_L = L \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow i = \frac{1}{L} \int u_L \cdot \mathrm{d}t$$

- **Mit der Maschenregel gilt:**

$$u_L = U_0 - \frac{R}{L} \int u_L \cdot \mathrm{d}t$$

Schaltverhalten an einer Induktivität

- **Spannung an der Spule nach der Zeit ist**

$$\frac{du_L}{dt} = -\frac{R}{L} \cdot u_L$$

oder

$$\frac{du_L}{u_L} = -\frac{R}{L} \cdot dt$$

- **Analog zum Kondensator ist die Lösung dieser Gleichung**

$$u_L = U_0 \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

- **Für den Strom *i* gilt:**

$$i = \frac{U_0}{R} - \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

$$= \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right)$$

$$= I\left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right)$$

Schaltverhalten an einer Induktivität: ausschalten

- **Nach Öffnen des Schalters gilt:**

$$0 = u_R + u_L = i \cdot R + u_L$$

- **Damit gilt:**

$$u_L = i \cdot R$$

und nach dem Induktionsgesetz

$$u_L = -i \cdot R = L \cdot \frac{di}{dt}$$

- **Daraus folgt:**

$$-i \cdot R = L \cdot \frac{di}{dt}$$

oder

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} \cdot dt$$

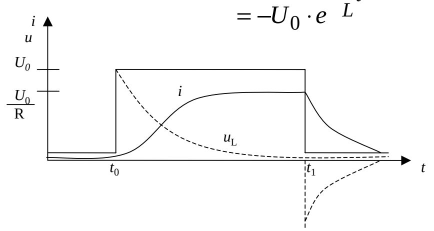
- **Die Lösung der Gleichung lautet**

$$i = I \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

- **Für den Spannungsverlauf gilt:**

$$u_L = -I \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \cdot R$$

$$= -U_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

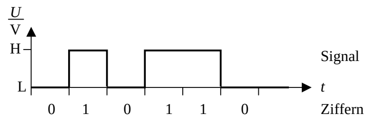


2.6 Datenübertragung

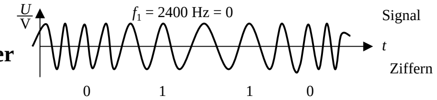
- **Darstellung von Daten im Binärformat**
  - ⇨ **Ziffern** **Dual, BCD**
  - ⇨ **Zeichen** **ASCII, EBCDIC**
- **Zuordnung der „0“ und „1“ zu physikalischen Größen**
  - ⇨ **elektrische Spannung**
  - ⇨ **elektrischer Strom**
  - ⇨ **magnetische Induktion**
  - ⇨ **Lichtstärke**
  - ⇨ **Frequenzen**
- **Physikalische Größen werden durch die Übertragung/Speicherung verändert werden**
  - ⇨ **elektrische Bauteile**
  - ⇨ **Leitungen**
- ☞ **Daten können durch die Übertragung/Speicherung verfälscht werden**

Physikalische Darstellung

- **Im Computer**
  - ⇨ **Amplitudenmodellierte Wechselspannung**
  - ⇨ **Rechteckspannung**
  - ⇨ **Willkürliche Zuordnung des Signalpegels zu Binärziffern**
    - **H-Pegel, 5 V ≙ „1“**
    - **L-Pegel, 0 V ≙ „0“**



- **Bei Datenübertragung durch Telefon**
  - ⇨ **Frequenzmodulation**
  - ⇨ **Modem**
  - ⇨ **Willkürliche Zuordnung der Frequenz zu Binärziffern**
    - **f1= 1200 Hz ≙ „1“**
    - **f1= 2400 Hz ≙ „0“**



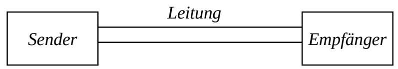
Zweidrahtleitungen

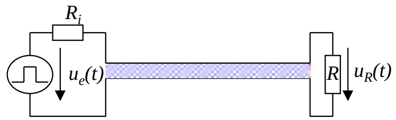
- Innerhalb des Computers werden die Daten von einen Schaltkreis zum nächsten übertragen
  - ⇨ Leiterbahnen auf Isolierflächen
  - ⇨ Flachbandkabel
  - ⇨ Länge beträgt einige cm
  - ⇨ Induktivität und Kapazität der Leiterbahn oder des Kabels können vernachlässigt werden
- Einfluß des Kabels ist nur der Ohmsche Widerstand
  - ⇨ Reduktion der Amplitude
  - ⇨ Dämpfung
  - ⇨ Wird durch die Toleranz der Schaltkreise aufgefangen

Übertragung auf langen Leitungen

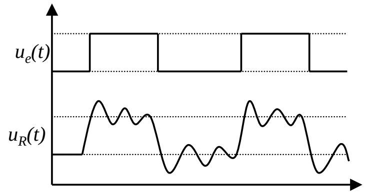
- Definition: Lange Leitung
  - ⇨ Die doppelte Länge ist größer als die Zeit für den 0- 1- oder (1-0) Übergang mal Geschwindigkeit der Signalausbreitung

$$2 \cdot l > \Delta t \cdot v$$



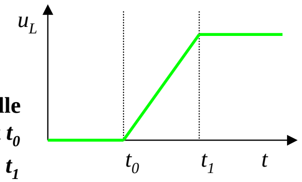


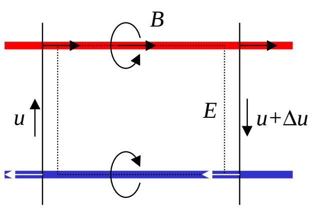
- Beispiel:
  Am Ausgang eines logischen Schaltkreises wird ein Experimentierkabel von ca. 2 m Länge angebracht. Der Ausgang des Schaltkreises wechselt mit etwa 1 MHz



Entstehung überlagerter Schwingungen

- Ursachen
  - ⇨ Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit
  - ⇨ Kein idealer Rechteckimpuls
- Modell
  - ⇨ Einschalten einer Gleichspannungsquelle auf einer Doppelleitung zum Zeitpunkt t_0
  - ⇨ Die Spannung steigt bis zum Zeitpunkt t_1
  - ⇨ Zunehmende Spannung verursacht einen zunehmenden Strom und damit ein Magnetfeld
  - ⇨ Aufbau des Magnetfelds induziert ein elektrisches Feld zwischen zwei Punkten auf der Leitung
  - ⇨ Die Ladungen verschieben sich
- ☞ Der Vorgang wandert über die gesamte Leitung
- ☞ Es entsteht eine elektromagnetische Welle





Reflexion

- Was passiert bei inhomogenen Stellen (z.B. offenes Leitungsende)
  - ⇨ Die Ladungsträger können sich nicht mehr weiterbewegen, aber

$$u_L = L \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

  kann nicht schlagartig 0 werden
  - ⇨ Die Welle (Energie) wird reflektiert und läuft in entgegengesetzter Richtung zurück
- Ähnliches, - wenn auch in abgeschwächter Form - tritt auf, wenn am Leitungsende die abschließende Impedanz für die Strom/Spannungsverhältnisse auf der Leitung eine Inhomogenität darstellt
  - ⇨ In diesem Fall wird ein Teil der elektromagnetischen Welle (Energie) reflektiert

Reflexion

- **Die Zeit für den Hin- und Rücklauf der Welle ist**

$$T = \frac{2 \cdot l}{v}$$

  - **v ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit**
  - **Ist die Zeit T für den Hin- und Rücklauf größer als die Impulsflankensteilheit Δt, dann können sich stehende Wellen ausbilden**

$$l > l_{krit} = \frac{1}{2}\Delta t \cdot v$$

- **Beispiel**
  - **Bei Standard-TTL Schaltgliedern beträgt die Impulsflankensteilheit etwa 10 ns**
  - **Die Wellengeschwindigkeit einer Doppelleitung im Vakuum beträgt etwa $3 \cdot 10^8$ m/s**
  - **daraus folgt**

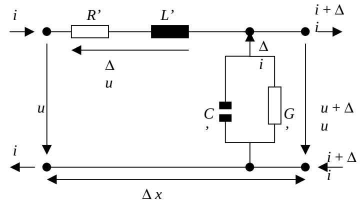
$$l_{krit} \approx \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10^{-9}\,\mathbf{s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\,\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}} = 1{,}5\,\mathbf{m}$$

Entstehung von elektromagnetischen Wellen

- **Berechnung über Kirchhoffsche Sätze**
  - **Homogene Leitung:**

R‘	**[Ω/m]**	**Widerstandsbelag**
L‘	**[H/m]**	**Induktionsbelag**
C‘	**[F/m]**	**Kapazitätsbelag**
G‘	**[S/m]**	**Leitwertsbelag**

  - **Am Anfang des Längenelements liegt zwischen den Doppelleitungen die Spannung u und es fließt der Strom i**
  - **Am Ende herrscht die Spannung u+Δu und es fließt der Strom i+Δi**
  - **Δu durch den ohmschen und den induktiven Widerstand**
  - **Stromänderung Δi durch den kapazitiven Widerstand und die Leitfähigkeit der Isolation**



Entstehung von elektromagnetischen Wellen

- **Es gilt**

$$(u + \Delta u) - u - \Delta u = 0$$
$$(i + \Delta i) - i - \Delta i = 0$$

- **Daraus folgt:**

$$-\Delta u = R' i \cdot \Delta x + L' \frac{\mathbf{d}i}{\mathbf{d}t} \cdot \Delta x = (R' i + L' \frac{\mathbf{d}i}{\mathbf{d}t}) \cdot \Delta x$$
$$-\Delta i = G' u \cdot \Delta x + C' \frac{\mathbf{d}u}{\mathbf{d}t} \cdot \Delta x = (G' u + C' \frac{\mathbf{d}u}{\mathbf{d}t}) \cdot \Delta x$$

- **Geht man zum Differentialoperator über folgt :**

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = R' i + L' \frac{\partial i}{\partial t}$$
$$-\frac{\partial i}{\partial x} = G' u + C' \frac{\partial u}{\partial t}$$

- **Annahme: R‘=G‘=0**

Entstehung von elektromagnetischen Wellen

- **Es folgt aus der Ableitung nach x bzw. t:**

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L' \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x}$$
$$-\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = C' \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

- **Setzt man die Gleichungen ineinander ein, so folgt:**

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L' C' \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
$$-\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L' C' \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

- **Diese beiden Gleichungen beschreiben den Spannungs- und Stromverlauf auf der Doppelleitung in Abhängigkeit von x und t**
- **Sie werden auch Telegraphengleichungen oder Wellengleichungen genannt**

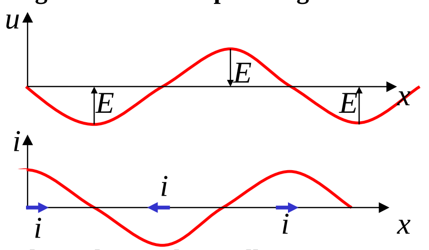
Harmonische Wellen

- **Eine Lösung dieser Gleichungen ist die harmonische Welle**

$$u = U_0 \sin\omega(t - \frac{x}{v})$$

$$i = I_0 \cos\omega(t - \frac{x}{v}) \qquad \textbf{mit } v = \frac{1}{\sqrt{L' \cdot C'}}$$

- **Entlang der Doppelleitung wandert eine Spannungs- und eine Stromwelle wie folgt:**



- **Die Doppelleitung dient der Führung der Welle**
  - ⇨ **Die gesamte Energie der Welle steckt im umgebenden Feldraum**

Ausbreitungsgeschwindigkeit auf Leitern

- **Es gilt:**

$$v = \frac{1}{\sqrt{L' \cdot C'}}$$

- **Mit Berücksichtigung der Geometrie zweier Leiter und der Definition von *L'* und *C'* gilt:**

$$L'C' = \frac{L}{m} \cdot \frac{C}{m} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \mu_0 \cdot \mu_r$$

- **Daraus folgt:**

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \mu_0 \cdot \mu_r}}$$

Ausbreitungsgeschwindigkeit auf Leitern

- **Im Vakuum gilt:**

$$\varepsilon_r = \mu_r = 1$$

- **Daraus folgt:**

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}} \approx \frac{1}{\sqrt{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 1{,}25 \cdot 10^{-6}}} = 3{,}00 \cdot 10^8 \frac{m}{s} = c$$

- **In Leiterplatten oder Koaxialkabeln gilt:**

$$\varepsilon_r \approx 2{,}5 \text{ und } \mu_r \approx 1$$

- **Daraus folgt:**

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot \mu_0 \mu_r}} \approx \frac{1}{\sqrt{8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} \cdot 2{,}5 \cdot 1{,}25 \cdot 10^{-6} \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}} \cdot 1}} = 1{,}90 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

Wellenwiderstand

- **Benutzt man**

$$u = U_0 \sin\omega(t - \frac{x}{v})$$

$$i = I_0 \cos\omega(t - \frac{x}{v})$$

und

$$v = \frac{1}{\sqrt{L' \cdot C'}}$$

als Lösungsansatz für die Ausgangsgleichung

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = R' i + L' \frac{\partial i}{\partial t}$$

- **Mit der Annahme des Grenzfalles *R'* = 0, erhält man**

$$U_0 = I_0 \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

oder für die Impedanz

$$\frac{U_0}{I_0} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = Z$$

wobei Z der Wellenwiderstand der Leitung ist

- **Für jeden Punkt der Leitung gilt**

$$u = i \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

- **Die Spannung *u* setzt sich aus einem hinlaufenden Teil u_h und einem rücklaufenden Teil u_r zusammen**

$$u = u_h + u_r$$

- **Das gleiche gilt für den Strom**

$$i = i_h + i_r$$

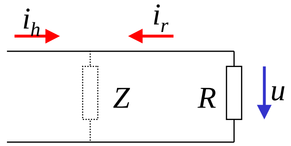
- **Durch die Überlagerung gilt**

$$u = Z \cdot (i_h + i_r)$$

Wellenwiderstand

- **Befindet sich am Ende der Leitung ein Empfänger mit dem Widerstand R, so gilt nach dem ohmschen Gesetz:**

$$u = R \cdot (i_h - i_r)$$



- **Setzt man beide Teile am Widerstand gleich, so erhält man:**

$$Z \cdot (i_h + i_r) = R \cdot (i_h - i_r)$$
$$Z \cdot i_h + Z \cdot i_r = R \cdot i_h - R \cdot i_r$$
$$R \cdot i_r + Z \cdot i_r = R \cdot i_h - Z \cdot i_h$$
$$i_r \cdot (R + Z) = i_h \cdot (R - Z)$$
$$\frac{i_r}{i_h} = \frac{(R - Z)}{(R + Z)} = r$$

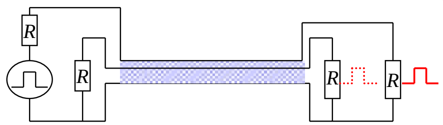
- ***r* bezeichnet man als Reflexionsfaktor**
- **Der ohmsche Widerstand kann Werte zwischen 0 und unendlich annehmen**
- **Ist der Abschlußwiderstand *R* gleich dem Wellenwiderstand *Z*, ist *r*=0**
  - ⇨ **Es findet keine Reflexion statt**
  - ⇨ **Abschlußwiderstand**

Abschlußwiderstände

- **ISDN** **100 Ω**
- **Ethernet** **50 Ω**
- **Fernsehkabel**
  - ⇨ **früher** **60 Ω**
  - ⇨ **heute** **75 Ω**
- **Token Ring** **100-150 Ω**
- **Flachbandkabel** **240 Ω**

Übersprechen

- **Neben einer stromdurchflossenen Leitung läuft ein zweiter Leiter parallel**
  - ⇨ **elektrische Kopplung**
  - ⇨ **magnetische Koppelung**
- **Bei Impulsen können diese in abgeschwächter Form als Störimpuls an der zweiten Leitung gemessen werden**
  - ⇨ **Die Folge ist ein Übersprechen des Signals**



3 Halbleiterbauelemente

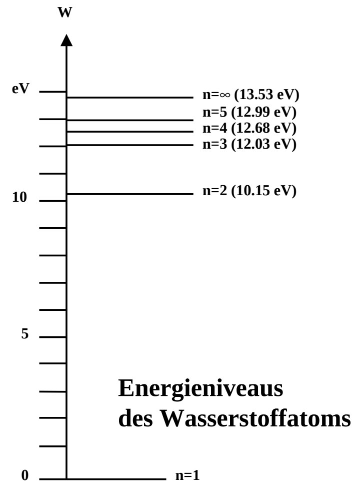
- **Halbleiter sind Elemente, deren Leitfähigkeit zwischen der von Isolatoren und Leitern liegt**
  - ⇨ **besitzen einen kristallinen Aufbau ohne Metallbindung**
  - ⇨ **die Leitfähigkeit kann durch Fremdatome beeinflußt werden**
- **Die Leitfähigkeit von Halbleitern schwankt mit der Temperatur**
  - ⇨ **beim absoluten Nullpunkt ist sie null**
  - ⇨ **bei höheren Temperaturen liegt sie zwischen Metallen und Nichtleitern**

Beispiele

Material	*Widerstand (Ω/m)*	*Einordnung*
Hartgummi	10^{16}	Nichtleiter
Glas	10^{10}	Nichtleiter
Galliumarsenid (rein)	10^{3}	Halbleiter
Silizium (rein)	100	Halbleiter
Silizium (dotiert)	1 bis 100	Halbleiter
Germanium (rein)	1	Halbleiter
Germanium (dotiert)	1 bis 10^{-5}	Halbleiter
Eisen	10^{-7}	Leiter
Silber	10^{-8}	Leiter

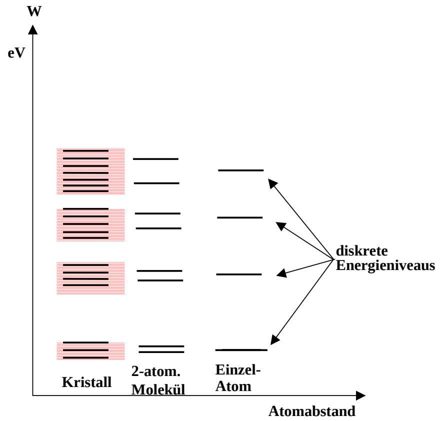
3.1 Halbleiterphysik

- **Bohrsches Atommodell:**
  - Atom besteht aus einem *Atomkern* und einer in Schalen aufgeteilten *Atomhülle*
  - Elektronen bewegen sich auf *Bahnen (Schalen)*
  - Jeder Schale mit der Nummer *n* entspricht ein *Energieniveau*
  - Übersteigt die Energie einen bestimmten Wert, so ist es nicht mehr an das Atom gebunden ($n=\infty$)



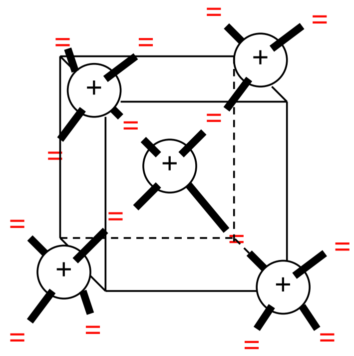
Energiebändermodell

- In dicht gepackten Kristallstrukturen findet eine Wechselwirkung zwischen den Atomen statt
  - erlaubte und verbotene Bereiche
  - die diskreten Energieniveaus verschmelzen zu Energiebändern



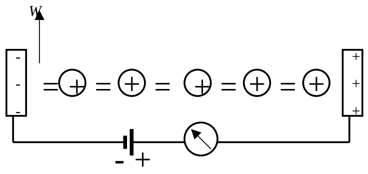
Kristallstruktur in Germanium und Silizium

