und nach Umformung

(M 13.52) $\boxed{T_S = \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1}}$

■ Die **Frequenz** der resultierenden Schwingung ergibt sich aus (M 13.51) zu

(M 13.53) $\boxed{f_R = \frac{f_1 + f_2}{2} = \bar{f}}$

Daraus folgt für die **Periodendauer** der resultierenden Schwingung mit $T_R = 1/f_R$

(M 13.54) $\boxed{T_R = \frac{2T_1 T_2}{T_1 + T_2}}$

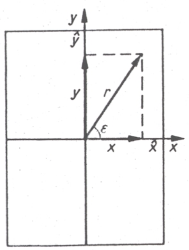
■ Ist die als Voraussetzung für eine Schwebung eingeführte Bedingung $\hat{y}_1 = \hat{y}_2$ nicht erfüllt, so entsteht eine **unreine Schwebung**. Bei ihr wird die Schwingungsamplitude nicht null, sondern durchläuft nur ein Minimum. Außerdem ist die Schwingungsdauer $T_R$ nicht konstant, sondern schwankt periodisch. Sie besitzt ihr Maximum im Amplitudenminimum und umgekehrt.

### 13.5.3 Schwingungen ungleicher Richtung

Beide Schwingungen erfolgen in den $x$- und $y$-Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems:

$$x = \hat{x}\sin(\omega_x t + \varphi_{0x}) \quad \text{und} \quad y = \hat{y}\sin(\omega_y t + \varphi_{0y})\,.$$

Die resultierende Elongation zur Zeit $t$ ist durch eine Vektoraddition zu bestimmen




Wenn
- $r$ resultierende Elongation zur Zeit $t$,
- $x, y$ Elongationen der Einzelschwingungen zur Zeit $t$,
- $\varepsilon$ Winkel zwischen der resultierenden Elongation und der positiven $x$-Richtung,



dann gilt

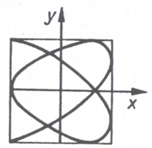
(M 13.55) $\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$

und

(M 13.56) $\boxed{\varepsilon = \arctan \frac{y}{x}}$

*Beachte:*
- $r$ und $\varepsilon$ sind die Polarkoordinaten des Endpunktes der resultierenden Elongation.

■ Bestimmt man die resultierenden Elongationen zu den verschiedenen Zeiten und verbindet deren Endpunkte, so erhält man die Bahnkurve der resultierenden Schwingung (in der $x, y$-Ebene). Es sind Kurven komplizierter Struktur, die als **Lissajous-Figuren** bezeichnet werden. Nur im Falle *gleicher Frequenz* ergeben sich *Ellipsen* unterschiedlicher Exzentrizität (Gerade und Kreis eingeschlossen).




■ Die Gleichungen der Bahnkurven für den Fall $f_1 = f_2$ findet man aus den Gleichungen der Einzelschwingungen: $x = \hat{x}\sin\omega t$ und $y = \hat{y}\sin(\omega t + \alpha)$, wenn zwischen beiden Schwingungen eine Phasenwinkeldifferenz von $\Delta\varphi = \alpha$ besteht. Mit

$$\sin\omega t = \frac{x}{\hat{x}} \quad \text{und} \quad \cos\omega t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{\hat{x}^2}}$$

ergibt sich nach Anwendung eines Additionstheorems zunächst

$$y = \hat{y}\sin\omega t\cos\alpha + \hat{y}\cos\omega t\sin\alpha \qquad \text{und weiter}$$

$$y = \hat{y}\frac{x}{\hat{x}}\cos\alpha + \hat{y}\sqrt{1 - \frac{x^2}{\hat{x}^2}}\sin\alpha\,. \qquad \text{Umformen ergibt}$$

$$\frac{y}{\hat{y}} - \frac{x}{\hat{x}}\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{x^2}{\hat{x}^2}}\sin\alpha\,.$$

Quadrieren und Umformen liefert die Gleichung für die Bahnkurve

$$\frac{y^2}{\hat{y}^2} + \frac{x^2}{\hat{x}^2} - \frac{2xy}{2\hat{x}\hat{y}}\cos\alpha = \sin^2\alpha\,.$$

Es ist die Gleichung einer Ellipse mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung und einer Neigung der Ellipsenachsen gegen die Koordinatenachsen.

