UNIVERSITÄT LEIPZIG

Institut für Informatik

Abt. Technische Informatik
Gerätebeauftragter
Dr. Hans-Joachim Lieske
Tel. [49] - 0341 - 97 32213
lieske@informatik.uni-leipzig.de

Aufgaben zum Fach Technische Informatik

1. Semester / Wintersemester 1998/99

Aufgabe 1.5.1. - Schaltverhalten eines RC-Tiefpasses

Gegeben ist folgende Schaltung:

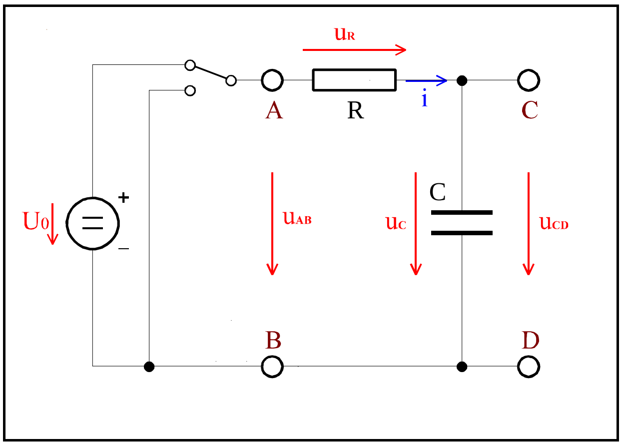


Abb. 1

U_0 = 4V

R = 1,5kΩ

C = 100nF

f_1 = 100Hz

f_2 = 1kHz

f_3 = 10kHz

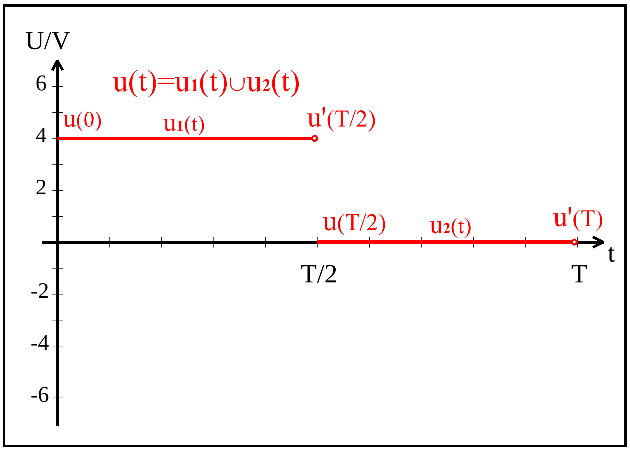


Abb. 2

$u_1(t)$ = 4V für t∈ [0,T/2)

$u_2(t)$ = 0V für t∈ [T/2,T)

Der Inhalt der Aufgabe ist die Untersuchung des Schaltverhaltens eine RC-Tiefpasses mittels eines Rechteckgenerators. Ein Rechteckgenerator kann durch eine Gleichspannungsquelle und einen Schalter simuliert werden.

Aufgaben:

Bestimmen Sie die Spannung über den Kondensator $u_C(t)$, über den Widerstand $u_R(t)$ und den Strom i(t) für die Schrittweiten von 0,1·T von 0 bis T. Die Berechnungen erfolgen nur für die erste Periode.

1. Bestimmen Sie die Periodendauern T_1 für f_1, T_2 für f_2, T_3 für f_3.
2. Bestimmen Sie die Spannungen über den Kondensator und den Widerstand sowie den Strom für die verschiedenen Frequenzen für die Ein- und Ausschaltphase.

2.1 Bestimmen Sie die Spannungen $u_{C1}(t)$, $u_{R1}(t)$ und den Strom $i_1(t)$ für die Frequenz f_1.
2.2 Bestimmen Sie die Spannungen $u_{C2}(t)$, $u_{R2}(t)$ und den Strom $i_2(t)$ für die Frequenz f_2.
2.3 Bestimmen Sie die Spannungen $u_{C3}(t)$, $u_{R3}(t)$ und den Strom $i_3(t)$ für die Frequenz f_3.

3. Zeichnen Sie unter Zuhilfenahme der Werte die Kurven für den Zeitverlauf.

Die Spannung u(t)=u'(T/2) ist die Spannung im allerletzten Zeitpunkt vor dem Umschalten des Schalters. Die Spannung u(t)=u(T/2) ist dagegen die Spannung sofort nach dem Umschalten des Schalters (ε-Umgebung). In beiden Fällen kann mit der Zeit t=T/2 gearbeitet werden, da diese Zeiten sehr nahe beieinander liegen.
Analog ist es mit u(t)=u'(T).
Beachten Sie bitte, daß bei der vorliegenden Schaltung die Spannung über dem Widerstand und dem Kondensator stetisch verläuft d.h., daß die Spannung u_c für u(t)=u'(T/2) [kurz vor dem Umschalten des Schalters] und für u(t)=u(T/2) [nach dem Umschalten des Schalters] gleich ist, der Strom aber an der Stelle t=T/2 einen Sprung vollführt da der Eingang kurzgeschlossen wird und der Kondensator sich entlädt. Das bedeutet, daß der Strom für u(t)=u'(T/2) [kurz vor dem Umschalten des Schalters] und für u(t)=u(T/2) [nach dem Umschalten des Schalters] berechnet werden muß.
Beim Umschalten ist die zum Zeitpunkt des Umschaltens am Kondensator anliegende Spannung für U_0 zu verwenden. Bei höheren Frequenzen kann es vorkommen, daß nach der Zeit T/2 der Kondensator noch nicht voll aufgeladen ist. Die Zeit ist für den Zeitpunkt des Umschaltens =0 bzw. t ist als t_a=t-T/2 zu substituieren. Es gelten dann die Formeln für das Abschalten. Bei Schwierigkeiten schauen Sie bitte die Vorlesungsscripte TI1T5 - S.86 - S.91.