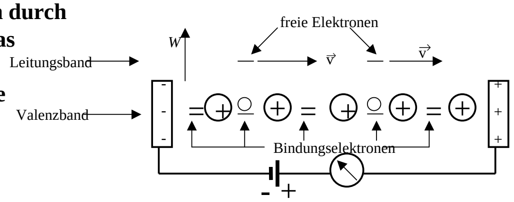
- Kristallstruktur
  - regelmäßig angeordnetes Atomgefüge
- Amorphe Struktur
  - kein regelmäßiges Atomgefüge
- Mischkristalle
  - Fremdatome sind in die Kristallstruktur eingebaut
- Polykkristalle
  - Mehrere Kristalle bilden ein Gefüge
- Einkristall
  - der Körper besteht aus einem einzigen Kristall
- In Siliziumkristallen sind die Atome in einer Tetraederstruktur aufgebaut



Valenz- und Leitungsband

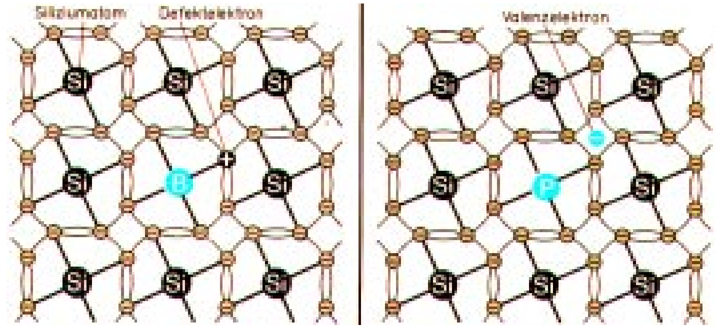
- In voll besetzten oder in leeren Bändern ist ein Elektronenfluß nicht möglich
- Valenzband: Elektronen im obersten Energieband
  - ⇨ ist dies voll besetzt, findet kein Ladungstransport statt
- Leitungsband: das nächste Energieband über dem Valenzband
  - ⇨ Werden Elektronen durch Energiezufuhr in das Leitungsband gehoben, können sie sich in diesem frei bewegen





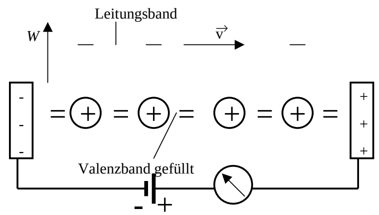
Dotierte Halbleiter

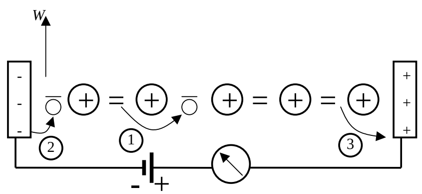
- Gezielter Einbau von Fremdatomen in Silizium- oder Germaniumkristalle durch *Dotierung*
  - ⇨ zusätzliche Valenzelektronen durch Arsen (As), Antimon (Sb) oder Phosphor (P)
  - ⇨ fehlende Valenzelektronen durch Aluminium (AL), Bor (B) oder Indium (In)



Leitfähigkeit durch Störstellen

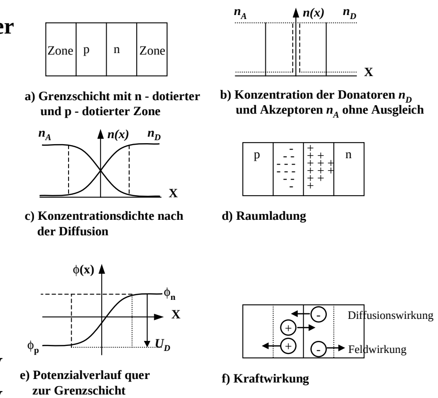
- Geringe Energie reicht aus, um das Elektron in das Leitungsband zu heben
- Donatoratom
  - ⇨ Das Atom gibt das zusätzliche Elektron leicht ab
  - ⇨ n-Dotierung
- Akzeptoratom
  - ⇨ Das Atom nimmt ein Elektron leicht auf
  - ⇨ p-Dotierung





pn-Übergang

- Grenzschicht zwischen p- und n-dotierten Schicht
- Ein Ausgleich der Ladungsträger durch Diffusion über die Grenzchicht
  - ⇨ Es entsteht ein elektrisches Feld
- wenn Diffusionswirkung und Feldwirkung gleich sind
  - ⇨ Gleichgewicht
  - ⇨ Ladungsträgerfreie Zone
  - ⇨ Diffusionsspannung U_D
- Bei Zimmertemperatur
  - ⇨ Germanium $U_D = 0{,}37$ V
  - ⇨ Silizium $U_D = 0{,}75$ V



a) Grenzschicht mit n - dotierter und p - dotierter Zone

b) Konzentration der Donatoren n_D und Akzeptoren n_A ohne Ausgleich

c) Konzentrationsdichte nach der Diffusion

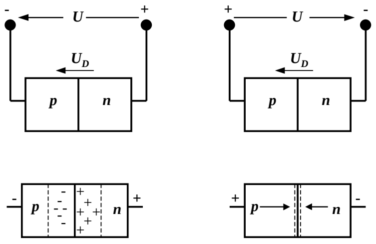
d) Raumladung

e) Potenzialverlauf quer zur Grenzschicht

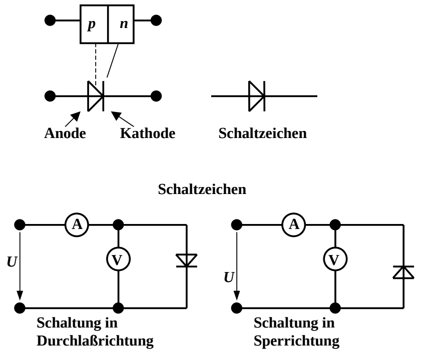
f) Kraftwirkung

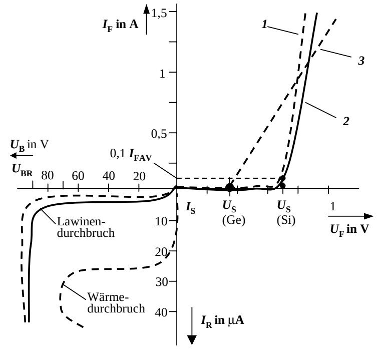
3.2 Halbleiterdioden

- Bauelemente, welche die Leitfähigkeitseigenschaften eines pn-Übergangs benutzen
- *pn*-Übergang mit äußerer Spannung
- Sperrichtung
  - ⇨ Ladungsträgerfreie Zone wird größer
  - ⇨ Es fließt kein Strom
  - ⇨ Durchbruch, wenn die Feldstärke (Spannung) zu groß wird (*Zener-Effekt*)
- Durchlaßrichtung
  - ⇨ Ladungsträgerfreie Zone wird kleiner
  - ⇨ Wenn $U > U_D$ wird, fließt ein Strom



Kennlinie des *pn*-Übergangs





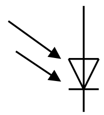
1: Silizium ideal
2: Silizium real
3: Germanium real

Halbleiterdioden mit besonderen Eigenschaften

- Schottky-Dioden
  - ⇨ Beruht auf dem von Schottky untersuchten Metall-Halbleiter Übergang
  - ⇨ Diffusion wie bei pn-Übergang
  - ⇨ besonders schnelle Dioden
- Z-Dioden
  - ⇨ Ausnutzung des Zener-Effekts
  - ⇨ Strom darf einen Höchstwert I_{Zmax} nicht überschreiten
  - ⇨ Spannungsbegrenzung bei Wechselspannungen

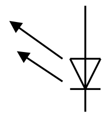
Halbleiterdioden mit besonderen Eigenschaften

- Fotodioden
  - ⇨ Licht kann durch eine Öffnung an den pn-Übergang gelangen
  - ⇨ ein einfallendes Lichtquant erzeugt ein Elektron-Loch-Paar
  - ⇨ Fotodioden werden in Sperrichtung betrieben
    - ist kein Licht vorhanden, fließt kein Strom
    - bei Lichteinfall fließt durch den Photoeffekt ein Strom
  - ⇨ Lichtschranken
  - ⇨ Datenübertragung mit Lichtwellenleitern



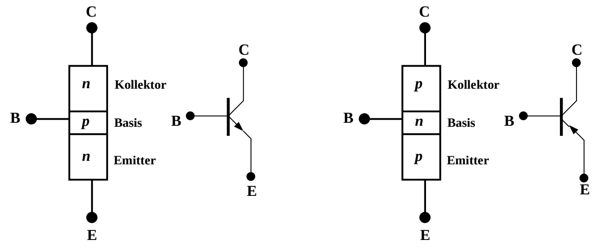
Halbleiterdioden mit besonderen Eigenschaften

- **Limeniszenzdioden (Light Emitting Diod, LED)**
  - ⇨ **pn-Übergang mit hoher Dotierung**
  - ⇨ **Betrieb in Durchlaßrichtung (Vorwiderstand)**
  - ⇨ **Durchlaßstrom injiziert Ladungsträger in den p- und n-Bereich**
  - ⇨ **Durch die hohe Zahl der Überschußelektronen (n-Bereich) bzw. Löcher (p-Bereich) werden Ladungsträger aus dem Leitungsband in das Valenzband gezogen (Rekombination)**
  - ⇨ **Durch den Energieerhaltungssatz muß Energie abgegeben werden**
  - ⇨ **Es entsteht ein Lichtquant**
  - ⇨ **Anzeigen**
  - ⇨ **Datenübertragung durch Lichtwellenleiter**
  - ⇨ **Optokoppler**



3.3 Bipolartransistoren

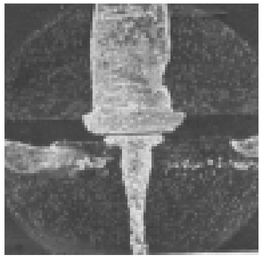
- **Ausnutzen der Eigenschaft zweier pn-Übergänge**
  - ⇨ **NPN-Transistor**
  - ⇨ **PNP-Transistor**
- **Von jeder Zone wird ein Anschluß herausgeführt**
  - ⇨ **Emitter (E)**
  - ⇨ **Basis (B)**
  - ⇨ **Collector (C)**

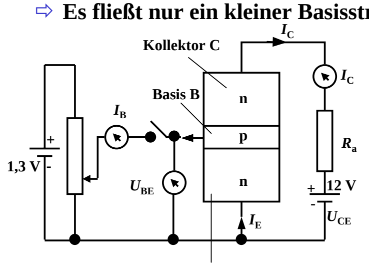


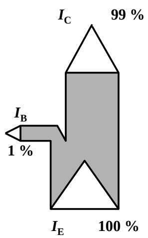
NPN-Transistor **PNP-Transistor**

Der Transistoreffekt

- **Basis des Transistors ist sehr dünn**
  - ⇨ **Die Emitter-Basis-Diode wird in Durchlaßrichtung gepolt**
  - ⇨ **Die meisten der Elektronen fließen jedoch nicht über die Basis ab, sondern werden vom Kollektor aufgenommen (starkes elektrisches Feld)**
  - ⇨ **Es fließt nur ein kleiner Basisstrom**







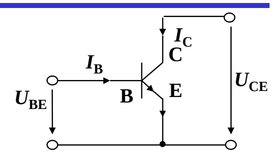
Der Transistoreffekt

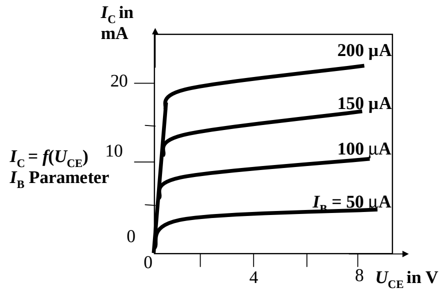
- **Erhöht man die Spannung an der Basis, so bleibt der Basisstrom relativ klein, der Kollektorstrom wächst hingegen relativ stark**
  - ⇨ **Der Transistor ist ein stromgesteuerter Widerstand**
- **Stromverstärkung**

$$B = \frac{I_C}{I_B}$$

- **Der Basisstrom steuert den Kollektorstrom**

$$I_B \cdot B = I_C$$

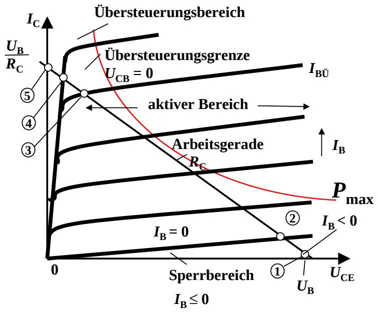


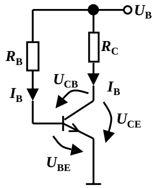


Ausgangskennlinien (Stromsteuerung)

Arbeitspunkt

- Die Arbeitspunkte können sich nur entlang der Arbeitsgeraden verschieben
- Sperrbereich
  - ⇨ AP 1 bis AP 2
  - ⇨ $I_B < 0$, $U_{CE} \approx U_B$, $I_C \approx 0$
  - ⇨ Schalter aus
- Aktiver Bereich
  - ⇨ AP 2 bis AP 3
  - ⇨ Transistor als Verstärker
- Sättigungsbereich
  - ⇨ Übersteuerung
  - ⇨ AP 3 bis AP 4
  - ⇨ $I_C \approx U_B/R_C$
  - ⇨ Schalter ein



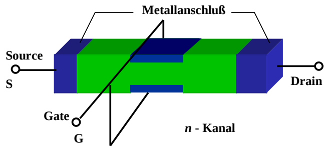


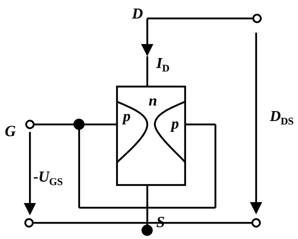
3.4 Unipolare Transistoren

- Im Gegensatz zum Bipolartransistor wird bei unipolaren Transistoren der Strom durch eine Spannung gesteuert
  - ⇨ Elektrisches Feld
  - ⇨ Feldeffekt-Transistor (FET)
  - ⇨ Spannungsgesteuerter Widerstand
- Sperrschicht-FET
  - ⇨ Isolation des Gates durch gesperrten pn-Übergang
  - ⇨ Ausdehnung einer pn-Sperrschicht
- Isolierschicht-FET
  - ⇨ Isolation des Gates durch Isolator (Siliziumoxid, SiO_2)
  - ⇨ Beeinflussung der Leitfähigkeit durch Influenz
- Anschlüsse
  - ⇨ Source S (Quelle)
  - ⇨ Drain D (Senke)
  - ⇨ Gate G (Tor)
  - ⇨ Bulk B (Masse, Substrat)

Sperrschicht-Feldeffekttransistor (FET)

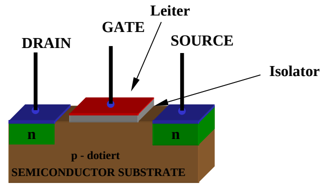
- Am Gate liegt eine negative Spannung U_{GS} an
  - ⇨ Sperrschichten um die p-Zonen dehnen sich aus
- Wird die Gatespannung negativer
  - ⇨ Querschnitt kleiner
  - ⇨ Widerstand höher
- Kanaleinschnürung
  - ⇨ Überlagerung der Gate- und Drainspannung
  - ⇨ Erhöhen der Drainspannung U_{DS} führt zu Berührung der Raumladungszonen
- Gatedurchbruch
  - ⇨ Elektrischer Durchschlag der Isolation
- Draindurchbruch
  - ⇨ Das elektrische Feld wird so stark, daß die Abschnürung überwunden wird
  - ⇨ Begrenzung der Drainspannung



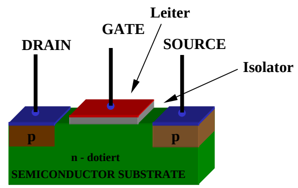


Isolierschicht-FET (MOS-FET)

- Gateelektrode ist durch eine dünne Oxidschicht getrennt
  - ⇨ MOS: Metal Oxide Semiconductor
- n-MOS
  - ⇨ Das gesteuerte Halbleiter-Substrat ist p-dotiert
  - ⇨ Die Anschlüsse sind stark n-dotiert
  - ⇨ n-Kanal-MOS-FET
- p-MOS
  - ⇨ Der gesteuerte Halbleiter-Substrat ist n-dotiert
  - ⇨ Die Anschlüsse sind stark p-dotiert
  - ⇨ p-Kanal-MOS-FET
- Da die n-Zonen (p-Zonen) weit auseinanderliegen, kommt es nicht zum Transistoreffekt



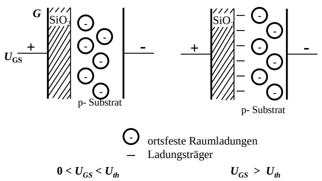
n - TRANSISTOR

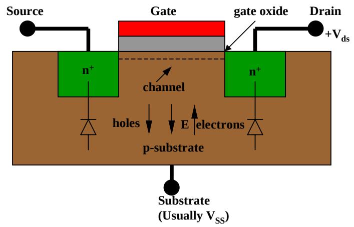


p - TRANSISTOR

Der n-MOS-Transistor

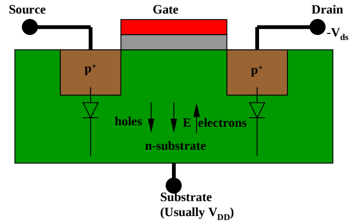
- Anreicherungstyp
  - enhancement
  - selbstsperrend
- Funktionsweise
  - Unter der Oxidschicht werden durch Influenz Ladungsträger angesammelt
  - Die Raumladungen (Löcher) werden zurückgedrängt
  - Es bildet sich ein n-Kanal
  - Die Dicke des Kanals hängt von U_{GS} ab





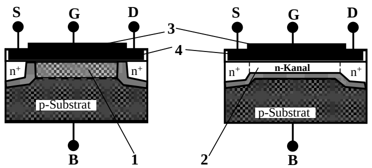
Der p-MOS-Transistor

- Alle Dotierungen sind umgekehrt
- Funktionsweise
  - Wie bei n-MOS Tansistor
  - Statt Ladungsträger werden Löcher unter der Oxidschicht durch Influenz angesammelt
  - Es bildet sich ein leitender p-Kanal



Selbstleitende MOS-Transistoren

- Verarmungstyp
  - depletion
- Funktionsweise
  - Bei der Herstellung des Transistors wird bereits ein Kanal zwischen Source und Drain diffundiert
  - Der Transistor ist auch ohne Gatespannung leitend, da dotiertes Halbleitermaterial leitet
  - Elektrische Spannung am Gate schnürt den Kanal ein
- n-MOS und p-MOS-Verarmungstypen haben in elektronischen Schaltkreisen nur als Widerstände Bedeutung

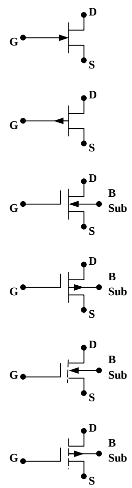


Anreicherungstyp   Verarmungstyp

1: Anreicherungszone
2: Verarmungszone
3: Metall oder polykristallinies Silizium
4: SiO_2 Isolationsschicht

MOS-Transistorschaltbilder

- In deutschsprachigen Büchern



Sperrschicht FET
n - Kanal
selbstleitend

Sperrschicht FET
p - Kanal
selbstleitend

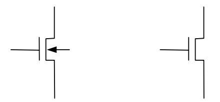
Isolierschicht FET
n - Kanal
Verarmungstyp (selbstleitend)

Isolierschicht FET
p - Kanal
Verarmungstyp (selbstleitend)

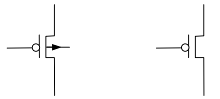
Isolierschicht FET
n - Kanal
Anreicherungstyp (selbstleitend)

Isolierschicht FET
p - Kanal
Anreicherungstyp (selbstleitend)

- In englischsprachigen Büchern



n-MOS
n-Kanal MOS
Anreicherungstyp



p-MOS
p-Kanal MOS
Anreicherungstyp

Achtung: Der n-MOS Verarmungstyp in deutschsprachigen Büchern sieht ähnlich aus wie der n-MOS Anreicherungstyp in englischen Büchern