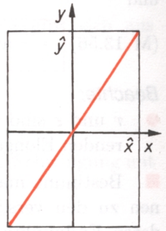
■ Die Bahngleichung vereinfacht sich für bestimmte Phasenwinkeldifferenzen $\Delta\varphi = \alpha$:

▶ $\boldsymbol{\Delta\varphi = 0}$

Die Bahngleichung lautet

$$\frac{x^2}{\widehat{x}^2} + \frac{y^2}{\widehat{y}^2} - \frac{2xy}{2\widehat{x}\widehat{y}} = 0 .$$ Daraus folgt

$$\frac{x}{\widehat{x}} - \frac{y}{\widehat{y}} = 0 \quad \text{oder} \quad y = \frac{\widehat{y}}{\widehat{x}}x .$$



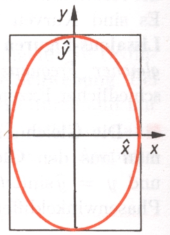

Dieses ist die Gleichung einer Geraden mit einer Neigung

$$\varepsilon = \arctan(\widehat{y}/\widehat{x}) .$$

▶ $\boldsymbol{\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}}$

Die Bahngleichung vereinfacht sich zu

$$\frac{x^2}{\widehat{x}^2} + \frac{y^2}{\widehat{y}^2} = 1 .$$

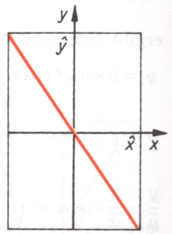



Dies ist die Gleichung einer Ellipse, deren Achsen mit den Koordinatenachsen zusammenfallen.

▶ $\boldsymbol{\Delta\varphi = \pi}$

Aus der Bahngleichung folgt

$$y = -\frac{\widehat{y}}{\widehat{x}}x .$$

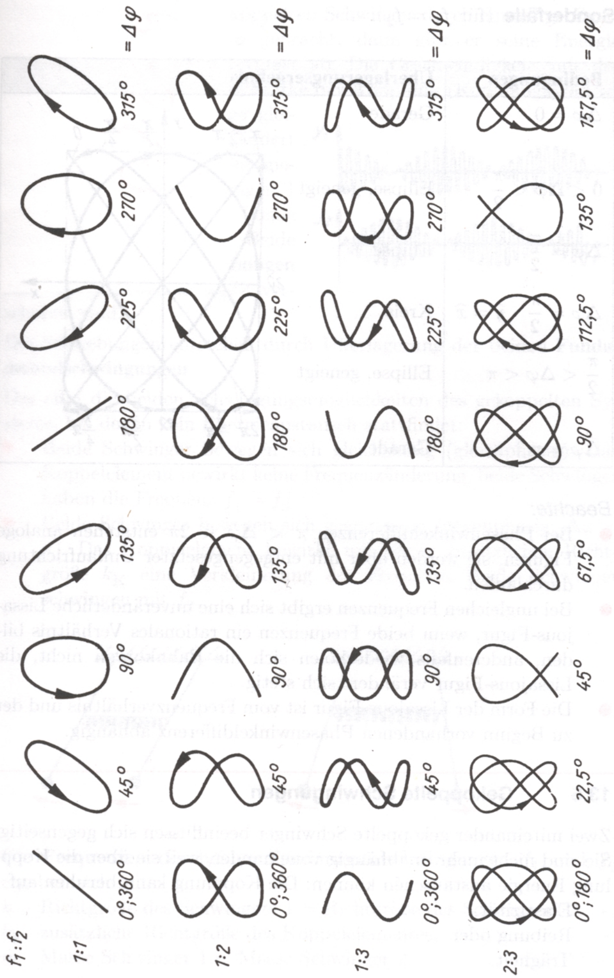



Dies ist wieder die Gleichung einer Geraden.

*Beachte:*

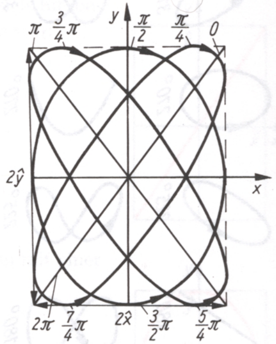
● Die mit $\Delta\varphi = \pi/2$ entstehende Ellipse ist bei Amplitudengleichheit ($\widehat{x} = \widehat{y}$) ein Kreis (**zirkulare Schwingung**).





**Sonderfälle** (für $f_1 = f_2$):

| **Bedingungen** | **Überlagerungsergebnis** |
|---|---|
| $\Delta\varphi = 0$ | Gerade |
| $0 < \Delta\varphi < \frac{\pi}{2}$ | Ellipse, geneigt |
| $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ | Ellipse |
| $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \hat{y} = \hat{x}$ | Kreis |
| $\frac{\pi}{2} < \Delta\varphi < \pi$ | Ellipse, geneigt |
| $\Delta\varphi = \pi$ | Gerade |




*Beachte:*

- Bei Phasenwinkeldifferenzen $\pi < \Delta\varphi < 2\pi$ entstehen analoge Figuren, sie werden aber mit entgegengesetzter Umlaufrichtung durchlaufen.
- Bei ungleichen Frequenzen ergibt sich eine unveränderliche Lissajous-Figur, wenn beide Frequenzen ein rationales Verhältnis bilden, anderenfalls wiederholen sich die Bahnkurven nicht, die Lissajous-Figur verändert sich stetig.
- Die Form der Lissajous-Figur ist vom Frequenzverhältnis und der zu Beginn vorhandenen Phasenwinkeldifferenz abhängig.