Beispiel für f_3 = 10kHz

f_3 = 10kHz - T_3 = 100µs			
t	$u_{c3}(t)$	$u_{R3}(t)$	$i_3(t)$
10µs			
20µs			
30µs			
40µs			
(u') (50µs)			
(u) t_a=50µs-50µs=0µs			
t_a=60µs-50µs=10µs			
t_a=70µs-50µs=20µs			
t_a=80µs-50µs=30µs			
t_a=90µs-50µs=40µs			
t_a=100µs-50µs=50µs			

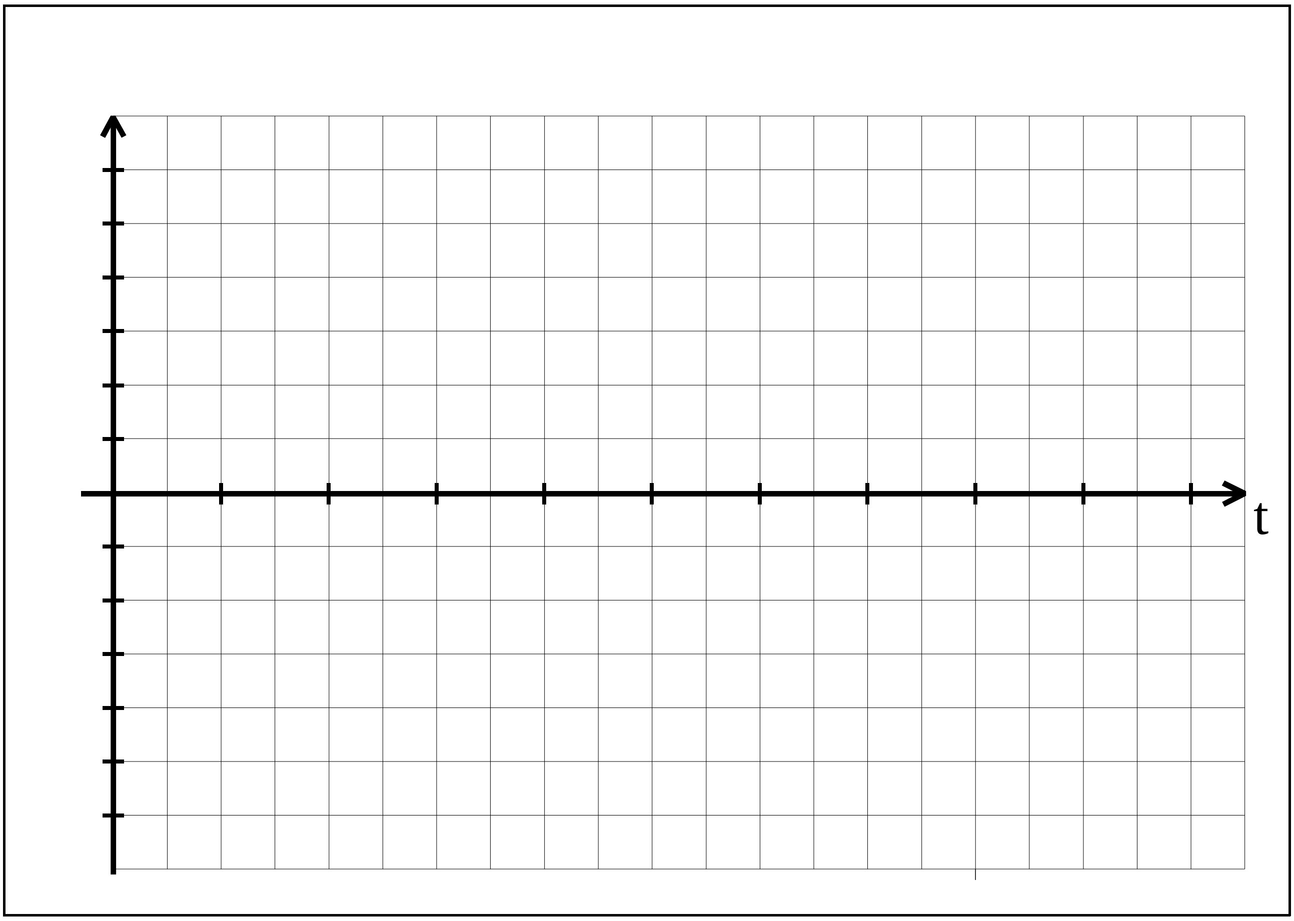


Abb. 3

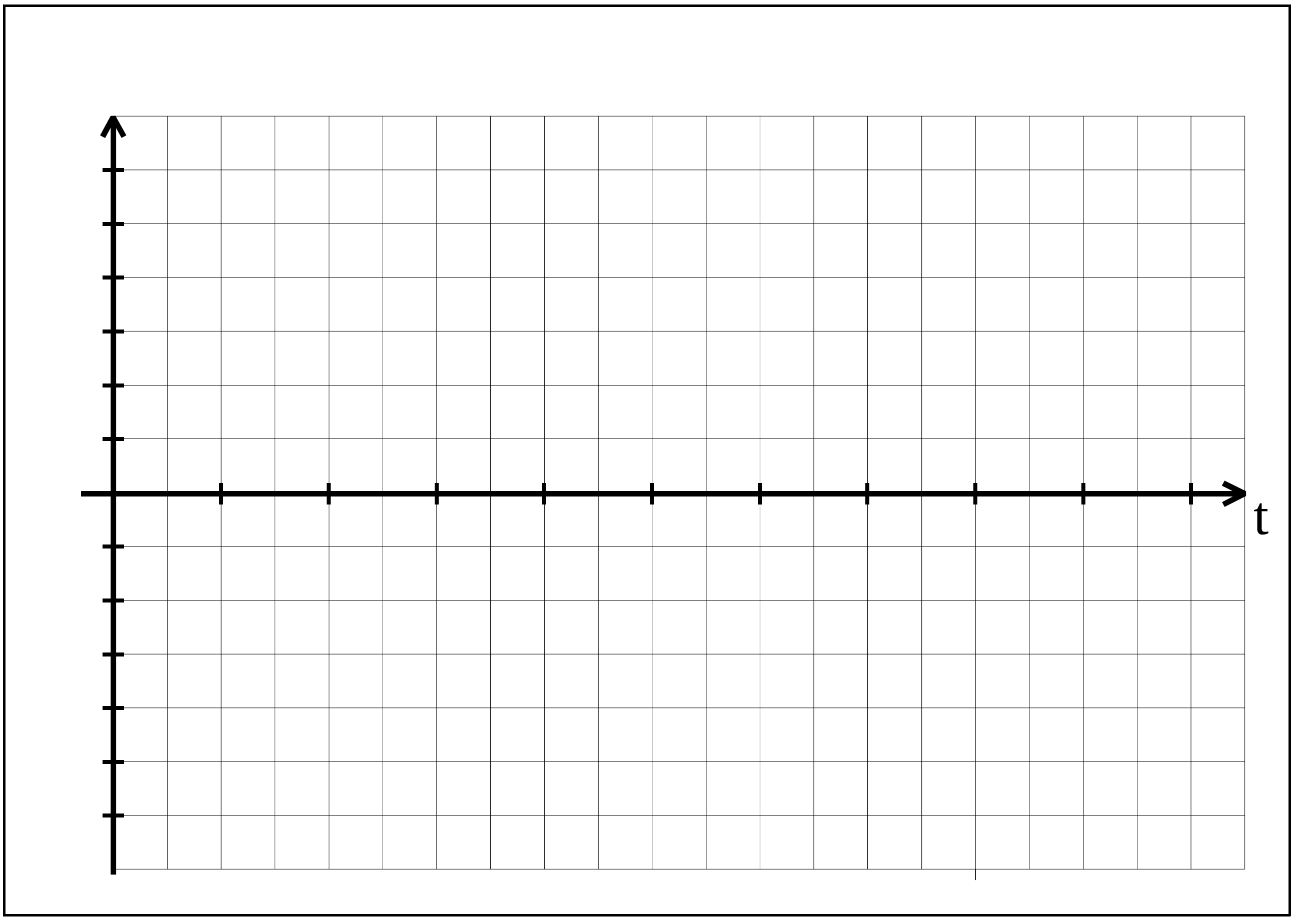


Abb. 4

Lösungen:

Lösung: Aufgabe 1.5.1.

1. Bestimmen Sie die Periodendauern T_1 für f_1, T_2 für f_2,T_3 für f_3.

   $T_1 = 1/f_1$

   $= 1/100$ Hz $= 0{,}01$ s $= 10$ ms

   $T_2 = 1/f_2$

   $= 1/1$ kHz $= 0{,}001$ s $= 1$ ms

   $T_3 = 1/f_3$

   $= 1/10$ kHz $= 0{,}0001$s $= 100$ µs

2. Bestimmen Sie die Spannungen über den Kondensator und den Widerstand sowie den Strom für die verschiedenen Frequenzen für die Ein- und Ausschaltphase.