Der Body-Effekt

- Bei integrierten Schaltungen sind zahlreiche Transistoren auf einem gemeinsamen Substrat aufgebaut
  - ⇨ Oft sind Transistoren so geschaltet, daß Source und Substrat nicht auf dem gleichen Potenzial liegen
  - ⇨ Source eines Transistors ist mit dem Drain eines anderen Transistors verbunden
  - ⇨ Dadurch vergrößert sich die Verarmungszone unter der Isolationsschicht
- Die Folgen
  - ⇨ Der Strom unter dem Transistor wird behindert
  - ⇨ Die Schwellspannung wird höher

3.5 Der Transistor als Schalter

- Elektronische Verknüpfungsglieder werden aus Halbleiterbauelementen aufgebaut
  - ⇨ Binäre Schaltvariablen werden nach den Gesetzen der Schaltalgebra miteinander verknüpft
  - ⇨ Werte entsprechen der Zweiwertigkeit von Schalterzuständen
- Im folgenden gilt:
  - ⇨ „Ein“ entspricht „1“, 5 V, POWER oder VDD
  - ⇨ „Aus“ entspricht „0“, 0 V, GROUND oder VSS
- Verknüpfungsglieder werden zu komplexen Schaltnetzen und Schaltwerken zusammengefaßt
  - ⇨ Die Schaltglieder müssen die gleichen Signalpegel besitzen

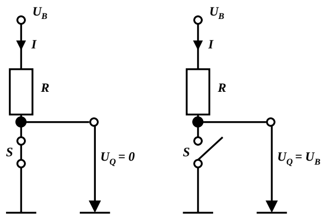
Idealer Schalter

- Annahme: der Verknüpfungsvorgang
  - ⇨ erfordert keine Leistung
  - ⇨ benötigt keine Zeit
  - ⇨ Im Schalter fällt keine Spannung ab
- Im Schalterzustand „Ein“

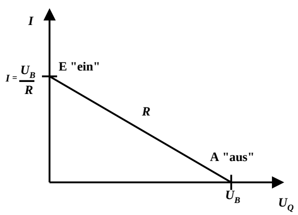
$$R_i = \varnothing$$
$$I = \frac{U_B}{R}$$
$$U_Q = 0$$

- Im Schalterzustand „Aus“

$$R_S = \infty$$
$$I = 0$$
$$U_Q = U_B$$



Schaltung



Kennlinie

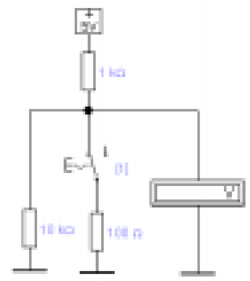
Realer Schalter

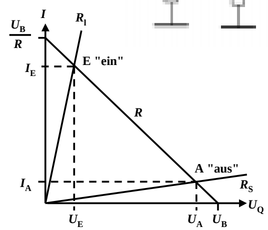
- R_i kann nicht 0 sein
- R_S kann nicht unendlich werden
  - ⇨ in der Praxis versucht man, R_i möglichst klein und R_S möglichst groß zu machen
- Im Schalterzustand „Ein“

$$I_E = \frac{U_B}{R + R_i}; U_E = \frac{U_B \cdot R_i}{R + R_i}$$

- Im Schalterzustand „Aus“

$$I_A = \frac{U_B}{R + R_S}; U_A = \frac{U_B \cdot R_S}{R + R_S}$$

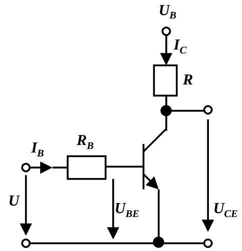


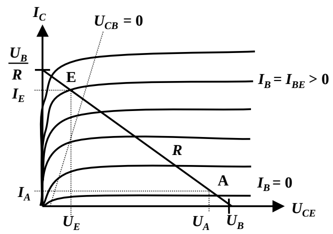


Kennlinie

Bipolartransistor als Schalter

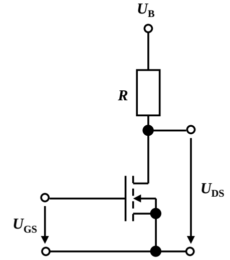
- Schaltvorgang wird durch den Basisstrom I_B gesteuert
  - ⇨ Schalter Ein: Transistor leitet
  - ⇨ Schalter Aus: Transistor sperrt
- Die Arbeitspunkte werden so berechnet, daß sich der Transistor im Übersteuerungsbereich befindet

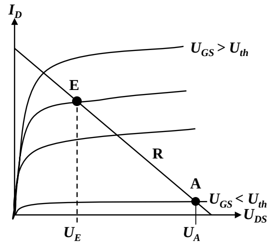




MOS-Transistor als Schalter

- Hauptsächlich selbstsperrende Transistoren
  - ⇨ n-MOS und p-MOS
  - ⇨ Verwendung wie bei Bipolartransistoren
- Vorteil gegenüber Bipolaren Transistoren
  - ⇨ Die Ansteuerung benötigt keine Leistung



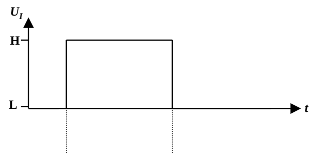


Kenngrößen: Signalpegel

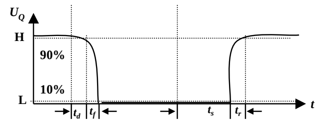
- Die Signale nehmen nie genau GND oder die Versorgungsspannung an
  - ⇨ Ein Transistor ist kein idealer Schalter
  - ⇨ Übersprechen zwischen benachbarten Leitungen
  - ⇨ Der Eingang des nachfolgenden Transistors hat Auswirkungen auf den vorgehenden
- Solche Signale nennt man Störspannungen
- Zur Eliminierung der Störspannungen definiert man Pegel
  - ⇨ High: die Spannung ist hoch
  - ⇨ Low: die Spannung ist nieder
- Die Pegel werden willkürlich logischen Werten zugeordnet
  - ⇨ High ist logisch „1“
  - ⇨ Low ist logisch „0“
  - ⇨ bei negativer Logik sind diese Pegel umgekehrt

Kenngrößen: Signalübergangszeit und -laufzeit

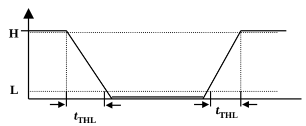
- Signalübergangszeit
  - ⇨ Flankensteilheit
  - ⇨ Übergang von „H“ nach „L“ oder „L“ nach „H“
- Signallaufzeit
  - ⇨ Zeit die ein Signalimpuls vom Eingang der Schaltung bis Ausgang benötigt
- Signalverformung
  - ⇨ Da der Transistor im Sättigungsbereich betrieben wird, dauert der „H“ nach „L“ Übergang länger als der „L“ nach „H“ Übergang



idealer Rechteckimpuls am Eingang

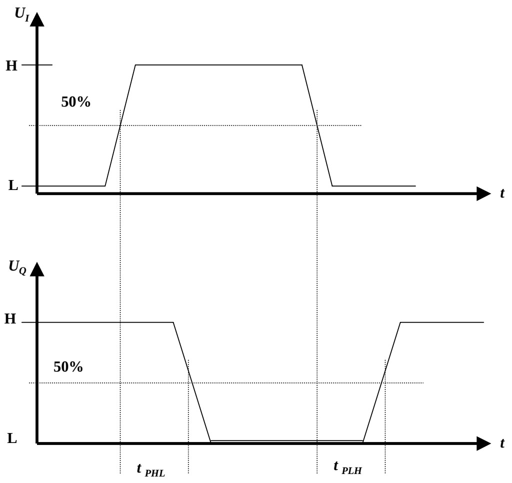


verformter Rechteckimpuls am Ausgang



linearisierter Ausgangsimpuls

Schaltvorgang eines Inverters



3.6 Verknüpfungsglieder mit Bipolaren Transistoren

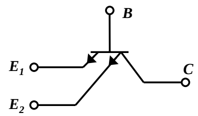
- Schaltkreisfamilien
  - ⇨ TTL Transistor-Transistor-Logic
    - Betrieb im Übersteuerungsbereich
  - ⇨ I²L Integrated Injection Logic
    - Betrieb im Übersteuerungsbereich
  - ⇨ ECL Emitter Coupled Logic
    - Betrieb im aktiven Verstärkerbereich
  - ⇨ STTL Schottky TTL
    - Betrieb im aktiven Verstärkerbereich

TTL-Schaltkreise

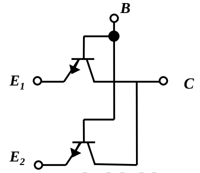
- 74xxx haben auch heute noch große Bedeutung
  - ⇨ geringe Schaltzeiten
  - ⇨ geringe Leistungsaufnahme
  - ⇨ große Zahl verschiedener Verknüpfungsglieder
  - ⇨ einheitliche Betriebsspannung (genormt auf +5V)
  - ⇨ genormte Signalpegel
- Verwendung auch als Bibliothek in Schaltkreis-Entwurfssystemen

Multi-Emitter-Transistoren

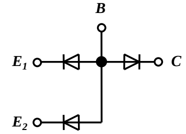
- Transistor mit mehr als einem Emitter
  - ⇨ nur in integrierten Bausteinen realisiert
  - ⇨ Emitter sind Eingänge
- Normalbetrieb
  - ⇨ mind. 1 Eingang auf „L“:
  - ⇨ Kollektor-Emitter-Strecke ist niederohmig
  - ⇨ BE-Diode leitend
- Inversbetrieb
  - ⇨ alle Eingänge auf „H“
  - ⇨ BE-Diode gesperrt
  - ⇨ BC-Diode in Durchlaßrichtung
- Wirkung als UND-Verknüpfung



Bei TTL-Schaltbildern



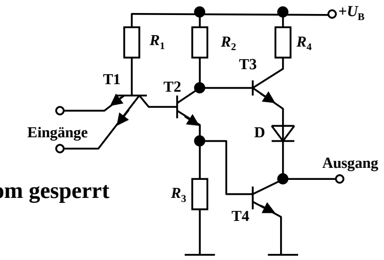
Ersatzschaltbild



Vergleich mit Diodengatter

Grundschaltung der Standard-TTL

- Drei Ebenen
  - ⇨ UND-Einfächerung T1
  - ⇨ Phasenumkehrstufe T2
  - ⇨ Gegentaktendstufe T3, T4
- Mindestens ein Emitter auf „L“:
  - ⇨ BE-Diode von T1 ist leitend
  - ⇨ T2 wegen zu geringen Basistrom gesperrt
  - ⇨ Emitterpotenzial von T2 = 0
  - ⇨ T3 leitend, T4 gesperrt
  - ⇨ Ausgang = „H“
- Alle Emitter auf „H“:
  - ⇨ BE-Diode von T1 gesperrt
  - ⇨ BC-Diode von T1 in Durchlaßrichtung
  - ⇨ T2 leitend
  - ⇨ T4 leitend, T3 wegen Spannungsabfall an D gesperrt
  - ⇨ Ausgang = „L“



Lastfaktoren

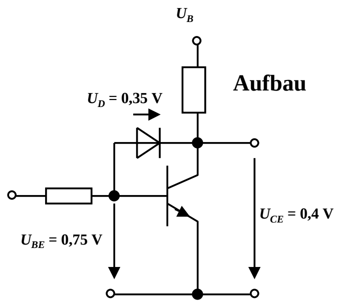
- Verknüpfungsglieder werden in Schaltnetzen miteinander verbunden
  - ⇨ von einem Schaltglied werden andere Schaltglieder gesteuert
- Typische TTL-Werte
  - ⇨ bei „L“-Pegel ($0V \leq U_{IL} \leq 0{,}8V$)
    - es fließt ein Eingangsstrom von $-I_{IL} \leq 1{,}6$ mA
    - der Ausgangsstrom darf 16mA betragen
  - ⇨ bei „H“-Pegel ($+2V \leq U_{IH} \leq 5V$)
    - es fließt ein Eingangsstrom $I_{IH} \leq 0{,}04$ mA
    - der Ausgangsstrom darf 0,4 mA nicht übersteigen
- Fan-out
  - ⇨ Belastbarkeit: Anzahl der ansteuerbaren Verknüpfungsglieder
  - ⇨ Bei TTL: Faktor 10
- Fan-in
  - ⇨ Faktor zur typischen Eingangslast einer Baustenfamilie

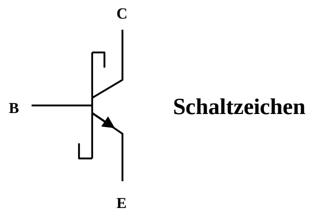
Varianten von TTL-Schaltkreisen

- Unterschiedliche Dimensionierung der Widerstände beeinflusst die Eigenschaften der Schaltungen
- Low-Power-TTL
  - ⇨ Widerstände sind hochohmig
  - ⇨ kleinerer Stromfluß
  - ⇨ geringere Leistungsaufnahme
  - ⇨ langsamer
- High-Speed-TTL
  - ⇨ Widerstände sind niederohmig
  - ⇨ größerer Stromfluß
  - ⇨ höhere Leistungsaufnahme
  - ⇨ schneller

Schottky TTL

- Transistoren werden nicht im Übersteuerungsbereich betrieben
  - ⇨ Schottky-Diode zwischen Basis und Kollektor
  - ⇨ Schwellenspannung der Schottky-Diode bei 0,35 V
  - ⇨ nach der Maschenregel beträgt die Spannung U_{CE} 0,4 V
  - ⇨ die steile Kennlinie der Diode verhindert ein weiteres Durchsteuern





Vergleich der TTL-Baureihen

TTL - Baureihe	Verzögerungszeit je Gatter t_p in ns	Verlustleistung je Gatter P_V in mW	Leistungs-Zeit-Produkt $P_V t_p$ in pJ
74ALS	4,5	1,2	5,4
74F	2,3	4	9,2
74LS	9,5	2	19
74AS	1,5	22	33
74L	33	1	33
74S	3,5	19	66,5
74	10	10	100

74ALS Advanced-Low-Power-Schottky-TTL (weiterentwickelte LS-TTL)
74F Fast-TTL (schnelle S-TTL)
74LS Low-Power-Schottky-TTL (S-TTL mit niedriger Verlustleistung)
74AS Advanced-Schottky-TTL (weiterentwickelte S-TTL)
74 L Low-Power-TTL (TTL mit niedriger Verlustleistung)
74 S Schottky-TTL (schnelle TTL)
74 TTL (Standard-TTL)

Vergleich der TTL-Baureihen

Vergleich zwischen TTL-Baureihen und Lastfaktoren

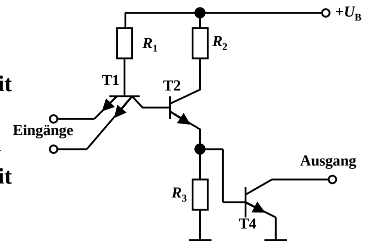
1 TTL-Gatter der Baureihe treibt max.	Anzahl der TTL-Eingänge in der Baureihe 74ALS	74F	74AS	74LS	74L	74S	74
74ALS	20	20	10	20	40	10	10
74F	25	25	10	25	48	10	12
74AS	50	50	10	50	100	10	10
74LS	20	50	8	20	40	10	5
74L	10	10	1	10	20	1	2
74S	50	50	10	50	100	10	12
74	20	20	8	40	40	8	10

Stromgrenzwerte von TTL-Gattern verschiedener Baureihen

TTL-Baureihe	-*I*OH in µA	*I*OL in µA	*I*IH in µA	-*I*IL in µA
74LS	400	8000	20	400
74L	200	3600	10	180
74S	1000	20000	50	2000
74	400	16000	40	1600

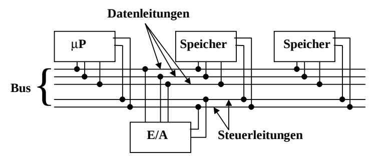
Open-Collector

- Der Kollektor des Transistors T_4 wird direkt nach Außen geführt
  - ⇨ Anschluß des Verbrauchers an die Betriebsspannung über einen Arbeitswiderstand
- Anwendung
  - ⇨ Schalten von Verbrauchern mit höheren Lasten
  - ⇨ Relais, Leuchtdioden, Lampen
  - ⇨ Schalten von Verbrauchern mit höheren Betriebsspannungen

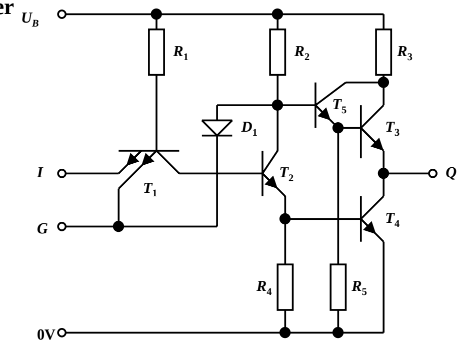


Tri-State Ausgang

- Spezielle Ansteuerung der Gegentaktendstufe so daß beide Transistoren sperren
  - ⇨ der Ausgang wird hochohmig
- Zusammenschaltung mehrerer Ausgangsleitungen an einer gemeinsamen Leitung
  - ⇨ Busse

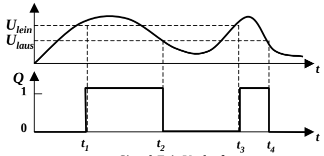


G	*I*	*Q*
H	L	H
H	H	L
L	L	hochohmig
L	H	hochohmig

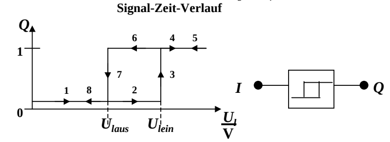


Schmitt-Trigger

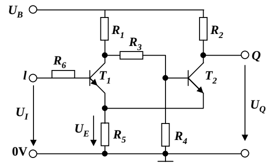
- Schaltungen mit einem Analogeingang und einem Digitalausgang
- Prinzip
  - ⇨ die Arbeitspunkte der beiden Transistoren beeinflussen sich gegenseitig
- Anwendungen
  - ⇨ Impulsformung und Signalregenerierung
  - ⇨ Erhöhung der Flankensteilheit
  - ⇨ Unterdrückung von Störsignalen



Signal-Zeit-Verlauf



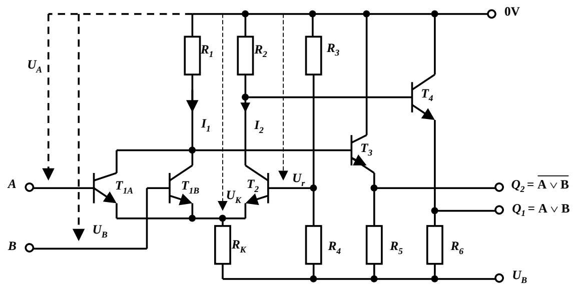
Übertragungskennlinie und Schaltzeichen



Schaltung

ECL-Schaltkreise

- Emitter-gekoppelte Logik
  - ⇨ Emitterfolger
  - ⇨ Differenzverstärker
  - ⇨ Transistoren arbeiten nicht im Übersteuerungsbereich
  - ⇨ kleine Schaltzeiten
  - ⇨ hoher Leistungsverbrauch
- Geringer Störabstand
  - ⇨ „H" 0,8V bis 0,7V
  - ⇨ „L" 1,7V bis 1,5V
- Anwendung
  - ⇨ Großrechnertechnik



I²L-Schaltkreise

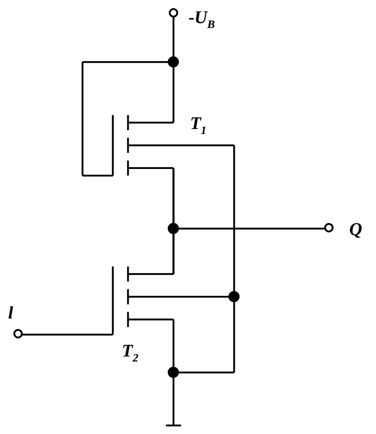
- Integrierte Injektionslogik
  - ⇨ Widerstände werden durch Transistoren ersetzt
  - ⇨ Konstantstromquellen
  - ⇨ extrem kleiner Flächenbedarf, da Transistoren weniger Fläche benötigen als Widerstände
  - ⇨ kleine Leistungsaufnahme
  - ⇨ geringe Versorgungsspannung (< 1V)
  - ⇨ Spannungshub und Störsicherheit sind sehr klein (< 0,6V)
- Anwendung
  - ⇨ hochintegrierte Schaltung
  - ⇨ heute kaum Bedeutung, da CMOS inzwischen noch besser integrierbar ist