## 13.6 Gekoppelte Schwingungen

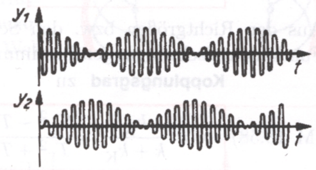
Zwei miteinander gekoppelte Schwinger beeinflussen sich gegenseitig. Sie sind nicht mehr unabhängig voneinander, weil sie über die Kopplung Energie austauschen können. Die Kopplung kann beruhen auf

- Elastizität,
- Reibung oder
- Trägheit.





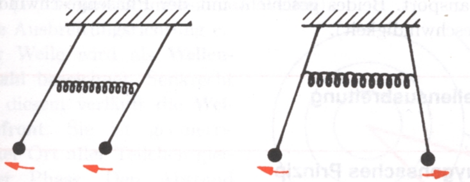
Wird einer der beiden gekoppelten Schwinger durch einmalige Energiezufuhr zum Schwingen gebracht, dann gibt er seine Energie allmählich an den 2. Schwinger ab. Die Geschwindigkeit, mit der dies erfolgt, hängt von der Stärke der Kopplung (Kopplungsgrad $\varkappa$) ab. Haben beide Schwinger gleiche Frequenz $f_0$, dann ändert sich die Richtung des Energieflusses erst, wenn Schwinger 1 zur Ruhe gekommen ist (keine Energie mehr besitzt). Beide Schwinger führen **Schwebungen** aus, die zeitlich um $T_S/2$ verschoben sind.




Die Schwebungen entstehen durch Überlagerung der beiden **Fundamentalschwingungen**.

Das sind die beiden Schwingungsmöglichkeiten des gekoppelten Systems, bei denen kein Energieaustausch stattfindet:

- Beide Schwinger bewegen sich gleichsinnig (gleichphasig). Das Koppelelement bewirkt keine Frequenzänderung, beide Schwinger haben die Frequenz $f_1 = f_0$.
- Beide Schwinger bewegen sich gegensinnig (gegenphasig; $\Delta\varphi = \pi$). Das Koppelelement bewirkt mit seiner zusätzlichen Richtgröße $k_K$ eine Verkleinerung der Frequenz. Beide Schwinger schwingen mit $f_2$.



Die **Frequenzen** der beiden Fundamentalschwingungen $f_1$ und $f_2$ ergeben sich mit

$k$ Richtgröße des Schwingers 1 = Richtgröße des Schwingers 2,
$k_K$ zusätzliche Richtgröße des Koppelelementes,
$m$ Masse Schwinger 1 = Masse Schwinger 2

zu

(M 13.57)
$$\boxed{\begin{aligned} f_1 = f_0 &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \\ f_2 &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k+2k_\mathrm{K}}{m}} \end{aligned}}$$

| | $f$ | $k$ | $m$ | $T$ |
|---|---|---|---|---|
| SI | $\mathrm{Hz} = \frac{1}{\mathrm{s}}$ | $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}$ | kg | s |

Aus den Richtgrößen bzw. den Schwingungsdauern $T = 1/f$ der Fundamentalschwingungen bestimmt sich der

**Kopplungsgrad** zu

(M 13.58)
$$\boxed{\varkappa = \frac{k_\mathrm{K}}{k + k_\mathrm{K}} = \frac{{T_1}^2 - {T_2}^2}{{T_1}^2 + {T_2}^2} = \frac{{f_2}^2 - {f_1}^2}{{f_2}^2 + {f_1}^2}}$$

*Beachte:*

- (M 13.57) und (M 13.58) gelten nur, wenn beide Schwinger gleiche Masse, Eigenfrequenz und Richtgröße haben.

# 14 Mechanische Wellen

Eine mechanische Welle ist ein Schwingungsvorgang in einem ausgedehnten **Medium**. Dieses besteht aus einer Vielzahl von schwingungsfähigen Teilchen, die alle miteinander gekoppelt sind. Wird eines dieser Teilchen zum Schwingen angeregt, so wird es zum Zentrum einer sich ausbreitenden Wellenbewegung. Kinematisches Kennzeichen ist das Wandern der Schwingungsphase, dynamisches Kennzeichen der Energietransport. Beides geschieht mit der Phasengeschwindigkeit (Wellengeschwindigkeit).

## 14.1 Wellenausbreitung

### 14.1.1 Huygenssches Prinzip

Die Erscheinungen der Wellenausbreitung lassen sich leicht erklären und deuten, wenn man ihnen das Huygenssche Prinzip zugrunde legt.

> Jeder von einer Wellenbewegung erfaßte Punkt eines Mediums wird selbst zum Ausgangspunkt einer neuen Welle, einer Elementarwelle.