1. Einschaltphase

$t_e = t$ für $t \in [0 , T/2)$

$$\boxed{i(t_e) = I_0 \cdot e^{-\frac{t_e}{\tau}} \quad mit \quad \tau = R \cdot C \quad und \quad I_0 = \frac{U_0}{R}}$$

$$\boxed{u_C(t_e) = U_0 - i(t_e) \cdot R = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t_e}{\tau}} \right) \quad mit \quad \tau = R \cdot C}$$

$$\boxed{u_R(t_e) = i(t_e) \cdot R = I_0 \cdot e^{-\frac{t_e}{\tau}} \cdot R = U_0 - u_C(t_e) \quad mit \quad \tau = R \cdot C \quad und \quad I_0 = \frac{U_0}{R}}$$

2. Ausschaltphase

$t_a = t - T/2$ für $t \in [T/2 , T)$

$$\boxed{i(t_a) = -I_{0C} \cdot e^{-\frac{t_a}{\tau}} \quad mit \quad \tau = R \cdot C \quad und \quad I_{0C} = \frac{U_{0C}}{R}}$$

$$\boxed{u_C(t_a) = -i(t_a) \cdot R = U_{0C} \cdot e^{-\frac{t_a}{\tau}} \quad mit \quad \tau = R \cdot C}$$

$$\boxed{u_R(t_a) = -u_C(t_a) = i(t_a) \cdot R = -U_{0C} \cdot e^{-\frac{t_a}{\tau}} \quad mit \quad \tau = R \cdot C}$$

2.1 Bestimmen Sie die Spannungen $u_{C1}(t)$, $u_{R1}(t)$ und den Strom $i_1(t)$ für die Frequenz f_1.

2.1.1 Einschaltvorgang

$\tau = R \cdot C = 1{,}5\ k\Omega \cdot 100\ nF = 150\ \mu s$

$i(t_e) = I_0 \cdot \exp(-t_e/\tau)$

$u_C(t_e) = U_0 - i(t_e) \cdot R$

$u_R(t_e) = U_0 - u_C(t_e)$

$T = 1/f = 1/100\ Hz = 10\ ms$

$I_0 = U_0/R = 4V/1{,}5\ k\Omega = 2{,}66667\ mA$

2.1.2 Ausschaltvorgang

$\tau = R \cdot C = 1{,}5\ k\Omega \cdot 100\ nF = 150\ \mu s$

$i(t_a) = - I_{0C} \cdot \exp(-t_e/\tau)$

$u_C(t_a) = - i(t_a) \cdot R$

$u_R(t_a) = - u_C(t_a)$

$T = 1/f = 1/100\ Hz = 10\ ms$

$U_{0C} = 4V$

$I_{0C} = U_{0C}/R = 4V/1{,}5\ k\Omega = 2{,}6667\ mA$

f_3 = 100 Hz - T_3 = 10 ms			
t	**$u_{c1}(t)$**	**$u_{R1}(t)$**	**$i_1(t)$**
t_e= 0 ms	0 V	4V	2,66667 mA
t_e= 1 ms	3,99491 V	5,0905 4 mV	3,39369 µA
t_e= 2 ms	≈ 3,9999 V	6,47839 µV	4,31892 nA
t_e= 3 ms	≈ 4 V	8,24461 nV	5,49641 pA
t_e= 4 ms	≈ 4 V	10,4924 pV	6,99492 fA
(u') (5 ms)	≈ 4V	13,353 fV	8,90197 aA
(u) t_a=5 ms-5 ms= 0 ms	**4 V**	-4V	-2,66667 mA
t_a=6 ms-5 ms= 1 ms	5,0905 4 mV	-5,0905 4 mV	-3,39369 µA
t_a=7 ms-5 ms= 2 ms	6,47839 µV	-6,47839 µV	-4,31892 nA
t_a=8 ms-5 ms= 3 ms	8,24461 nV	-8,24461 nV	-5,49641 pA
t_a=9 ms-5 ms= 4 ms	10,4924 pV	- 10,4924 pV	-6,99492 fA
t_a=10 ms-5 ms= 5 ms	13,353 fV	-13,353 fV	-8,90197 aA