3.7 Verknüpfungsglieder mit unipolaren Tansistoren

- Bausteine mit hochintegrierten digitalen Schaltungen werden heute meist in MOS-Technologie realisiert
  - ⇨ hohe Integration
  - ⇨ einfache Herstellung
  - ⇨ geringere Leistungsaufnahme (speziell CMOS)
- Verknüpfungsglieder
  - ⇨ PMOS Schaltkreise mit p-Kanal FET
  - ⇨ NMOS Schaltkreise mit n-Kanal FET
  - ⇨ CMOS Schaltkreise mit p-Kanal und n-Kanal FET

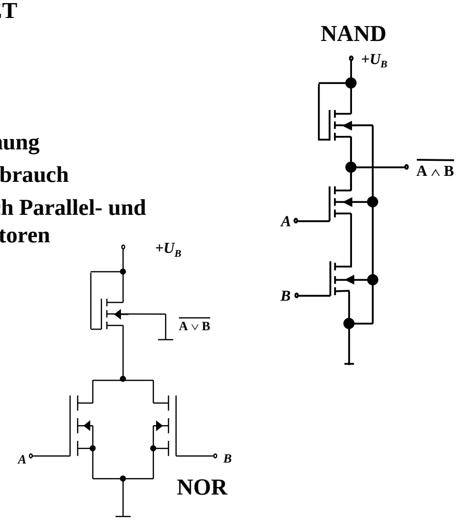
PMOS Schaltkreise

- Selbstsperrender PMOS-Transistor (T_2)
  - ⇨ der Transistor T1 wirkt wie ein Widerstand
- Vorteile
  - ⇨ einfache Herstellbarkeit
- Nachteile
  - ⇨ hohe Schwellspannung (5V)
  - ⇨ hohe Versorgungsspannung (-9 bis -20V)
  - ⇨ relativ große Schaltzeit
- Realisierung der Logik durch Parallel- und Serienschaltung der Transistoren



NMOS Schaltkreise

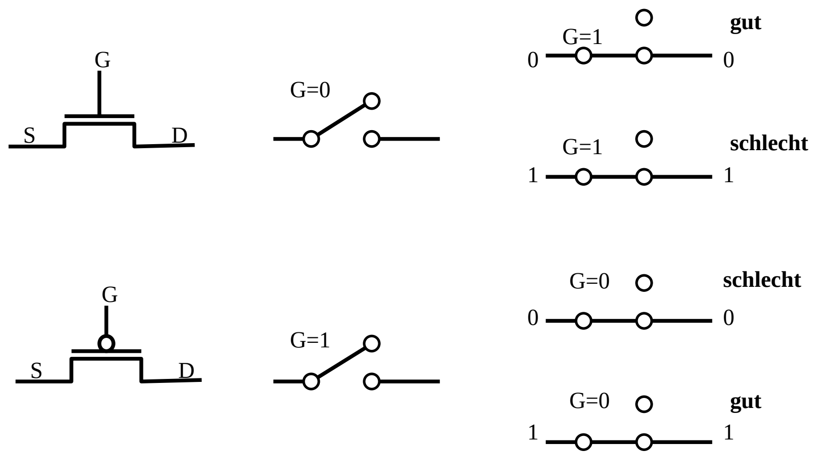
- Selbstsperrender NMOS-FET
- Vorteile
  - ⇨ geringere Schaltzeiten
  - ⇨ höhere Packungsdichte
  - ⇨ geringere Betriebsspannung
  - ⇨ geringerer Leistungsverbrauch
- Realisierung der Logik durch Parallel- und Serienschaltung der Transistoren



3.8 CMOS Schaltkreise

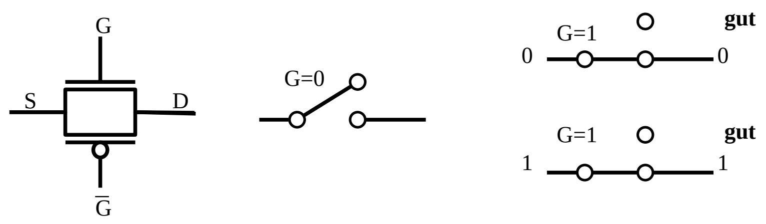
- Complementary Metal Oxide Transistor
  - ⇨ Selbstsperrende NMOS und PMOS FET
- NMOS und PMOS-FETs können nicht beliebig an die Versorgungsspannung bzw. an GND geschaltet werden
  - ⇨ die Stärke der „0“ und der „1“ kann variieren
  - ⇨ die Stärke entspricht der „Fähigkeit“ als Quelle oder Senke von Elektronen zu dienen
  - ⇨ POWER und GND sind die stärksten Quellen bzw. Senken
- NMOS- und PMOS-Transistoren schalten unterschiedlich
- der Schalter ist unterschiedlich gut, je nachdem ob zwischen Source und Drain eine „1“ oder eine „0“ geschaltet wird. Der Grund dafür ist der Spannungsabfall beim Übergang
- ACHTUNG: In den folgenden Folien wird die amerikanische Notation der Transistoren verwendet!

Der MOS-Transistor als Schalter



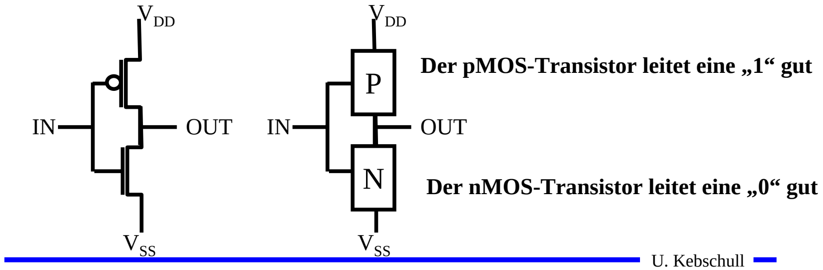
Komplementärschalter (Transmission Gate)

- Die Übertragungscharakteristika bei Transmission Gates sind jetzt in beiden Fällen gut
- Trotzdem sollte man nicht mehrere Komplementärschalter hintereinanderschalten
- Zur Steuerung benötigt man beide Signale G und $\overline{G}$.



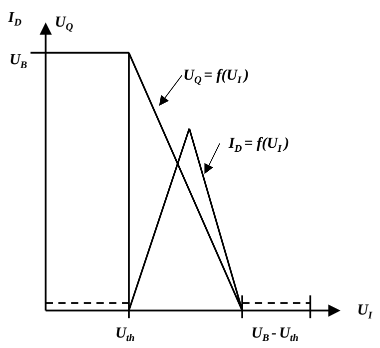
CMOS-Logik

- CMOS steht für Complementary MOS und bedeutet, daß immer ein Transistor von POWER nach GROUND gesperrt ist
  - ⇨ Es fließt ein minimaler Strom.
- CMOS-Inverter
- Ein nMOS und ein pMOS Transistor werden in Reihe geschaltet.
  - ⇨ Der pMOS-Transistor leitet, wenn eine „0"anliegt und sperrt bei einer „1"
  - ⇨ Der nMOS-Transistor sperrt, wenn eine „0" anliegt und leitet bei einer „1"



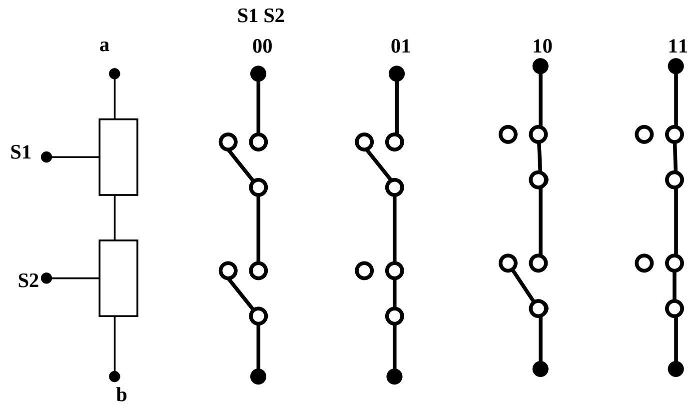
Schaltverhalten eines CMOS-Gatters

- bei CMOS Schaltkreisen ist die statische Verlustleistung sehr gering
  - ⇨ bei U_B= 5V und I_D <10 nA gilt P < 50 nW
- beim Umschalten ist ein Transistor noch nicht voll gesperrt, während ein Transistor bereits leitend wird

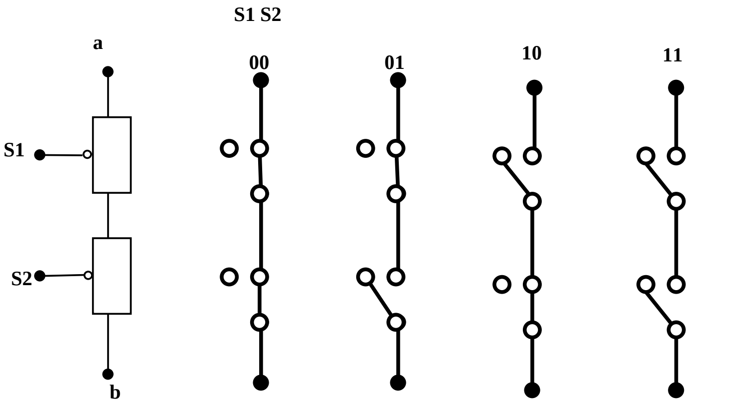


nMOS und pMOS-Grundschaltungen

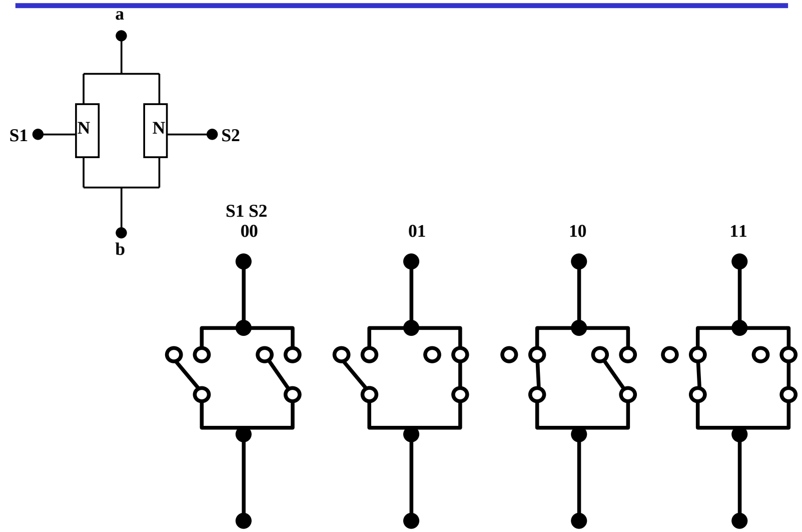
- Reihenschaltung von nMOS-Transistoren



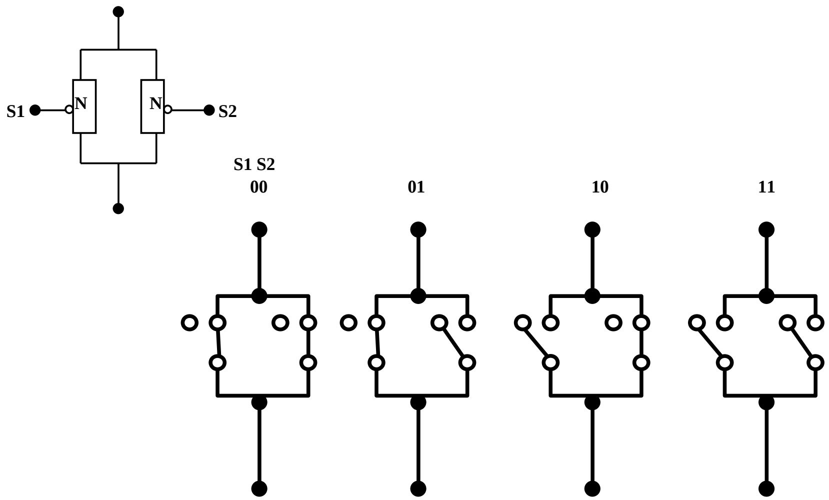
Reihenschaltung von pMOS-Transistoren



Parallelschaltung von nMOS-Transistoren



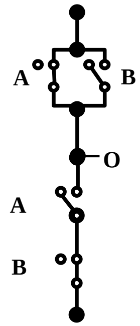
Parallelschaltung von pMOS-Transistoren

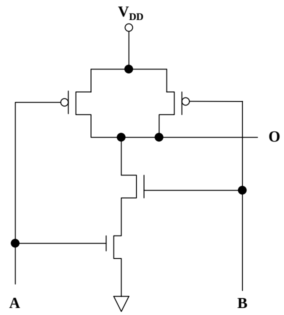


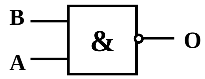
Das NAND-Gatter

- Das NAND-Gatter wird aus den nMOS- und pMOS-Grundschaltungen gebildet.
- Die Transistoren werden stets so benutzt, daß sie gut leiten.
  - ⇨ die pMOS- Transistoren schalten die „1“
  - ⇨ die pMOS- Transistoren schalten die „0“

A	B	O
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

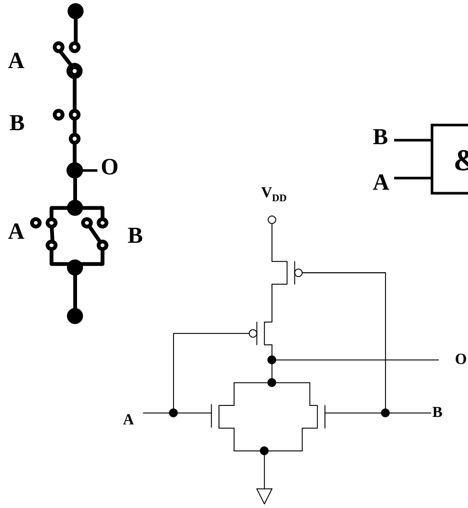


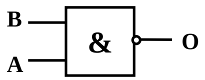




Das NOR-Gatter

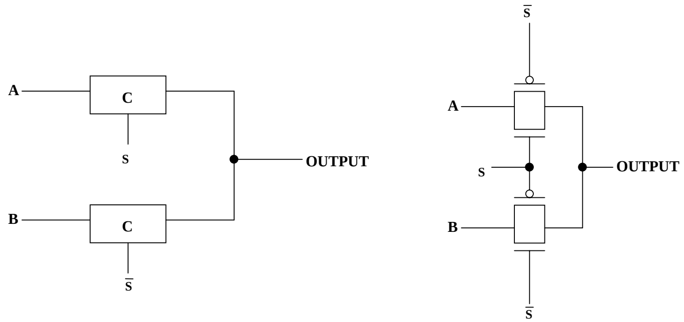
A	B	O
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0





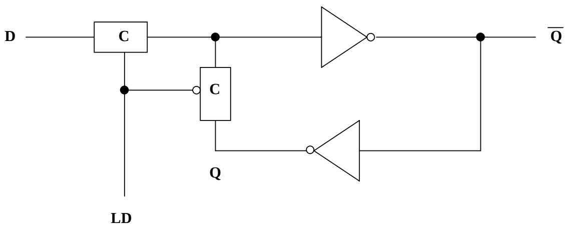
Multiplexer

- Multiplexer können aus Komplementärschaltern aufgebaut werden.
- „0“ und „1“ werden gleich gut übertragen
- Das Steuersignal wird positiv und negiert benötigt
- Schaltbild des Multiplexers

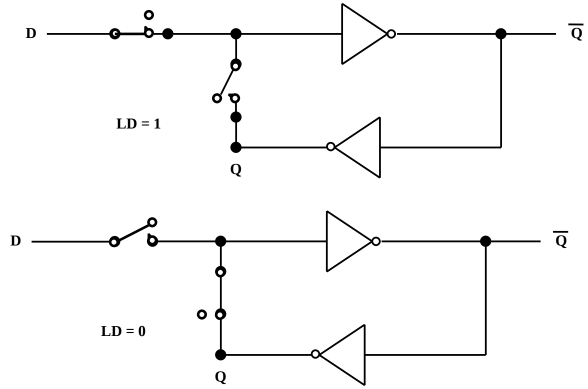


Speicher

- Auch ein Flipflop kann aus den bisher behandelten CMOS-Strukturen aufgebaut werden.
- Man benötigt zwei Inverter und einen Multiplexer.
- Das Flipflop besitzt Latch-Verhalten:
- Die Ausgabe folgt der Eingabe, wenn LD=1
- Die Ausgabe speichert den letzten Wert, wenn LD=0
- Schaltbild:



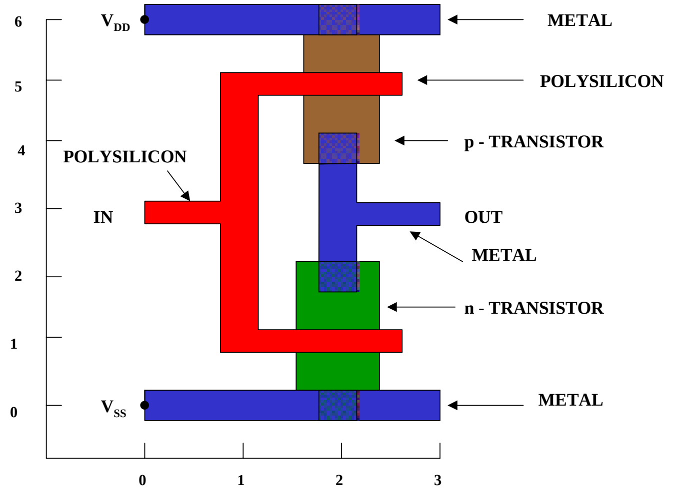
Schaltverhalten des Speichers



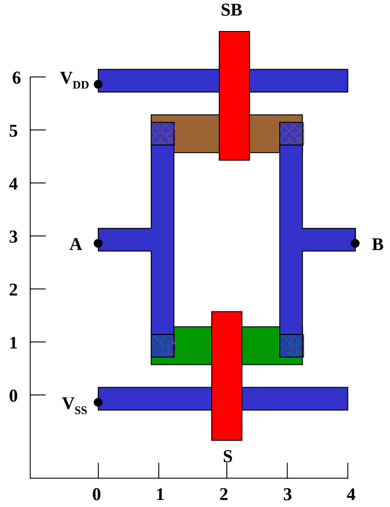
Physikalische Darstellung von MOS-Schaltkreisen

- **Die physikalische Darstellung von MOS-Schaltkreisen wird benutzt um zu beschreiben, wie der physikalische Aufbau einer integrierten Schaltung ist. Im Prinzip können daraus automatisch die Belichtungsmasken erstellt werden.**
- **Die einzelnen Transistoren entstehen durch Übereinanderlegen von Schichten**
  - **p-Diffusion (positiv dotiert)**
  - **n-Diffusion (negativ dotiert)**
  - **Polysilizium (Gate)**
  - **Metall1 und Metall2**
  - **Kontakte**

Beispiel Inverter



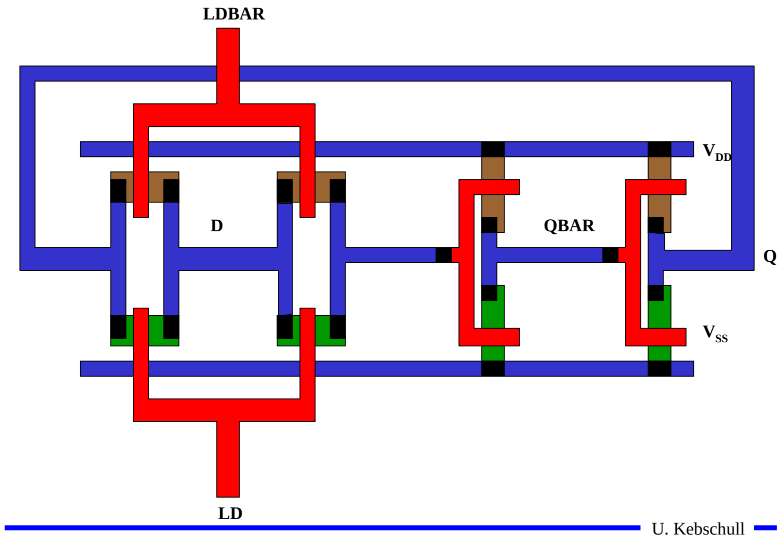
Beispiel Komplementärschalter



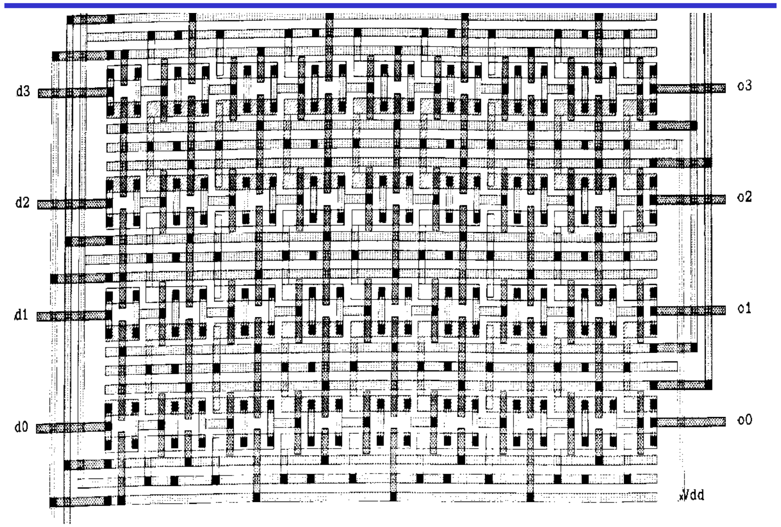
Sprachliche Beschreibung des Layouts eines Komplementärschalters

```
begin tg
t1: device n (2,1) or=east
t2: device p (2,5) or=east
        wire alum (0,0)(4,0)
        wire alum (0,6)(4,6)
        wire poly (2,-1)(2,1)
        wire poly (2,7)(2,5)
        wire alum (1,1)(1,5)
        wire alum (3,1)(3,5)
        wire alum (0,3)(1,3)
        wire alum (3,3) (4,3)
        contact md (1,1)
        contact md (3,1)
        contact md (1,5)
        contact md (3,5)
end
```

Beispiel Flipflop



Beispiel Schieberegister

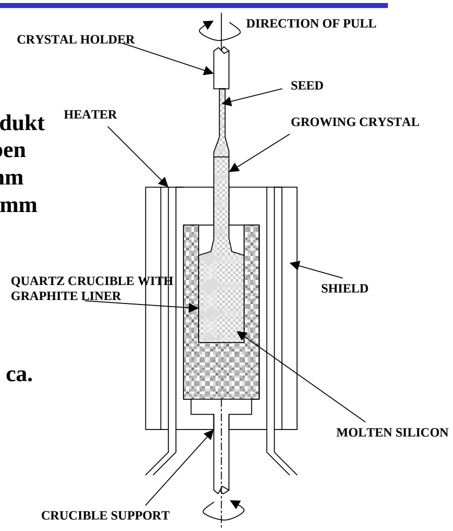


4 Der CMOS-Fertigungsprozeß

4.1 Herstellung von Wafern

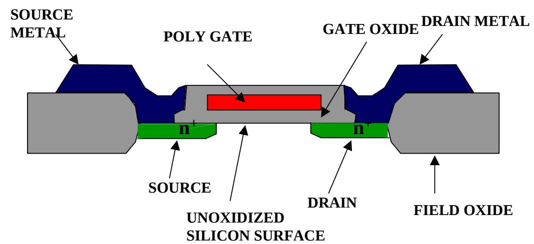
In diesem Abschnitt folgt eine Übersicht, wie CMOS-Schaltungen gefertigt werden. Das Ausgangsprodukt sind monokristalline Siliziumscheiben deren. Dicke zwischen 0.25 und 1 mm und deren Durchmesser 75 bis 150 mm beträgt. Diese Scheiben nennt man Wafer

- **Monokristallin bedeutet, daß das Silizium in einer möglichst reinen Kristallstruktur erstarrt. Der Schmelzpunkt von Silizium beträgt ca. 1425 °C**
- **Heute wird meist die Czochralski-Methode angewandt bei der die Wachstumsrate ca. 30 bis 180 mm/Stunde beträgt**



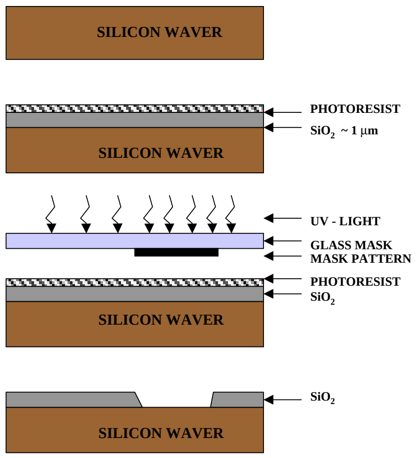
Oxydation

- **Siliziumoxyd (SiO2) ist ein guter Isolator. Es wird erzeugt, indem der Wafer einer oxydierenden Umgebung ausgesetzt wird**
- **Wasserdampf bei 900×C bis 1000×C (schnelle Oxydierung)**
- **Sauerstoff bei 1200×C (langsame Oxydierung)**
- **SiO2 besitzt etwa das doppelte Volumen von Silizium und es wächst sowohl vertikal als auch horizontal**



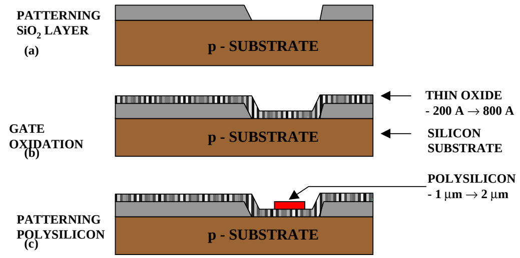
Selektive Diffusion

- Selektive Diffusion ist das Erzeugen verschieden dotierter Siliziumschichten.
- Flächen müssen dabei
  - ⇨ beliebige Formen annehmen können
  - ⇨ genau plaziert sein
  - ⇨ genau skaliert sein
- Das SiO2 verhindert den Dotierungsvorgang. Es kann später durch eine Säure entfernt werden, die das Silizium nicht angreift.
- Prinzip der selektiven Dotierung:
  - ⇨ Oxydieren der Siliziumoberfläche
  - ⇨ Beschichten mit einem lichtempfindlichen Lack
  - ⇨ Belichten mit UV-Licht über eine Maske
  - ⇨ Entfernen des nicht belichteten Photolacks und des darunterliegenden Siliziumoxyds

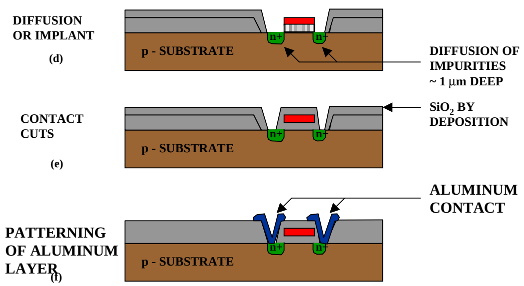


4.2 Entstehung eines nMOS Transistors

- Zunächst wird der Wafer mit einer dicken SiO2-Schicht überdeckt
- An den Stellen, an denen Transistoren entstehen sollen, werden diese freigelegt (a)
- Die gesamte Fläche wird mit einer dünnen, sehr einheitlichen SiO2-Schicht überdeckt (b)
- Der Wafer wird mit einem Photolack überzogen und an den Stellen, an denen Gates entstehen sollen, freigelegt. Polykristallines Silizium wird aufgedampft (c)

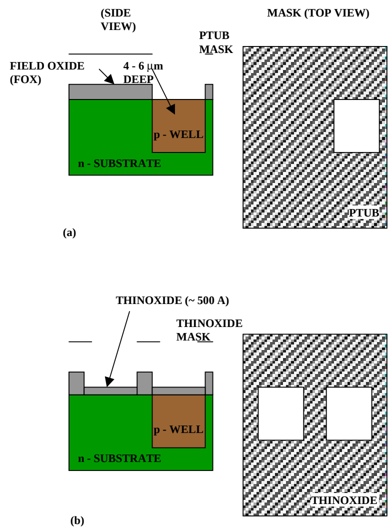


- Mit den gleichen Arbeitsschritten werden die Flächen für die negative Dotierung freigelegt.Die freigelegten Flächen werden negativ dotiert (d).Der Wafer wird erneut mit einer SiO2-Schicht überdeckt
- Die Kontaktstellen werden durch Ätzung freigelegt.
- Die Metallbahnen zur Verbindung werden aufgedampft.

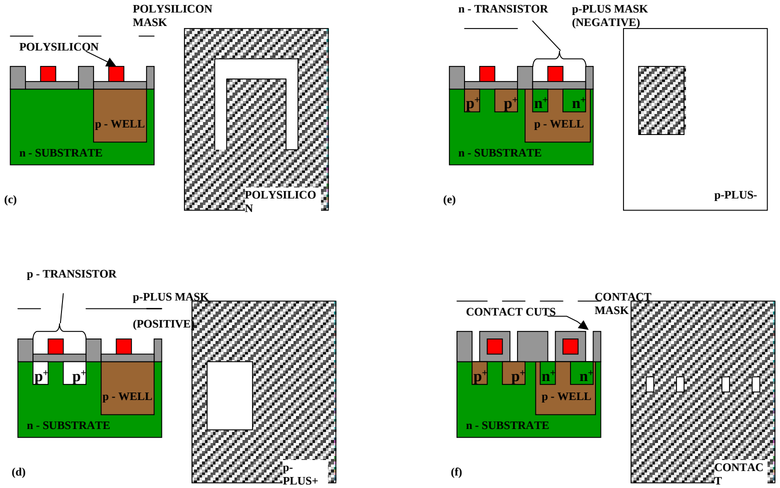


4.3 Entstehung eines CMOS-Inverters

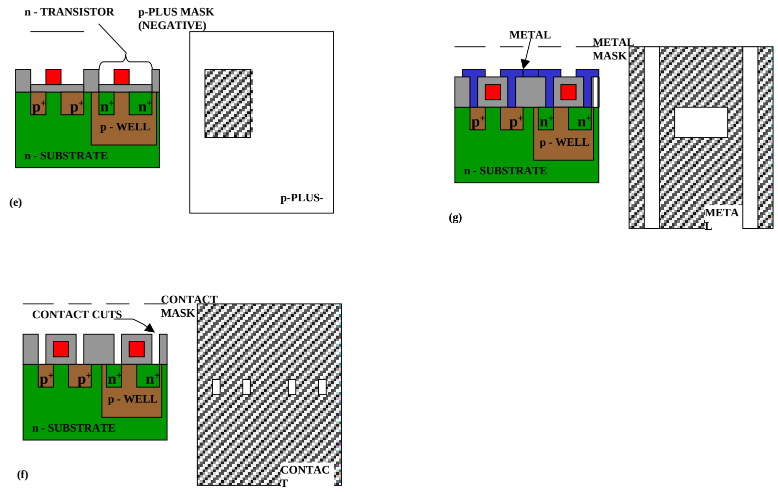
- Beim CMOS-Prozeß müssen negativ dotierte Flächen für pMOS-Transistoren geschaffen werden (p-Well, p-Wannen).



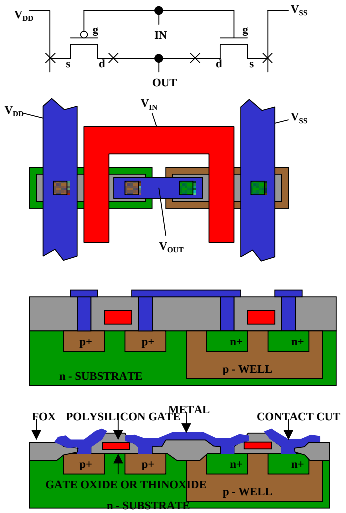
Entstehung eines CMOS-Inverters



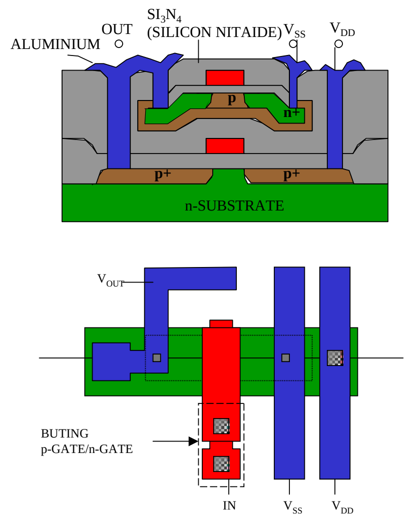
Entstehung eines CMOS-Inverters



Zusammenhang zwischen Schaltplan und Realisierung



Moderne CMOS-Techniken: ein 3D-CMOS-Inverter



5 Schaltnetze

- Entwurf und Realisierung digitaler Schaltnetze
  - ⇨ Formale Grundlagen
  - ⇨ Realisierung
  - ⇨ Entwurf
  - ⇨ Laufzeiteffekte

5.1 Formale Grundlagen

- **George Boole (1815-1864)**
  - ⇨ **Algebra der Logik (Boolesche Algebra)**

Def. 5.1: Eine Boolesche Algebra ist eine Menge *V={a,b,c,...}*, auf der zwei einstellige Operationen $\lozenge$ und $\#$ so definiert sind, daß durch ihre Anwendung auf Elemente aus V wieder Elemente aus V entstehen (Abgeschlossenheit). Es müssen die Huntingtonschen Axiome gelten.

Huntingtonschen Axiome

- **Kommutativgesetze:**

$$a \lozenge b = b \lozenge a$$
$$a \# b = b \# a$$

- **Distributivgesetze:**

$$a \lozenge (b \# c) = (a \lozenge b) \# (a \lozenge c)$$
$$a \# (b \lozenge c) = (a \# b) \lozenge (a \# c)$$

- **Neutrale Elemente:**

  Es existieren zwei Elemente $e, n \in V$, so daß gilt:

$a \lozenge e = a$ **(*e* wird Einselement genannt)**

$a \# n = a$ **(*n* wird Nullelement genannt)**

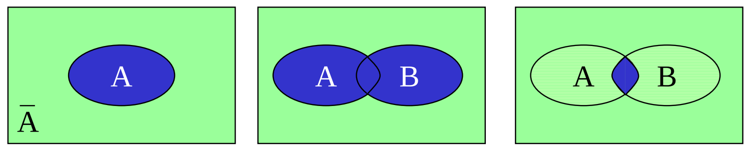
- **Inverse Elemente:**

  Für alle $a \in V$ gibt es ein $\overline{a}$, so daß gilt:

$$a \lozenge \overline{a} = n$$
$$a \# \overline{a} = e$$

Beispiel: Mengenalgebra

Boolesche Algebra	Mengenalgebra	
V	$P(T)$	**Potenzmenge einer Grundmenge T**
$\#$	$\cup$	**Vereinigung**
$\lozenge$	$\cap$	**Schnitt**
n	$\varnothing$	**Leere Menge**
e	T	**Grundmenge**
$\overline{a}$	$\overline{A}$	**Komplementmenge von A**



Komplement A∪B A∩B

Beispiel: Mengenalgebra

- **Grundmenge**
  T={ , , }
- **Potenzmenge**
  P(T)= {∅,{ }, { }, { }, { , }, { , }, { , }, { , , }}
- **Für alle A, B, C ∈ T gilt:**
  - **Abgeschlossenheit**
    $A \cup B \in P(T)$ $A \cap B \in P(T)$
  - **Kommutativgesetze**
    $A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$
  - **Distributivgesetze**
    $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  - **Neutrale Elemente**
    $A \cap T = A$ $A \cup \varnothing = A$
  - **Inverse Elemente**
    $A \cap \overline{A} = \varnothing$ $A \cup \overline{A} = T$

Schaltalgebra

- **Boolesche Algebra bei der die folgende Zuordnungstabelle gilt:**

Boolesche Algebra	Schaltalgebra	
V	$\boldsymbol{B}=\{0,1\}$	**Boolesche Grundmenge**
$\#$	$\vee$	**Oder**
$\Diamond$	$\wedge$	**Und**
n	0	**neutrales Element**
e	1	**Einselement**
$\overline{a}$	$\overline{x_i}$	**Negation**

- **Andere Schreibweisen**
  - **Oder:** $x_1 + x_2$, $x_1 \mid x_2$
  - **Und:** $x_1 \bullet x_2$, $x_1 * x_2$, $x_1 . x_2$, $x_1 \& x_2$, $x_1 x_2$
  - **Negation:** $/x_1$, $'x_1$, $\neg x_1$

Funktionstabellen

- **Aus den Huntigtonschen Axiomen lassen sich bereits die Funktionstabellen der in der Algebra definierten Verknüpfungen ableiten**

Oder

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Und

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Nicht

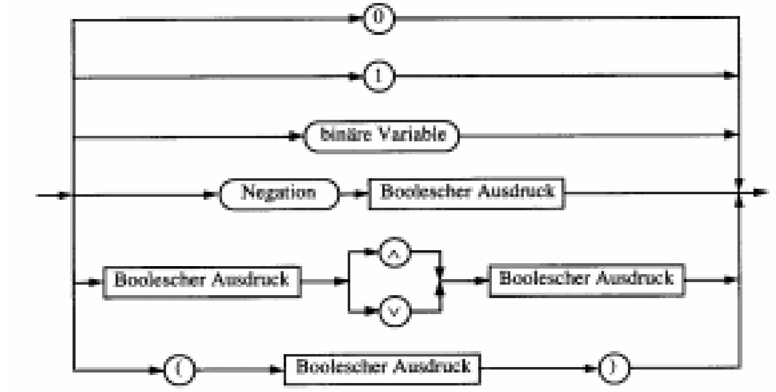
x_1	$\overline{x_1}$
0	1
1	0

Weitere Sätze

- **Aus den vier Huntigtonschen Axiomen lassen sich weitere Sätze ableiten**
  - **Assoziativgesetze**
    $(x_1 \wedge x_2) \wedge x_3 = x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3)$ $(x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3)$
  - **Idempotenzgesetze**
    $(x_1 \wedge x_1) = x_1$ $(x_1 \vee x_1) = x_1$
  - **Absorptionsgesetze**
    $x_1 \wedge (x_1 \vee x_2) = x_1$ $x_1 \vee (x_1 \wedge x_2) = x_1$
  - **DeMorgan-Gesetze**
    $\overline{x_1 \wedge x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$ $\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$

Boolescher Ausdruck

- **Zeichenfolge, die aus binären Variablen, den Operatoren $\wedge, \vee$ und Klammern besteht und den folgenden syntaktischen Regeln folgt:**



Boolescher Ausdruck

- **Boolesche Ausdrücke sind nur eine syntaktische Konstruktion**
  - ⇨ **Bedeutung erhält ein Boolescher Ausdruck erst, wenn den Konstanten 0 und 1 die Wahrheitswerte „falsch“ oder „wahr“ zugeordnet wird**
- **Interpretation**
  - ⇨ **Belegung der der binären Variablen eines Booleschen Ausdrucks mit Wahrheitswerten**
  - ⇨ **Liefert eine Aussage, die entweder „wahr“ oder „falsch“ sein kann**
  - ⇨ **Anwendung: Simulation**
- **Tautologie**
  - ⇨ **Boolescher Ausdruck, bei dem alle Belegungen der binären Variablen den Wahrheitswert „wahr“ liefern**
  - ⇨ $(x_1 \vee x_2) \vee (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2)$
  - ⇨ **Anwendung: Verifikation von Schaltungen**