2.2 Bestimmen Sie die Spannungen $u_{C2}(t)$, $u_{R2}(t)$ und den Strom $i_2(t)$ für die Frequenz f_2.

2.2.1 Einschaltvorgang

$\tau = R \cdot C = 1{,}5\ k\Omega \cdot 100\ nF = 150\ \mu s$

$i(t_e) = I_0 \cdot \exp(-t_e/\tau)$

$u_C(t_e) = U_0 - i(t_e) \cdot R$

$u_R(t_e) = U_0 - u_C(t_e)$

$T = 1/f = 1/1\ kHz = 1\ ms$

$I_0 = U_0/R = 4V/1{,}5\ k\Omega = 2{,}66667\ mA$

2.2.2 Ausschaltvorgang

$\tau = R \cdot C = 1{,}5\ k\Omega \cdot 100\ nF = 150\ \mu s$

$i(t_a) = - I_{0C} \cdot \exp(-t_e/\tau)$

$u_C(t_a) = - i(t_a) \cdot R$

$u_R(t_a) = - u_C(t_a)$

$T = 1/f = 1/1\ kHz = 1\ ms$

U_{0C} = **3,8573V**

$I_{0C} = U_{0C}/R = 3{,}8573V/1{,}5\ k\Omega$ = **2,57153 mA**

f_3 = 1 kHz - T_3 = 1 ms			
t	**$u_{c3}(t)$**	**$u_{R3}(t)$**	**$i_3(t)$**
t_e= 0 µs	0 V	4V	2,66667 mA
t_e= 100 µs	1,94633 V	2,05367 V	1,36911 mA
t_e= 200 µs	2,94561 V	1,05439 V	702,926 µA
t_e= 300 µs	3,45866 V	541,341 mV	360,894 µA
t_e= 400 µs	3,72207V	277,934 mV	185,289 µA
(u') (500 µs)	**3,8573V**	142,696 mV	9,51306 nA
(u) t_a=500µs-500µs= 0 µs	3,8573V	**-2,57153 mA**	**-2,57153 mA**
t_a=600µs-500µs= 100 µs	1,98041 V	-1,98041 V	-1,32027 mA
t_a=700µs-500µs= 200 µs	1,01677 V	-1,01677 V	-677,85 µA
t_a=800µs-500µs= 300 µs	522,029 mV	-522,029 mV	-348,02 µA
t_a=900µs-500µs= 400 µs	268,019 mV	-268,019 mV	-178,679 µA
t_a=1000µs-500µs= 500 µs	137,605 mV	- 137,605 mV	-9,1737 nA

2.3 Bestimmen Sie die Spannungen $u_{C3}(t)$, $u_{R3}(t)$ und den Strom $i_3(t)$ für die Frequenz f_3.

2.3.1 Einschaltvorgang

$\tau = R \cdot C = 1{,}5\ k\Omega \cdot 100\ nF = 150\ \mu s$

$i(t_e) = I_0 \cdot \exp(-t_e/\tau)$

$u_C(t_e) = U_0 - i(t_e) \cdot R$

$u_R(t_e) = U_0 - u_C(t_e)$

$T = 1/f = 1/10\ kHz = 100\ \mu s$

$I_0 = U_0/R = 4V/1{,}5\ k\Omega = 2{,}66667\ mA$

$i_{3e}(0\mu s)=2{,}66667\ mA \cdot \exp(-(0/150\ \mu s) = 2{,}66667\ mA \cdot \exp(\ 0\ ) = 2{,}66667\ mA$
$u_{C3e}(0\mu s)=4V- 2{,}66667\ mA \cdot 1{,}5k\Omega = 4\ V - 4{,}00000\ V = 0\ V$
$u_{R3e}(0\mu s)=4V- 0V = 4V$

$i_{3e}(10\mu s)=2{,}66667\ mA \cdot \exp(-(10/150\ \mu s) = 2{,}66666\ mA \cdot \exp(-0{,}066667) = 2{,}66666\ mA \cdot 0{,}935507 = 2{,}49469\ mA$
$u_{C3e}(10\mu s)=4V- 2{,}49469\ mA \cdot 1{,}5k\Omega = 4V - 3{,}742028\ V= 0{,}257972\ V$
$u_{R3e}(10\mu s)=4V- 0{,}25797\ V = 3{,}74203\ V$

$i_{3e}(20\mu s)=2{,}66667\ mA \cdot \exp(-(20/150\ \mu s) = 2{,}66666\ mA \cdot \exp(-0{,}133333) = 2{,}66666\ mA \cdot 0{,}875173 = 2{,}33380\ mA$
$u_{C3e}(20\mu s)=4V- 2{,}33380\ mA \cdot 1{,}5k\Omega = 4V - 3{,}50069\ V = 0{,}49931\ V$
$u_{R3e}(20\mu s)=4V- 0{,}49931\ V = 3{,}50069\ V$

$i_{3e}(30\mu s)=2{,}66667\ mA \cdot \exp(-(30/150\ \mu s) = 2{,}66666\ mA \cdot \exp(-0{,}2) = 2{,}66666\ mA \cdot 0{,}81873 = 2{,}18328\ mA$
$u_{C3e}(30\mu s)=4V- 2{,}18328\ mA \cdot 1{,}5k\Omega = 4V - 3{,}27492\ V = 0{,}72508V$
$u_{R3e}(30\mu s)=4V- 0{,}72508V = 3{,}274923\ V$

$i_{3e}(40\mu s)=2{,}66667\ mA \cdot \exp(-(40/150\ \mu s) = 2{,}66666\ mA \cdot \exp(-0{,}266666) = 2{,}66666\ mA \cdot 0{,}76593 = 2{,}04248\ mA$
$u_{C3e}(40\mu s)=4V - 2{,}04248\ mA \cdot 1{,}5k\Omega = 4V - 3{,}06371\ V = 0{,}93629V$
$u_{R3e}(40\mu s)=4V - 0{,}93629V = 3{,}06371\ V$

$i_{3e}(50\mu s)=2{,}66667\ mA \cdot \exp(-(50/150\ \mu s) = 2{,}66666\ mA \cdot \exp(-0{,}333333) = 2{,}66666\ mA \cdot 0{,}71653 = 1{,}91750\ mA$
$u_{C3e}(50\mu s)=4V - 1{,}91750\ mA \cdot 1{,}5k\Omega = 4V - 2{,}86613\ V =$ **1,13387V**
$u_{R3e}(50\mu s)=4V - 1{,}13387V = 2{,}86613V$