Boolesche Funktion

Def. 5.2: Es sei ein n-Tupel von binären Variablen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gegeben. Eine <u>n-stellige Boolesche Funktion</u> ordnet jeder Belegung der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit den Wahrheitswerten „wahr“ oder „falsch“ genau einen Wahrheitswert zu.

$$f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\} \quad \textbf{oder} \quad f : B^n \rightarrow B$$

Satz 5.1: Es gibt genau 2^n verschiedene Belegungen der Variablen einer n-stelligen Booleschen Funktion. Die Anzahl verschiedener n-stelliger Boolescher Funktionen beträgt $2^{(2^n)}$

Bew: Über Funktionstabelle

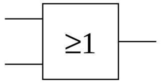
Übersicht der 2-stelligen Booleschen Funktionen

Benennung der Verknüpfung	Funktionswert y	=	$f(x_1, x_2)$	Schreibweise mit den Zeichen $\wedge \vee -$	Bemerkung
	x_1	=	0 1 0 1		
	x_2	=	0 0 1 1		
Null	y_0	=	0 0 0 0	0	Null
UND–Verknüpfung	y_1	=	0 0 0 1	$x_1 \wedge x_2$	x_1 UND x_2
Inhibition	y_2	=	0 0 1 0	$\overline{x}_1 \wedge x_2$	
Transfer	y_3	=	0 0 1 1	x_2	
Inhibition	y_4	=	0 1 0 0	$x_1 \wedge \overline{x}_2$	
Transfer	y_5	=	0 1 0 1	x_1	
Antivalenz	y_6	=	0 1 1 0	$(x_1 \wedge \overline{x}_2) \vee (\overline{x}_1 \wedge x_2)$	Exclusiv–ODER
ODER–Verknüpfung	y_7	=	0 1 1 1	$x_1 \vee x_2$	x_1 ODER x_2
NOR–Verknüpfung	y_8	=	1 0 0 0	$\overline{x_1 \vee x_2}$	NICHT–ODER
Äquivalenz	y_9	=	1 0 0 1	$(x_1 \wedge x_2) \vee (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2)$	
Komplement	y_{10}	=	1 0 1 0	$\overline{x}_1$	
Implikation	y_{11}	=	1 0 1 1	$\overline{x}_1 \vee x_2$	
Komplement	y_{12}	=	1 1 0 0	$\overline{x}_2$	
Implikation	y_{13}	=	1 1 0 1	$x_1 \vee \overline{x}_2$	
NAND–Verknüpfung	y_{14}	=	1 1 1 0	$\overline{x_1 \wedge x_2}$	NICHT–UND
Eins	y_{15}	=	1 1 1 1	1	Eins

Darstellung einiger zweistelliger Funktionen

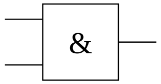
ODER

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



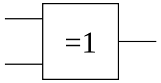
UND

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Exklusiv-Oder

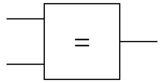
x_1	x_2	$x_1 \oplus x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



Darstellung einiger zweistelliger Funktionen

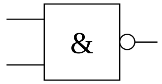
Äquivalenz

x_1	x_2	$x_1 \equiv x_2$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



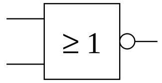
NAND

x_1	x_2	$x_1 \overline{\wedge} x_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



NOR

x_1	x_2	$x_1 \overline{\vee} x_2$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



Operatorensysteme

Def. 5.3: Ein vollständiges Operatorensystem erlaubt die Darstellung beliebiger Boolescher Funktionen mit einer beschränkten Anzahl von Operatoren

- **Beispiele für vollständiges Operatorensysteme:**

Operatorensystem	Negation	Konjunktion	Disjunktion
$(\wedge, \vee, \bar{\ })$	$\bar{x}_1$	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$
$(\wedge, \bar{\ })$	$\bar{x}_1$	$x_1 \wedge x_2$	$\overline{\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2}$
$(\vee, \bar{\ })$	$\bar{x}_1$	$\overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2}$	$x_1 \vee x_2$
$(\overline{\wedge})$	$x_1 \overline{\wedge} x_1$	$(x_1 \overline{\wedge} x_2) \overline{\wedge} (x_1 \overline{\wedge} x_2)$	$(x_1 \overline{\wedge} x_1) \overline{\wedge} (x_2 \overline{\wedge} x_2)$
$(\overline{\vee})$	$x_1 \overline{\vee} x_1$	$(x_1 \overline{\vee} x_1) \overline{\vee} (x_2 \overline{\vee} x_2)$	$(x_1 \overline{\vee} x_2) \overline{\vee} (x_1 \overline{\vee} x_2)$
$(\wedge, \oplus)$	$x_1 \oplus 1$	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \wedge x_2 \oplus x_1 \oplus x_2$
$(\vee, \equiv)$	$x_1 \equiv 0$	$(x_1 \vee x_2) \equiv x_1 \equiv x_2$	$x_1 \vee x_2$

Auswertung

- **Zum Wahrheitswert einer Aussage gelangt man durch rekursives Auswerten der Booleschen Funktionen in einem Ausdruck**
  - ⇨ **Negation vor Konjunktion**
  - ⇨ **Konjunktion vor Disjunktion**
  - ⇨ **Klammerung beachten**
- **Beispiel: Ist die folgende Funktion eine Tautologie?**

$$f(x_1, x_2) = (x_1 \wedge x_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2) \equiv (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2)$$

5.2 Normalformen

- Eine Funktion kann durch verschiedene Boolesche Ausdrücke beschrieben werden
  - ⇨ Auch bei der Beschränkung auf ein vollständiges Operatorensystem ergeben sich noch mehrere Darstellungsmöglichkeiten
- Normalformen bilden eine Standarddarstellung in einem vollständigen Operatorensystem
  - ⇨ Disjunktive Normalform
  - ⇨ Konjunktive Normalform
- Es gibt weitere Normalformen, die in dieser Vorlesung nicht behandelt werden
  - ⇨ Reed-Muller-Form
  - ⇨ Äquivalenzpolynom

Literal und Produktterm

Def. 5.4: Ein Literal L_i ist entweder eine Variable x_i oder ihre Negation $\overline{x}_i$. $L_i \in \{x_i, \overline{x}_i\}$

Def. 5.5: Ein Produktterm $K(x_1,...,x_m)$ ist die Konjunktion von Literalen oder den Konstanten 0 oder 1:

$$\bigwedge_{i=1}^{m} L_i = L_1 \wedge ... \wedge L_m$$

- Jeder Produktterm $K(x_1,...,x_m)$ kann so dargestellt werden, dass eine Variable x in höchstens einem Literal vorkommt.
  - ⇨ Falls $Lj=x$ und $L_k=x$ ist, gilt $L_j \wedge L_k = x$
  - ⇨ Falls $Lj=\overline{x}$ und $L_k=\overline{x}$ ist, gilt $L_j \wedge L_k = \overline{x}$
  - ⇨ Falls $Lj=x$ und $L_k=\overline{x}$ ist, gilt $L_j \wedge L_k = 0$

Implikant und Minterm

Def. 5.6: Ein Produktterm $K(x_1,...,x_m)$ heißt Implikant einer Booleschen Funktion $f(x_1,...,x_n)$, wenn aus $K(x_1,...,x_m)=1$ für eine Belegung $x_1,...,x_m \in B^n$ folgt, dass $f(x_1,...,x_n)=1$.

Def. 5.7: Ein Implikant $K(x_1,...,x_n)$ heißt Minterm (m), wenn ein Literal jeder Variablen x_i der Funktion $f(x_1,...,x_n)$ genau einmal in K vorkommt.

- Implikanten haben ein oder mehrere 1-Stellen in der Funktion
  - ⇨ mehrere Implikanten können sich überdecken
- Ein Minterm ist genau bei einer Belegung der Variablen gleich 1
  - ⇨ Ein Minterm trägt zu genau einer 1-Stelle der Funktion bei
  - ⇨ Die Minterme einer Funktion können sich nicht überdecken

Mintermtabelle

Satz 5.2: Zu einer Booleschen Funktion $f(x_1,...,x_n)$ mit n Literalen gibt es maximal 2^n verschiedene Minterme m_i.

Bew: Durch Aufzählung aller Kombinationen und Induktion über n.

- Man definiert eine Reihenfolge aller Minterme über den Index i

i_{10}	i_2	Minterm m_i
0	000	$\overline{x}_2 \wedge \overline{x}_1 \wedge \overline{x}_0$
1	001	$\overline{x}_2 \wedge \overline{x}_1 \wedge x_0$
2	010	$\overline{x}_2 \wedge x_1 \wedge \overline{x}_0$
3	011	$\overline{x}_2 \wedge x_1 \wedge x_0$
4	100	$x_2 \wedge \overline{x}_1 \wedge \overline{x}_0$
5	101	$x_2 \wedge \overline{x}_1 \wedge x_0$
6	110	$x_2 \wedge x_1 \wedge \overline{x}_0$
7	111	$x_2 \wedge x_1 \wedge x_0$

Disjunktive Normalform

Def. 5.8: Es sei eine Boolesche Funktion $f(x_1,\dots,x_n): B^n \to B$ gegeben. Ein Boolescher Ausdruck heißt disjunktive Normalform (DNF) der Funktion f, wenn er aus einer disjunktiven Verknüpfung von Mintermen K_i besteht.

$$f(x_1,\dots,x_n) = K_0 \vee K_1 \vee \dots \vee K_k \text{ mit } 0 \le k \le 2^n - 1$$

$$= \bigvee_{0}^{2^n-1} \alpha_i \wedge K_i \text{ mit } \alpha_i \in \{0,1\}$$

- **α_i heißt Mintermkoeffizient**
  - ⇨ **$\alpha_i = 1$, wenn der Minterm m_i zu f gehört,**
  - ⇨ **$\alpha_i = 0$, sonst**
- **Beispiele**

$f(x_2,x_1,x_0) = x_2x_1x_0 \vee x_2\overline{x}_1x_0 \vee \overline{x}_2x_1\overline{x}_0 \vee \overline{x}_2\overline{x}_1\overline{x}_0$ **ist eine DNF**

$f(x_2,x_1,x_0) = x_2x_1x_0 \vee x_2\overline{x}_1 \vee x_1(x_2x_0 \vee \overline{x}_2\overline{x}_0)$ **ist keine DNF**

Disjunktion und Maxterm

Def. 5.9: Es sei $D(x_1,\dots,x_m)$ eine Disjunktion von Literalen, wobei die Konstanten 0 und 1 auftreten dürfen. $D(x_1,\dots,x_m)$ heißt <u>Implikat</u> einer Booleschen Funktion $f(x_1,\dots,x_n)$, wenn aus $D(x_1,\dots,x_m)=0$ für eine Belegung $x_1,\dots,x_n \in B^n$ folgt, dass $f(x_1,\dots,x_n)=0$.

Def. 5.10: Ein Implikat $D(x_1,\dots,x_n)$ heißt <u>Maxterm</u> (M), wenn ein Literal jeder Variablen x_i der Funktion $f(x_1,\dots,x_n)$ genau einmal in D vorkommt.

- **Implikate haben ein oder mehrere 0-Stellen in der Funktion**
  - ⇨ **mehrere Implikaten können sich überdecken**
- **Ein Maxterm ist genau bei einer Belegung der Variablen gleich 0**
  - ⇨ **Ein Maxterm trägt zu genau einer 0-Stelle der Funktion bei**
  - ⇨ **Die Maxterme einer Funktion können sich überdecken**

Min- und Maxtermtabelle

Satz 5.3: Zu einer Booleschen Funktion $f(x_1,\dots,x_n)$ mit n Literalen gibt es maximal 2^n verschiedene Maxterme M_i.

Bew: Durch Aufzählung aller Kombinationen und Induktion über n

- **Man definiert eine Reihenfolge aller Maxterme über den Index i analog zu den Mintermen**

i_{10}	i_2	**Minterm** m_i	**Maxterm** M_i
0	000	$\overline{x}_2 \wedge \overline{x}_1 \wedge \overline{x}_0$	$x_2 \vee x_1 \vee x_0$
1	001	$\overline{x}_2 \wedge \overline{x}_1 \wedge x_0$	$x_2 \vee x_1 \vee \overline{x}_0$
2	010	$\overline{x}_2 \wedge x_1 \wedge \overline{x}_0$	$x_2 \vee \overline{x}_1 \vee x_0$
3	011	$\overline{x}_2 \wedge x_1 \wedge x_0$	$x_2 \vee \overline{x}_1 \vee \overline{x}_0$
4	100	$x_2 \wedge \overline{x}_1 \wedge \overline{x}_0$	$\overline{x}_2 \vee x_1 \vee x_0$
5	101	$x_2 \wedge \overline{x}_1 \wedge x_0$	$\overline{x}_2 \vee x_1 \vee \overline{x}_0$
6	110	$x_2 \wedge x_1 \wedge \overline{x}_0$	$\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 \vee x_0$
7	111	$x_2 \wedge x_1 \wedge x_0$	$\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 \vee \overline{x}_0$

Konjunktive Normalform

Def. 5.11: Es sei eine Boolesche Funktion $f(x_1,\dots,x_n): B^n \to B$ gegeben. Ein Boolescher Ausdruck heißt Konjunktive Normalform (KNF) der Funktion f, wenn er aus einer konjunktiven Verknüpfung von Maxtermen D_i besteht.

$$f(x_1,\dots,x_n) = D_0 \wedge D_1 \wedge \dots \wedge D_k \text{ mit } 0 \le k \le 2^n - 1$$

$$= \bigwedge_{0}^{2^n-1} (\beta_i \vee D_i) \text{ mit } \beta_i \in \{0,1\}$$

- **β_i heißt <u>Maxtermkoeffizient</u>**
  - ⇨ **$\beta_i = 0$, wenn der Maxterm m_i zu f gehört,**
  - ⇨ **$\beta_i = 1$, sonst**
- **Beispiel**

$f(x_2,x_1,x_0) = (x_2 \vee x_1 \vee x_0) \wedge (x_2 \vee \overline{x}_1 \vee x_0) \wedge (\overline{x}_2 \vee x_1 \vee \overline{x}_0)$ **ist eine KNF**

KNF-DNF Umwandlung

Satz 5.4: Für jede Boolesche Funktion $f(x_1,\dots,x_n)$ gilt $\alpha_i = \beta_i$.

Bew: (Skizze) 2 Fälle

- **Fall 1:** $\alpha_i=1$
  - $\Rightarrow$ m_i **gehört zur DNF der Funktion** f
  - $\Rightarrow$ M_i **gehört nicht zur KNF der Funktion** f
  - $\Rightarrow$ $\beta_i=1$
- **Fall 2:** $\alpha_i=0$
  - $\Rightarrow$ m_i **gehört nicht zur DNF der Funktion** f
  - $\Rightarrow$ M_i **gehört zur KNF der Funktion** f
  - $\Rightarrow$ $\beta_i=0$

Zusammenfassung der wichtigsten Begriffe

- **Literal:** **Boolesche Variable**
- **Produktterm:** **UND-Verknüpfung von Literalen**
- **Implikant:** **Produktterm, der eine oder mehrere „1“-Stellen einer booleschen Funktion beschreibt (impliziert)**
- **Implikat:** **Disjunktion (ODER-Verknüpfung) von Literalen**
- **Minterm:** **Implikant, der genau eine „1“-Stelle einer booleschen Funktion beschreibt**
- **Maxterm:** **Implikat, der genau eine „0“-Stelle einer booleschen Funktion beschreibt**
- **Normalform:** **Darstellung einer Booleschen Funtion durch Minterme (DNF) oder Maxterme (KNF)**

Der Shannonsche Entwicklungssatz

- **DNF und KNF können durch einfache logische Umformungen in gewöhnliche disjunktive und konjunktive Formen gebracht werden**
  - **DF und KF**
- **Zur Berechnung der Normalformen ist der Shannonsche Entwicklungssatz hilfreich**

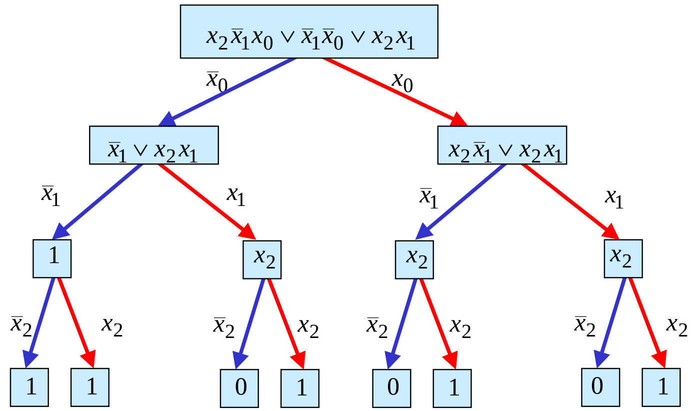
Satz 5.5: Für jede Boolesche Funktion $f(x_1,\dots,x_n)$ gilt

$$f(x_1,\dots,x_n) = \left(x_i \wedge f(x_1,\dots,x_{i-1},1,x_{i+1},\dots,x_n)\right) \vee \left(\bar{x}_i \wedge f(x_1,\dots,x_{i-1},0,x_{i+1},\dots,x_n)\right)$$

- **Beispiel:**

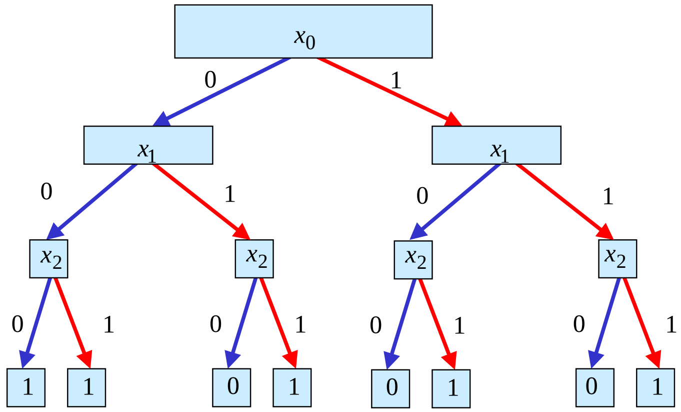
$$\begin{aligned} f(x_2,x_1,x_0) &= x_2\bar{x}_1x_0 \vee \bar{x}_1\bar{x}_0 \vee x_2x_1 \\ &= x_0(x_2\bar{x}_1 \vee x_2x_1) \vee \bar{x}_0(\bar{x}_1 \vee x_2x_1) \\ &= x_2\bar{x}_1x_0 \vee x_2x_1x_0 \vee \bar{x}_1\bar{x}_0 \vee x_2x_1\bar{x}_0 \\ &= x_2(\bar{x}_1x_0 \vee x_1x_0 \vee \bar{x}_1\bar{x}_0 \vee x_1\bar{x}_0) \vee \bar{x}_2(\bar{x}_1\bar{x}_0) \\ &= x_2x_1x_0 \vee x_2\bar{x}_1x_0 \vee x_2x_1\bar{x}_0 \vee x_2\bar{x}_1\bar{x}_0 \vee \bar{x}_2\bar{x}_1\bar{x}_0 \end{aligned}$$

Baumdarstellung



Binary Decision Diagram (BDD)

- Andere Interpretation der Shannon-Entwicklung

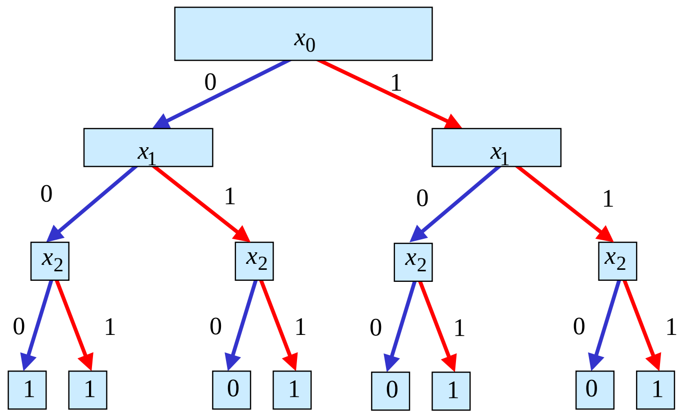


Reduzierte Baumdarstellungen

- Da die Variablen in allen Pfaden in der gleichen Reihenfolge auftauchen, spricht man auch von einem <u>ordered BDD</u> (OBDD)
- Ein BDD benötigt 2^n Knoten bei n Variablen
  - ⇨ Für viele Anwendung ist die Speicherung aller Knoten nicht notwendig
  - ⇨ Knoten, deren Nachfolger gleich sind, können eliminiert werden (Regel 1)
  - ⇨ Teile des Baumes, die genau so noch einmal vorkommen, können gemeinsam genutzt werden (Regel 2)
- Es entsteht ein bezüglich einer Ordnung der Variablen eindeutiger reduzierter Baum

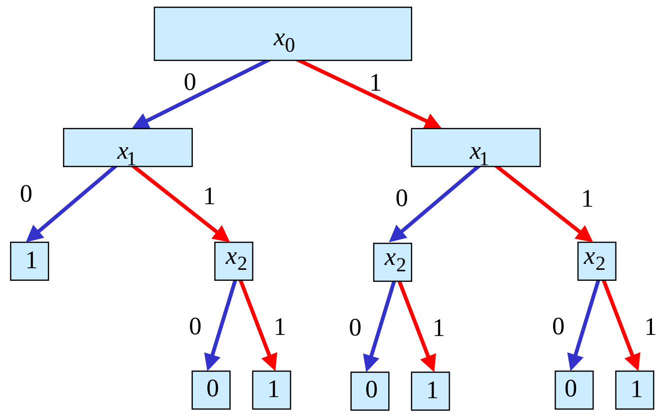
Reduced Ordered BDD (ROBDD)

Ausgangsgraph



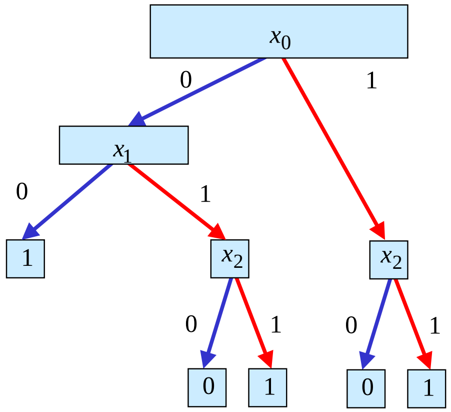
Reduced Ordered BDD (ROBDD)

Regel 1



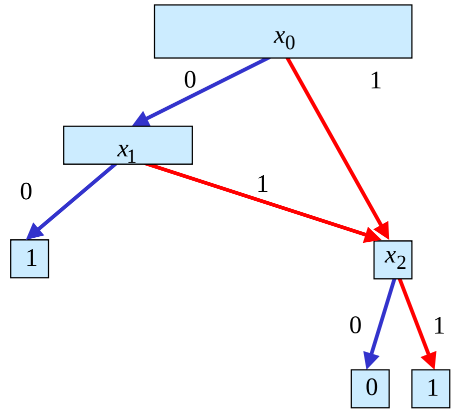
Reduced Ordered BDD (ROBDD)

Regel 1



Reduced Ordered BDD (ROBDD)

Regel 2



DNF/KNF-Konversion

- **Statt der Min- und Maxterme kann man auch deren Indizes angeben**
  - f=MINt(0,3,4,7)
  - f=MAXt(1,2,5,6)
- **Für die Umwandlung der DNF einer Funktion f in die entsprechende KNF folgt direkt aus Satz 2.4:**
  - **Die Indizes der Minterme, die nicht in der Funktionsdarstellung der DNF der Funktion verwendet werden, sind Indizes der Maxterme der KNF der Funktion**

DNF/KNF-Konversion

i_{10}	$x_2 x_1 x_0$	**Minterme**	**Maxterme**
0	000	$\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_0$	
1	001		$x_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0$
2	010		$x_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0$
3	011	$\bar{x}_2 \wedge x_1 \wedge x_0$	
4	100	$x_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_0$	
5	101		$\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0$
6	110		$\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0$
7	111	$x_2 \wedge x_1 \wedge x_0$	

DNF : $f(x_2, x_1, x_0) = \bar{x}_2\bar{x}_1\bar{x}_0 \vee \bar{x}_2 x_1 x_0 \vee x_2\bar{x}_1\bar{x}_0 \vee x_2 x_1 x_0$

KNF : $f(x_2, x_1, x_0) = (x_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0)$

NAND-NOR-Konversion

- **Sowohl NAND- als auch NOR-System sind vollständige Operatorensysteme**
  - **alle Booleschen Funktionen lassen sich mit mit diesen Operatoren darstellen**
  - **da sowohl NAND- als auch NOR-Gatter besonders einfach realisiert werden, haben diese Darstellungen eine besondere Bedeutung**
- **NAND-Konversion aus der DNF:**

$$
\begin{aligned}
f(x_2, x_1, x_0) &= x_2 x_1 \bar{x}_0 \vee x_2 \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_2 x_1 x_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \\
&= \overline{\overline{x_2 x_1 \bar{x}_0 \vee x_2 \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_2 x_1 x_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0}} \\
&= \overline{\overline{x_2 x_1 \bar{x}_0} \wedge \overline{x_2 \bar{x}_1 x_0} \wedge \overline{\bar{x}_2 x_1 x_0} \wedge \overline{\bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0}} \\
&= \mathbf{NAND_4}(\mathbf{NAND_3}(x_2 x_1 \bar{x}_0), \mathbf{NAND_3}(x_2 \bar{x}_1 x_0), \\
&\quad \mathbf{NAND_3}(\bar{x}_2 x_1 x_0), \mathbf{NAND_3}(\bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0))
\end{aligned}
$$

NAND-NOR-Konversion

- **NOR-Konversion aus der KNF:**

$$
\begin{aligned}
f(x_2, x_1, x_0) &= x_2 x_1 \bar{x}_0 \vee x_2 \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_2 x_1 x_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \\
&= (x_2 \vee x_1 \vee x_0)(x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0)(\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0) \\
&= \overline{\overline{(x_2 \vee x_1 \vee x_0)(x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0)(\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0)}} \\
&= \overline{\overline{(x_2 \vee x_1 \vee x_0)} \vee \overline{(x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0)} \vee \overline{(\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0)} \vee \overline{(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0)}} \\
&= \mathbf{NOR_4}(\mathbf{NOR_3}(x_2, x_1, x_0), \mathbf{NOR_3}(x_2, \bar{x}_1, \bar{x}_0), \\
&\quad \mathbf{NOR_3}(\bar{x}_2, x_1, \bar{x}_0), \mathbf{NOR_3}(\bar{x}_2, \bar{x}_1, \bar{x}_0))
\end{aligned}
$$

6 Minimalformen

- **Boolesche Ausdrücke für eine Boolesche Funktion *f* in einer kürzestmöglichen Darstellung**
  - **technische Realisierung mit möglichst geringen Kosten**
- **Disjunktive und konjunktive Minimalformen**
  - **Disjunktion von Implikanten (DMF)**
  - **Konjunktion von Implikaten (KMF)**
- **Die DNF und KMF sind nicht eindeutig**

$f(x_1, x_0) = \bar{x}_1 x_0 \vee x_1 \bar{x}_0$	**DMF**
$g(x_1, x_0) = \bar{x}_1 x_0 \vee x_1 x_0$	**keine DMF**
$= x_0$	**DMF**
$h(x_2, x_1, x_0) = (x_1 \vee \bar{x}_0) \wedge (x_2 \vee x_0)$	**KMF**
$k(x_2, x_1, x_0) = \bar{x}_0 \wedge (x_2 \vee \bar{x}_0) \wedge (x_2 \vee x_1)$	**keine KMF**
$= \bar{x}_0 \wedge (x_2 \vee x_1)$	**KMF**

Minimalformen

- **Das Finden einer Minimalform ist nicht trivial**
  - **besonders bei Funktionen mit vielen Variablen**
  - **oft nur suboptimale Lösungen**
  - **Einsatz von Heuristiken**
- **Allgemeines zweischrittiges Vorgehen:**
  - **Finden einer Menge von Implikanten bzw. Implikate mit einer möglichst geringen Anzahl von Literalen**
  - **Auswahl aus dieser Menge, so daß deren Disjunktion bzw. Konjunktion die gesuchte Funktion erhält**

Ökonomische Kriterien für den Entwurf von Schaltnetzen

- Geringe Kosten für den Entwurf (Entwurfsaufwand)
  - ⇨ Lohnkosten
  - ⇨ Rechnerbenutzung, Softwarelizenzen
- Geringe Kosten für die Realisierung (Realisierungsaufwand)
  - ⇨ Bauelemente, Gehäuseformen
  - ⇨ Kühlung
- Geringe Kosten für die Inbetriebnahme
  - ⇨ Kosten für den Test
  - ⇨ Fertigstellung programmierbarer Bauelemente
- Geringe Kosten für den Betrieb
  - ⇨ Wartung
  - ⇨ Energie

Entwurfsziele

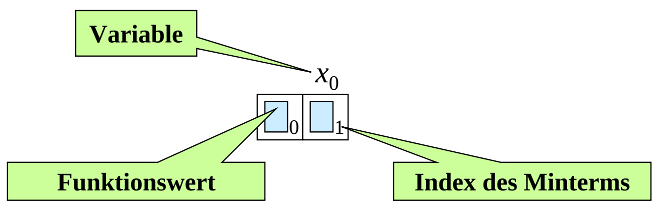
- Manche Kriterien stehen im Widerspruch
  - ⇨ zuverlässigere Schaltungen erfordern einen höheren Realisierungsaufwand
  - ⇨ Verringerung des Realisierungsaufwand erfordert eine Erhöhung der Entwurfskosten
- Ziel des Entwurfs ist das Finden des günstigsten Kompromisses
  - ⇨ Korrektheit der Realisierung
  - ⇨ Einhaltung der technologischen Grenzen
  - ⇨ ökonomischen Kriterien

Minimierungsverfahren

- Finden von Minimalformen Boolescher Funktionen
  - ⇨ ohne Betrachtung der Zieltechnologie
  - ⇨ mit Betrachtung der Zielzechnologie
- Drei Minimierungsansätze
  - ⇨ algebraische Verfahren
  - ⇨ graphische Verfahren
  - ⇨ tabellarische Verfahren
- Man unterscheidet
  - ⇨ exakte Minimierungsverfahren (z.B. Quine McCluskey), deren Ergebnis das absolute Minimum einer Schaltungsdarstellung ist
  - ⇨ heuristische Minimierungsverfahren auf der Basis von iterativen Minimierungsschritten

6.1 KV-Diagramme

- Nach Karnaugh und Veitch
- Möglichkeit, Boolesche Funktionen übersichtlich darzustellen
  - ⇨ bis 6 Variablen einsetzbar
- Ausgangspunkt ist ein Rechteck mit 2 Feldern



KV-Diagramme

- **Beispiele**

	x_0
0_0	1_1

$f(x_0) = x_0$

	x_0
1_0	0_1

$f(x_0) = \bar{x}_0$

- **Erweiterung durch Spiegelung**
  - ⇨ **für jede zusätzliche Variable verdoppelt sich die Zahl der Felder**

	x_0	
0	1	
2	3	x_1

	x_0	x_0		
0	1	5	4	
2	3	7	6	x_1
		x_2	x_2	

		x_0	x_0		
	0	1	5	4	
	2	3	7	6	x_1
x_3	10	11	15	14	x_1
x_3	8	9	13	12	
			x_2	x_2	

Eigenschaften von KV-Diagrammen

- **Jedes Feld ist ein Funktionswert**
  - ⇨ **Minterm der Funktion**
  - ⇨ **eindeutige Variablenzuordnung**
- **Oft werden x_1 und x_2 vertauscht**
  - ⇨ **andere Numerierung der Felder**
  - ⇨ **kein Einfluß auf das Minimierungsverfahren**
- **Aufstellen der KV-Diagramme über die Funktionstabelle:**

Index	x_2	x_1	x_0	y
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

$f(x_2, x_1, x_0) = x_1\bar{x}_0 \vee x_2 x_1 \vee x_2\bar{x}_1\bar{x}_0$

	x_0	x_0		
0_0	0_1	0_5	1_4	
1_2	0_3	1_7	1_6	x_1
		x_2	x_2	

KV-Diagramme über die KNF

- **Argumentation über die Nullstellen der Funktion**
  - ⇨ **Jede Nullstelle entspricht einem Maxterm (Satz 2.4)**
- **Beispiel**

$$f(x_2, x_1, x_0) = x_1\bar{x}_0 \vee x_2 x_1 \vee x_2\bar{x}_1\bar{x}_0$$

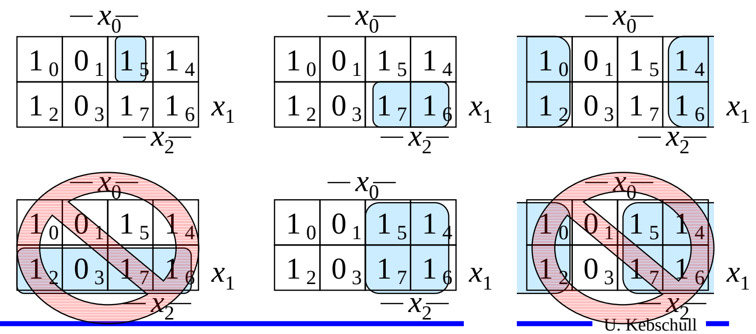
	x_0	x_0		
0_0	0_1	0_5	1_4	
1_2	0_3	1_7	1_6	x_1
		x_2	x_2	

$$f(x_2, x_1, x_0) = (x_2 \vee x_1 \vee x_0) \wedge (x_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0)$$

Minimalformen aus KV-Diagrammen

- **Zusammenfassen von Mintermen zu Implikanten**
- **Beispiel:**

	x_0	x_0		
1_0	0_1	1_5	1_4	
1_2	0_3	1_7	1_6	x_1
		x_2	x_2	



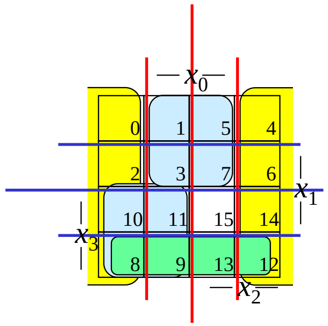
Implikant k-ter Ordnung

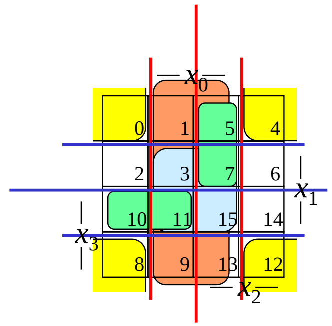
Def. 6.11: Es sei eine Boolesche Funktion $f(x_0,\ldots,x_{n-1}):B^n \rightarrow B$ gegeben. Ein <u>Implikant k-ter Ordnung</u> umfaßt 2^k Felder eines KV-Diagramms.

- **Man erhält**
  - **Implikanten 0-ter Ordnung** — **Minterme**
  - **Implikanten 1-ter Ordnung** — **Zusammenfassung zweier Minterme**
  - **Implikanten 2-ter Ordnung** — **Zusammenfassung zweier Implikanten 1-ter Ordnung**
  - **usw.**

Finden möglicher Zusammenfassungen

- **Finden von 1-Blöcken, die symmetrisch zu denjenigen Achsen, an denen eine Variable von 0 auf 1 wechselt**
- **Jede Funktion läßt sich als disjunktive Verknüpfung solcher Implikanten darstellen**
- **Beispiele**



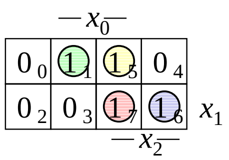


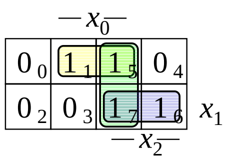
Primimplikant

Def. 6.11: Es sei eine Boolesche Funktion $f(x_0,\ldots,x_{n-1}):B^n \rightarrow B$ gegeben. Ein Implikant p heißt <u>Primimplikant</u>, wenn es keinen Implikanten q gibt, der p impliziert.

- **Ein Primimplikant p ist von größtmöglicher Ordnung**
  - **Primimplikanten sind einfach aus einem KV-Diagramm herauszulesen**
  - **man sucht die größtmöglichen Implikanten**

$$f(x_2, x_1, x_0) = x_2 x_1 \bar{x}_0 \vee x_2 x_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 x_0$$





Überdeckung

Satz 6.6: Zu jeder Booleschen Funktion f gibt es eine minimale Überdeckung aus Primimplikanten

Bew. (Skizze):

Angenommen wir haben eine minimale Überdeckung der Funktion, die einen Implikanten k besitzt, der kein Primimplikant ist.

$\Rightarrow$ **Dieser Implikant k kann durch einen Primimplikant p ersetzt werden, der k enthält**

$\Rightarrow$ **Das Ergebnis ist eine Überdeckung der Funktion f aus Primimplikanten mit der gleichen Anzahl von Termen**

$\Rightarrow$ **Die Überdeckung ist minimal**

- **Einschränkung des Suchraums**
  - **man braucht nur die Primimplikanten für die Minimierung betrachten**

Kernprimimplikant

Def. 6.11: Es sei eine Boolesche Funktion $f(x_0,\ldots,x_{n-1}): B^n \rightarrow B$ gegeben. Ein Implikant p heißt <u>Kernprimimplikant</u>, wenn er einen Minterm überdeckt, der von keinem anderen Primimplikant überdeckt wird.