2.3.2 Ausschaltvorgang

$\tau = R \cdot C = 1{,}5\ k\Omega \cdot 100\ nF = 150\ \mu s$

$i(t_a) = - I_{0C} \cdot \exp(-t_e/\tau)$

$u_C(t_a) = - i(t_a) \cdot R$

$u_R(t_a) = - u_C(t_a)$

$T = 1/f = 1/10\ kHz = 100\ \mu s$

$U_{0C} =$ **1,13387V**

$I_{0C} = U_{0C}/R = 1{,}13387V/1{,}5\ k\Omega =$ **0,75591 mA**

$i_{3a}(0\mu s)$=- 0,75591 mA · exp(-(0/150 µs) = -0,75591 mA · exp(0) = -0,75591 mA · 1 = -0,75591 mA
$u_{C3a}(0\mu s)$= 0,75591 mA · 1,5 kΩ = 1,13387 V
$u_{R3a}(0\mu s)$= - 1,13387 V

$i_{3a}(10\mu s)$=- 0,75591 mA · exp(-(10/150 µs) = -0,75591 mA · exp(-0,066667) = -0,75591 mA · 0,935507 = - 0,70716 mA
$u_{C3a}(10\mu s)$= 0,70716 mA · 1,5 kΩ = 1,06074 V
$u_{R3a}(10\mu s)$= - 1,06074 V

$i_{3a}(20\mu s)$=- 0,75591 mA · exp(-(20/150 µs) = -0,75591 mA · exp(-0,133333) = -0,75591 mA · 0,87517 = - 0,66155 mA
$u_{C3a}(20\mu s)$= 0,66155 mA · 1,5 kΩ = 0,99233 V
$u_{R3a}(20\mu s)$= - 0,99233 V

$i_{3a}(30\mu s)$=- 0,75591 mA · exp(-(30/150 µs) = -0,75591 mA · exp(-0,2) = -0,75591 mA · 0,81873 = - 0,61888 mA
$u_{C3a}(30\mu s)$= 0,61888 mA · 1,5 kΩ = 0,92833 V
$u_{R3a}(30\mu s)$= - 0,92833 V

$i_{3a}(40\mu s)$=- 0,75591 mA · exp(-(40/150 µs) = -0,75591 mA · exp(-0,266666) = -0,75591 mA · 0,76593 = - 0,57897 mA
$u_{C3a}(40\mu s)$= 0,57897 mA · 1,5 kΩ = 0,86846 V
$u_{R3a}(40\mu s)$= - 0,86846 V

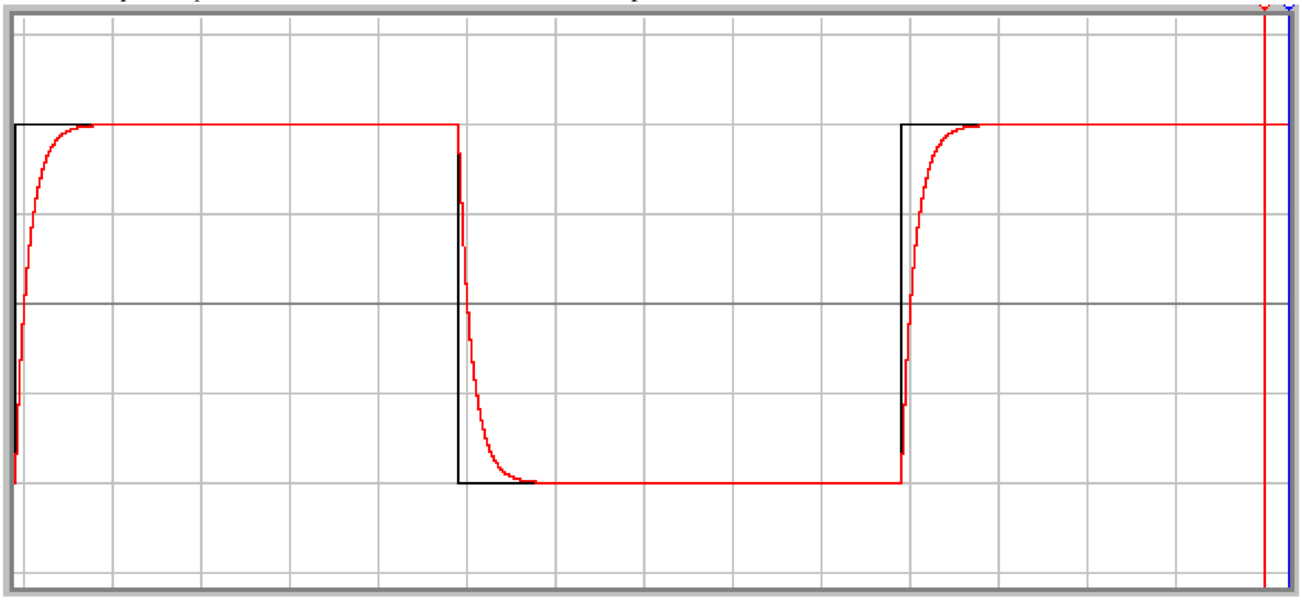
$i_{3a}(50\mu s)$=- 0,75591 mA · exp(-(50/150 µs) = -0,75591 mA · exp(-0,333333) = -0,75591 mA · 0,71653 = - 0,54163 mA
$u_{C3a}(50\mu s)$= 0,54163 mA · 1,5 kΩ = 0,81245 V
$u_{R3a}(50\mu s)$= - 0,81245 V