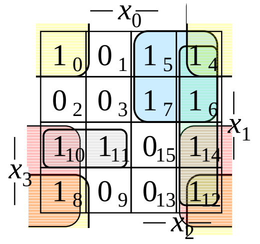
- **Man nennt solche Primimplikanten auch <u>essentielle</u> Primimplikanten**
  - ⇨ **Ein Kernprimimplikant muß auf jeden Fall in der disjunktiven Minimalform vorkommen**
- **Ziel der Minimierung:**
  - ⇨ **Überdecken der Funktion durch Kernprimimplikanten und möglichst wenigen zusätzlichen Primimplikanten**
- **Zwei Schritte**
  1. **Finde alle Primimplikanten**
  2. **Suche eine Überdeckung der Funktion mit möglichst wenigen Primimplikanten**

Beispiel

$$f(x_3,x_2,x_1,x_0) = \bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1\bar{x}_0 \vee \bar{x}_3 x_2\bar{x}_1\bar{x}_0 \vee \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_3 x_2 x_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_3 x_2 x_1 x_0 \vee x_3\bar{x}_2\bar{x}_1\bar{x}_0 \vee x_3\bar{x}_2 x_1\bar{x}_0 \vee x_3\bar{x}_2 x_1 x_0 \vee x_3 x_2\bar{x}_1\bar{x}_0 \vee x_3 x_2 x_1 \bar{x}_0$$

$$= MINt(0, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14)$$

DNF



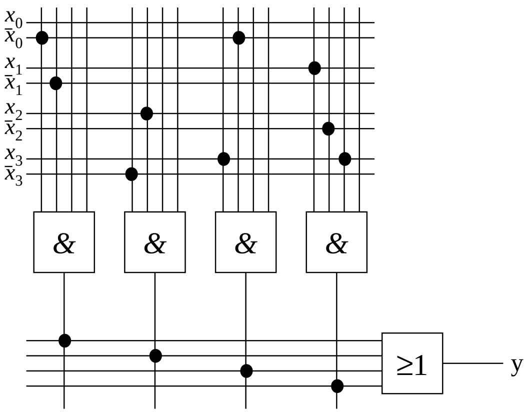
e	$\bar{x}_1\bar{x}_0$	(0,4,8,12)
e	$\bar{x}_3 x_2$	(4,5,6,7)
	$x_2\bar{x}_0$	(4,6,12,14)
	$x_3\bar{x}_0$	(8,10,12,14)
e	$x_3\bar{x}_2 x_1$	(10,11)

$$f(x_3,x_2,x_1,x_0) = \bar{x}_1\bar{x}_0 \vee \bar{x}_3 x_2 \vee x_3\bar{x}_0 \vee x_3\bar{x}_2 x_1$$

$$= \bar{x}_1\bar{x}_0 \vee \bar{x}_3 x_2 \vee x_2\bar{x}_0 \vee x_3\bar{x}_2 x_1$$

DMF

Realisierung als PLA



$$f(x_3,x_2,x_1,x_0) = \bar{x}_1\bar{x}_0 \vee \bar{x}_3 x_2 \vee x_3\bar{x}_0 \vee x_3\bar{x}_2 x_1$$

Zusammenfassung der wichtigsten Begriffe

Primimplikant:	**Implikant maximaler Größe**
Überdeckung:	**alle 1-Stellen einer Funktion werden „abgedeckt“**
Kernprimimplikant:	**Primimlikant der einen Mintern abdeckt, der in keinem anderen Primimlikanten enthalten ist**

6.3 Bündelminimierung

- Funktionen mit mehreren Ausgängen werden gemeinsam minimiert
- gemeinsame Implikanten sollten mehrfach genutzt werden
- Beispiel: Transformation eines Codes

- Transformationstabelle

System1			System2	
c	b	a	x	y
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	1	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	0	1

	x_0	x_0		
1_0	0_1	1_5	1_4	
0_2	0_3	0_7	0_6	x_1
		x_2	x_2	

	x_0	x_0		
0_0	0_1	1_5	0_4	
0_2	1_3	1_7	0_6	x_1
		x_2	x_2	

U. Kebschull

Bündelminimierung

- Getrennte Minimierung
  - ⇨ insgesamt 4 Implikanten für die Realisierung

x

	a	a		
1_0	0_1	1_5	1_4	
0_2	0_3	0_7	0_6	b
		c	c	

y

	a	a		
0_0	0_1	1_5	0_4	
0_2	1_3	1_7	0_6	b
		c	c	

- Bündelminimierung
  - ⇨ insgesamt 3 Implikanten für die Realisierung

x

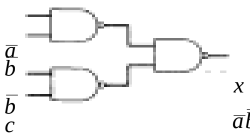
	a	a		
1_0	0_1	1_5	1_4	
0_2	0_3	0_7	0_6	b
		c	c	

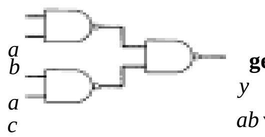
y

	a	a		
0_0	0_1	1_5	0_4	
0_2	1_3	1_7	0_6	b
		c	c	

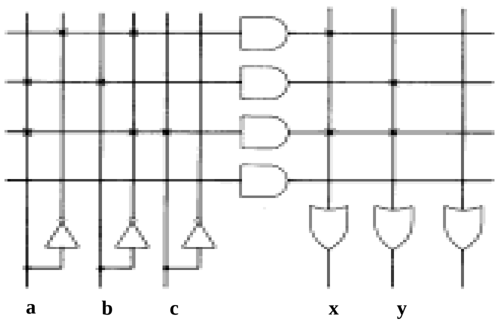
U. Kebschull

Bündelminimierung





getrennte Minimierung



Bündelminimierung

$x = \bar{a}\bar{b} \vee a\bar{b}c$

$y = ab \vee a\bar{b}c$

U. Kebschull

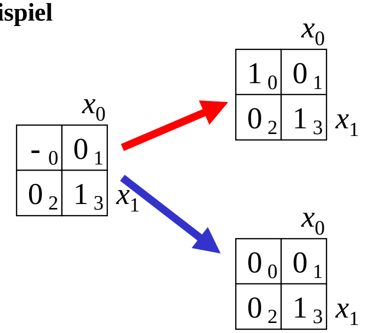
6.4 Unvollständig definierte Funktionen

- Bisher war für alle Belegungen der Eingänge ein Funktionswert festgelegt
  - ⇨ in praktischen Fällen kommt es sehr häufig vor, daß die Funktionswerte für bestimmte Eingangsbelegungen frei wählbar sind
  - ⇨ diese Funktionswerte sind frei verfügbar
- Solche Funktionen heißen <u>unvollständig</u> oder <u>partiell definierte</u> Funktionen
  - ⇨ die nicht verwendeten Eingangsbelegungen heißen auch don‘t-care-Belegungen
  - ⇨ in KV-Diagrammen werden diese Felder mit einem „-“ gekennzeichnet
- wichtiges Potential für die Minimierung!
  - ⇨ um eine DMF zu erhalten, müssen diese mit „0“ oder „1“ belegt werden

U. Kebschull

Minimierung unvollständiger Boolescher Funktionen

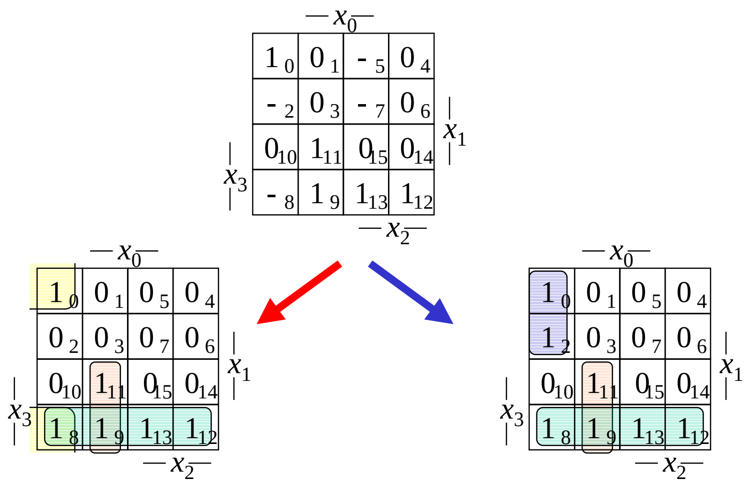
- **Beispiel**



$f(x_1, x_0) = x_1 x_0 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_0$

$f(x_1, x_0) = x_1 x_0$

Minimierung unvollständiger Boolescher Funktionen



$f = x_3 \bar{x}_1 \vee x_3 \bar{x}_2 x_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0$

$f = x_3 \bar{x}_1 \vee x_3 \bar{x}_2 x_0 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_0$

6.5 Das Verfahren nach Quine-McCluskey

- **KV-Diagramme mit mehr als 6 Variablen werden sehr groß und unübersichtlich**
  - ⇨ **dieses Problem wurde zuerst von Quine und McCluskey erkannt und gelöst**
  - ⇨ **das Verfahren nach Quine-McCluskey ist ein tabellarisches Verfahren**
  - ⇨ **es führt auf eine DMF (disjunktive minimale Form)**
- **Ausgangspunkt ist die Funktionstabelle der Funktion**
  - ⇨ **nur die Minterme werden berücksichtigt**
- **Der Suchraum wird eingeschränkt, weil der Satz 2.6 gilt:**
  - ⇨ **zu jeder Booleschen Funktion *f* gibt es eine minimale Überdeckung aus Primimplikanten**
- **Verfahren nach Quine McCluskey in 2 Schritten:**

  1. Schritt: berechne alle Primimplikanten

  2. Schritt: suche eine minimale Überdeckung aller Minterme

Beispiel: Die vollständige Funktionstabelle

Nr.	e d c b a	y
0	0 0 0 0 0	0
1	0 0 0 0 1	0
2	0 0 0 1 0	1
3	0 0 0 1 1	0
4	0 0 1 0 0	1
5	0 0 1 0 1	1
6	0 0 1 1 0	1
7	0 0 1 1 1	0
8	0 1 0 0 0	0
9	0 1 0 0 1	0
10	0 1 0 1 0	1
11	0 1 0 1 1	0
12	0 1 1 0 0	1
13	0 1 1 0 1	1
14	0 1 1 1 0	1
15	0 1 1 1 1	0

Nr.	e d c b a	y
16	1 0 0 0 0	0
17	1 0 0 0 1	0
18	1 0 0 1 0	1
19	1 0 0 1 1	0
20	1 0 1 0 0	0
21	1 0 1 0 1	0
22	1 0 1 1 0	1
23	1 0 1 1 1	0
24	1 1 0 0 0	0
25	1 1 0 0 1	0
26	1 1 0 1 0	1
27	1 1 0 1 1	0
28	1 1 1 0 0	0
29	1 1 1 0 1	0
30	1 1 1 1 0	1
31	1 1 1 1 1	0

1. Schritt: Berechnung aller Primimplikanten

- Schreibweise
  - `1` steht für eine nicht negierte Variable
  - `0` steht für eine negierte Variable
  - `-` steht für eine nicht auftretende Variable
- Man betrachtet nur die Minterme
  - 1-Stellen der Funktion
- Die Minterme werden geordnet
  - Gruppen mit der gleichen Anzahl von Einsen
  - innerhalb der Gruppen: aufsteigende Reihenfolge
  - man erhält die 1. Quinesche Tabelle, 0. Ordnung
- Minterme benachbarter Gruppen die sich nur in 1 Variable unterscheiden werden gesucht
  - diese können durch Streichen der Variable zusammengefaßt werden
  - man erhält die 1. Quineschen Tabellen höherer Ordnung

Beispiel: 1. Quinesche Tabelle

Nr.	e d c b a
2	0 0 0 1 0
4	0 0 1 0 0
5	0 0 1 0 1
6	0 0 1 1 0
10	0 1 0 1 0
12	0 1 1 0 0
18	1 0 0 1 0
13	0 1 1 0 1
14	0 1 1 1 0
22	1 0 1 1 0
26	1 1 0 1 0
30	1 1 1 1 0

0. Ordnung

Nr.	e d c b a
2,6	0 0 - 1 0
2,10	0 - 0 1 0
2,18	- 0 0 1 0
4,5	0 0 1 0 -
4,6	0 0 1 - 0
4,12	0 - 1 0 0
5,13	0 - 1 0 1
6,14	0 - 1 1 0
6,22	- 0 1 1 0
10,14	0 1 - 1 0
10,26	- 1 0 1 0
12,13	0 1 1 0 -
12,14	0 1 1 - 0
18,22	1 0 - 1 0
18,26	1 - 0 1 0
14,30	- 1 1 1 0
22,30	1 - 1 1 0
26,30	1 1 - 1 0

1. Ordnung

Nr.	e d c b a	
2,6,10,14	0 - - 1 0	
2,6,18,22	- 0 - 1 0	
2,10,18,26	- - 0 1 0	
4,5,12,13	0 - 1 0 -	*A*
4,6,12,14	0 - 1 - 0	*B*
6,14,22,30	- - 1 1 0	
10,14,26,30	- 1 - 1 0	
18,22,26,30	1 - - 1 0	

2. Ordnung

Nr.	e d c b a	
2,6,10,14		
18,22,26,30	- - - 1 0	*C*

3. Ordnung

2. Schritt: Suche einer minimalen Überdeckung

- Aufstellen der 2. Quineschen Tabelle
  - alle Primimplikanten werden zusammen mit der Nummer des Minterms aus dem sie hervorgegangen sind in eine Überdeckungstabelle eingetragen
- Kosten für einen Primimplikanten:
  - Anzahl der UND-Eingänge (Anzahl der Variablen des Terms)

Primimplikant	2	4	5	6	10	12	13	14	18	22	26	30	Kosten
A		X	X			X	X						3
B		X		X		X		X					3
C	X			X	X			X	X	X	X	X	2

- Aufgabe: Finden einer Überdeckung aller Minterme mit minimalen Kosten

Systematische Lösung des Überdeckungsproblems

- Aufstellung einer Überdeckungsfunktion $\ddot{u}_f$
  - w_A, w_B und w_C sind Variablen, die kennzeichnen, ob ein entsprechender Primimplikant in der vereinfachten Darstellung aufgenommen wird, oder nicht
  - Konjunktive Form über alle den jeweiligen Minterm überdeckenden Primimplikanten

Primimplikant	2	4	5	6	10	12	13	14	18	22	26	30
A		X	X			X	X					
B		X		X		X		X				
C	X			X	X			X	X	X	X	X

$$\ddot{u}_f = w_C(w_A \vee w_B)w_A(w_B \vee w_C)w_C(w_A \vee w_B)w_A(w_B \vee w_C)w_C w_C w_C w_C$$

$$= w_C(w_A \vee w_B)w_A(w_B \vee w_C)$$

$$= (w_C w_A \vee w_C w_B)(w_A w_B \vee w_A w_C)$$

$$= w_C w_B w_A \vee w_A w_C$$

$$(= w_A w_C)$$

Systematische Lösung des Überdeckungsproblems

- **Ergebnis nach der Vereinfachung:** $ü_f = w_C w_B w_A \vee w_A w_C$
- **Damit f ganz überdeckt ist, muß $ü_f$ eine Tautologie sein**
  - ⇨ **man sucht einen konjunktiven Term mit minimalen Kosten**

$$w_C w_B w_A \quad \textbf{Kosten}: 3+3+2=8$$
$$w_A w_C \quad \textbf{Kosten}: 3+2=5$$

- **Als Endergebnis der Minimierung für die Funktion *f* erhält man**

$$f(e,d,c,b,a) = \bar{e}c\bar{b} \vee b\bar{a}$$

Vereinfachung des Überdeckungsproblems

- **Die Primimplikantentabelle kann reduziert werden, indem essentielle Primterme (Kernprimimplikanten) und die von ihnen überdeckten Minterme gestrichen werden**
  - ⇨ **tragen mit einem einzigen „X“ zu einer Spalte bei**
  - ⇨ **müssen auf jeden Fall in der Überdeckung enthalten sein**
- **In diesem Beispiel sind dies die beiden Primimplikanten A und C**

Primimplikant	2	4	5	6	10	12	13	14	18	22	26	30	Kosten
A		X	X			X	X						3
B		X		X		X		X					3
C	X			X	X			X	X	X	X	X	2

  - ⇨ **A: 5, 13**
  - ⇨ **C: 2, 10, 18, 22, 26, 30**
  - ⇨ **B ist vollständig überdeckt und kann ebenfalls gestrichen werden**

Aufwandsbetrachtungen

- **Alle Verfahren benötigen 2 Schritte**
  - ⇨ **1. Erzeugen aller Primimplikanten (Primimplikate)**
  - ⇨ **2. Auswahl der Primiplikanten (Primimplikate), welche die Minterme (Maxterme) mit minimalen Kosten überdecken**
- **Die Anzahl der Primimplikanten (Primimplikaten) kann exponentiell steigen**
  - ⇨ **Es gibt Funktionen mit** $\frac{3^n}{n}$ **Primimplikanten**
- **Das Überdeckungsproblem ist NP-Vollständig**
  - ⇨ **es besteht wenig Hoffnung einen Algorithmus zu finden, der dieses Problem in polynomial mit der Zahl der Eingabevariablen löst**

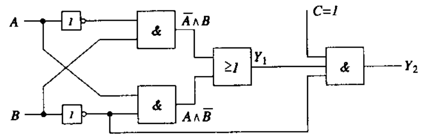
Heuristische Verfahren

- **Heuristische Minimierungsverfahren werden eingesetzt,**
  - ⇨ **wenn die zweistufige Darstellung optimiert werden muß, aber**
  - ⇨ **nur begrenzte Rechenzeit und Speicherplatz zur Verfügung steht**
- **Die meisten heuristischen Minimierungsansätze basieren auf einer schrittweisen Verbesserung der Schaltung**
- **Unterschiede zu exakten Verfahren:**
  - ⇨ **man wendet eine Menge von Transformationen direkt auf die Überdeckung des *ON-Sets* an**
  - ⇨ **man definiert die Optimierung als beendet, wenn diese Transformationen keine Verbesserungen mehr bringen**

6.6 Laufzeiteffekte in Schaltnetzen

- Bisher wurden Schaltnetze mit idealen Verknüpfungsgliedern betrachtet
  - ⇨ die Verknüpfungsgliedern besaßen keine Signallaufzeit
- Bei realen Verknüpfungsgliedern dürfen Signallaufzeiten nicht vernachlässigt werden
  - ⇨ Schaltvariablen können Werte annehmen, die theoretisch oder bei idealen Verknüpfungsgliedern nie auftreten könnten
- Solche Störimpulse nennt man Hazards
  - ⇨ sie treten als Antwort auf die Änderung der Werte der Eingangsvariablen auf

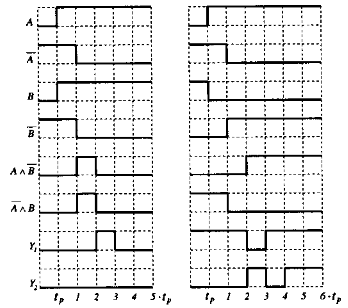
Entstehung von Hazards



a) Schaltnetz

B	A	Y_1	Y_2
0	0	0	0
1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	1	1

b) Funktionstabelle



a) Impulsdiagramm

Statische Hazards

- Statische Hazards sind Störimpulse aus einer Verknüpfung, die theoretisch konstant Null oder Eins liefern müsste

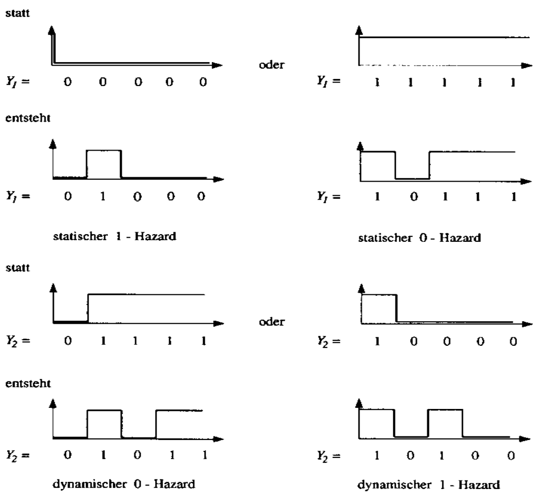
$X_t \wedge \bar{X}_{t-k}$ müßte Null liefern
statischer 1-Hazard bei einem Übergang von X: 0→1

$X_t \vee \bar{X}_{t-k}$ müßte Eins liefern
statischer 0-Hazard bei einem Übergang von X: 1→0

Dynamische Hazards

- Dynamische Hazards entstehen als zusätzliche Übergänge beim Ausgang eines Schaltnetzes
- $X_t \wedge \bar{X}_{t-k} \vee X_l$, mit $l > k$
  - ⇨ bei einem Übergang von $X=0 \rightarrow X=1$ darf am Ausgang nur ein zu X_{t-l} synchroner 0 →1 Übergang auftreten
  - ⇨ durch den vorgeschalteten statischen Hazard kommt es aber zu einer zusätzlichen 0 →1 Flanke
- $X_t \wedge (\bar{X}_{t-k} \vee X_l)$, mit $l > k$
  - ⇨ bei einem Übergang von $X=0 \rightarrow X=1$ darf am Ausgang nur ein zu X_t synchroner 0 →1 Übergang auftreten
  - ⇨ durch den vorgeschalteten statischen Hazard kommt es aber zu einer zusätzlichen 0 →1 Flanke

Klassifikation von Hazards



Behebung von Hazards

- Hazards können die Funktion von Schaltnetzen stören
  - ⇨ falsche Werte können an den Eingang eines Schaltnetzes zurückgekoppelt werden
- Um solche Fehler zu vermeiden werden taktflankengetriggerte Speicherglieder in die Rückkopplung eingefügt
- Die Signale werden erst übernommen, wenn die Hazards abgeklungen sind
  - ⇨ nur stabile, gültige Werte werden übernommen
  - ⇨ synchrone Schaltwerke: Schaltwerke, die durch einen zentralen Takt gesteuert werden
- Hazards haben einen Einfluß auf die maximale Schaltgeschwindigkeit
  - ⇨ maximaler Takt
  - ⇨ Entfernung von Hazards führt zu einer Erhöhung der Geschwindigkeit einer Schaltung