f_3 = 10kHz - T_3 = 100µs			
t	**$u_{c3}(t)$**	**$u_{R3}(t)$**	**$i_3(t)$**
t_e= 0 µs	0 V	4V	2,66667 mA
t_e= 10 µs	0,257972 V	3,74203 V	2,49469 mA
t_e= 20 µs	0,49931 V	3,50069 V	2,33380 mA
t_e= 30 µs	0,72508V	3,274923 V	2,18328 mA
t_e= 40 µs	0,93629V	3,06371 V	2,04248 mA
(u') (50 µs)	**1,13387V**	2,86613V	1,91750 mA
(u) t_a=50µs-50µs= 0 µs	1,13387 V	- 1,13387 V	-0,75591 mA
t_a=60µs-50µs= 10 µs	1,06074 V	- 1,06074 V	- 0,70716 mA
t_a=70µs-50µs= 20 µs	0,99233 V	- 0,99233 V	- 0,66155 mA
t_a=80µs-50µs= 30 µs	0,92833 V	- 0,86846 V	- 0,61888 mA
t_a=90µs-50µs= 40 µs	0,86846 V	- 0,86846 V	- 0,57897 mA
t_a=100µs-50µs= 50 µs	0,81245 V	- 0,81245 V	- 0,54163 mA

3. Zeichnen Sie unter Zuhilfenahme der Werte die Kurven für den Zeitverlauf.

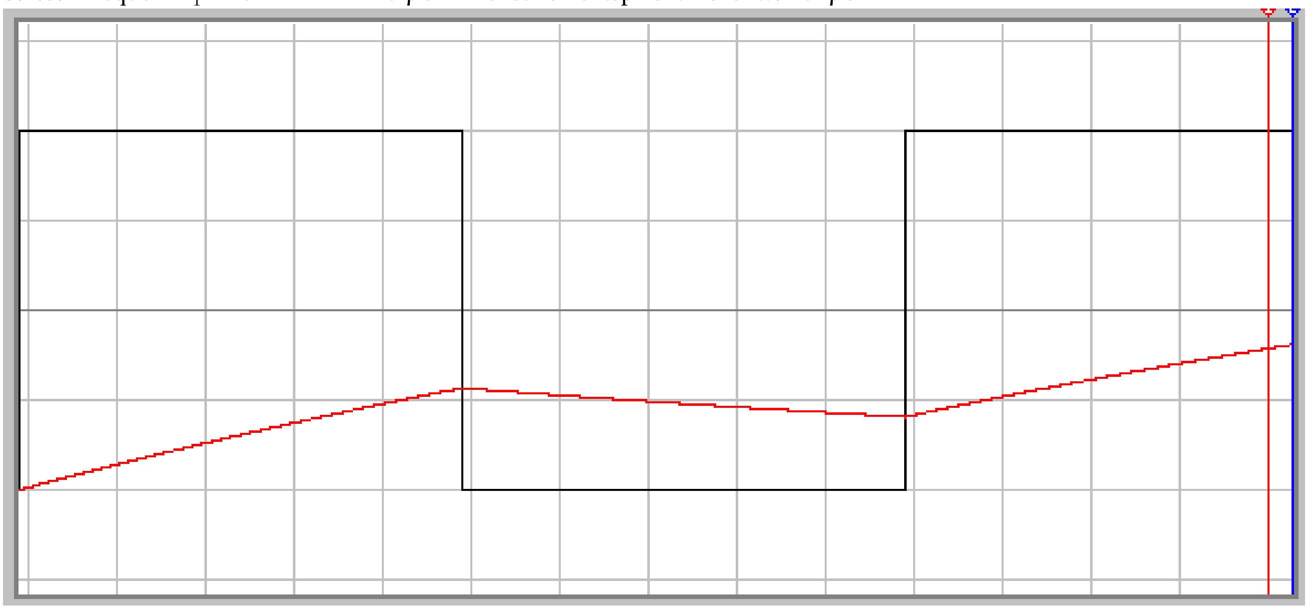
3.1. Eingangsspannung (schwarz) Spannung über dem Kondensator (rot)

3.1.1. Frequenz $f_1 = 100$ Hz - T = 10 ms - 1Teilstrich entspricht 1V bzw. 1ms



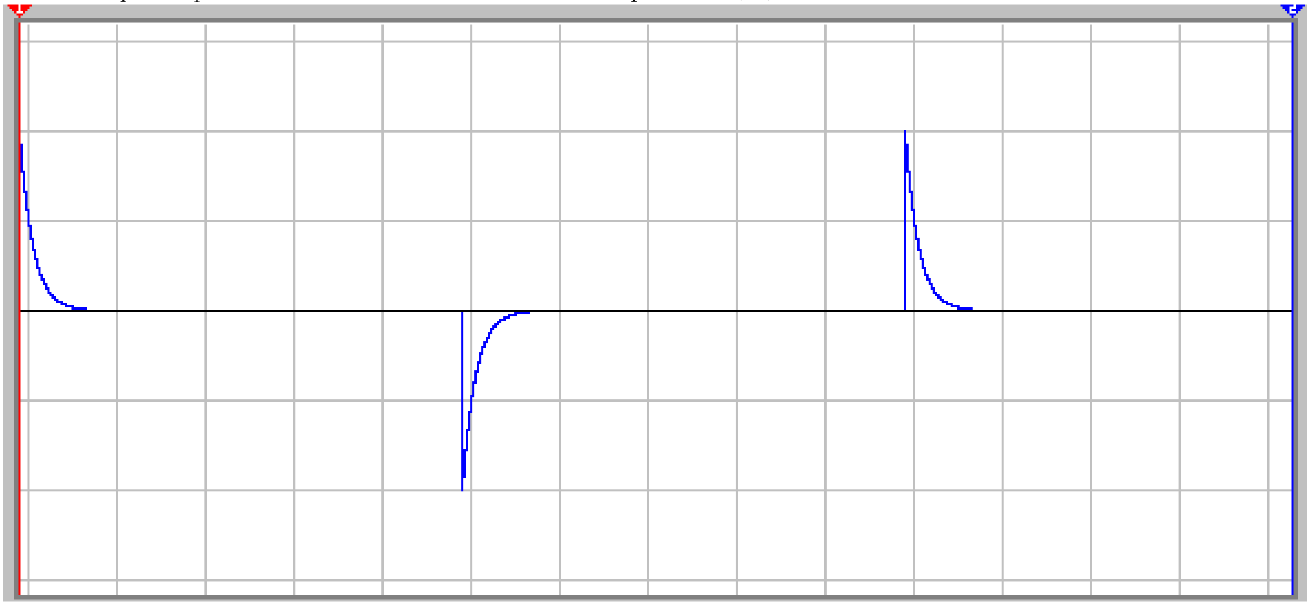
3.1.2. Frequenz $f_1 = 1$ kHz - T = 1 ms - 1Teilstrich entspricht 1V bzw. 100 µs

3.1.3. Frequenz $f_1 = 10$ kHz - T = 10 µs - 1Teilstrich entspricht 1V bzw. 10 µs

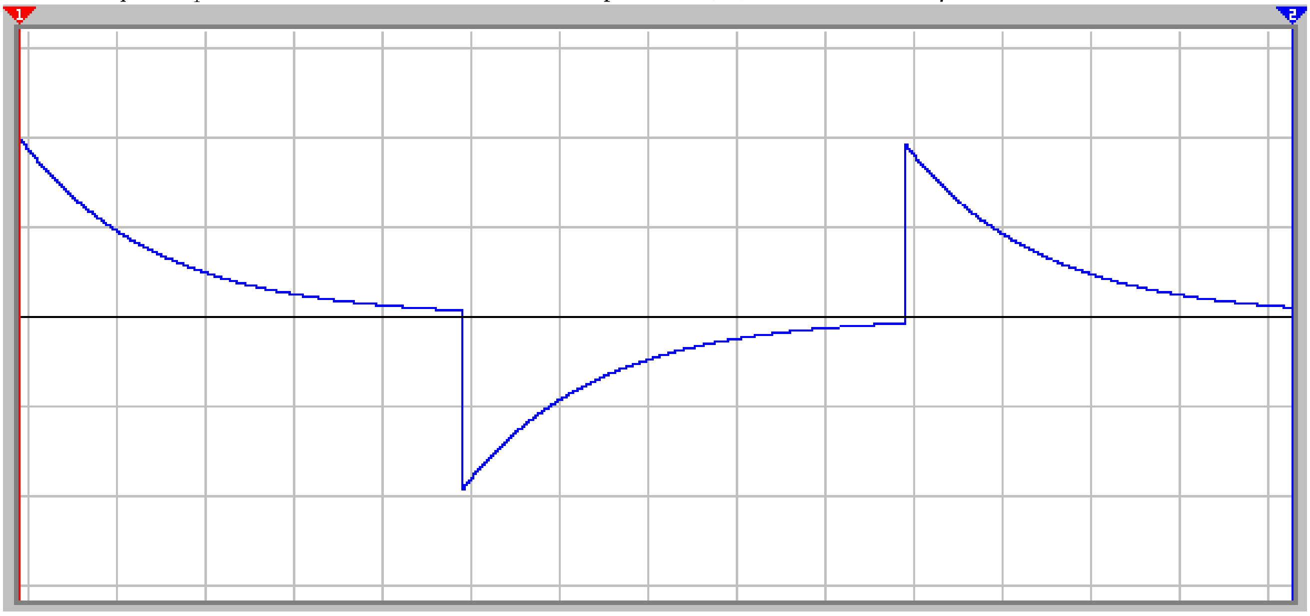


3.2. Spannung über den Widerstad (blau) - Strom durch den Widerstand die gleiche Form, nur andere Amplitude

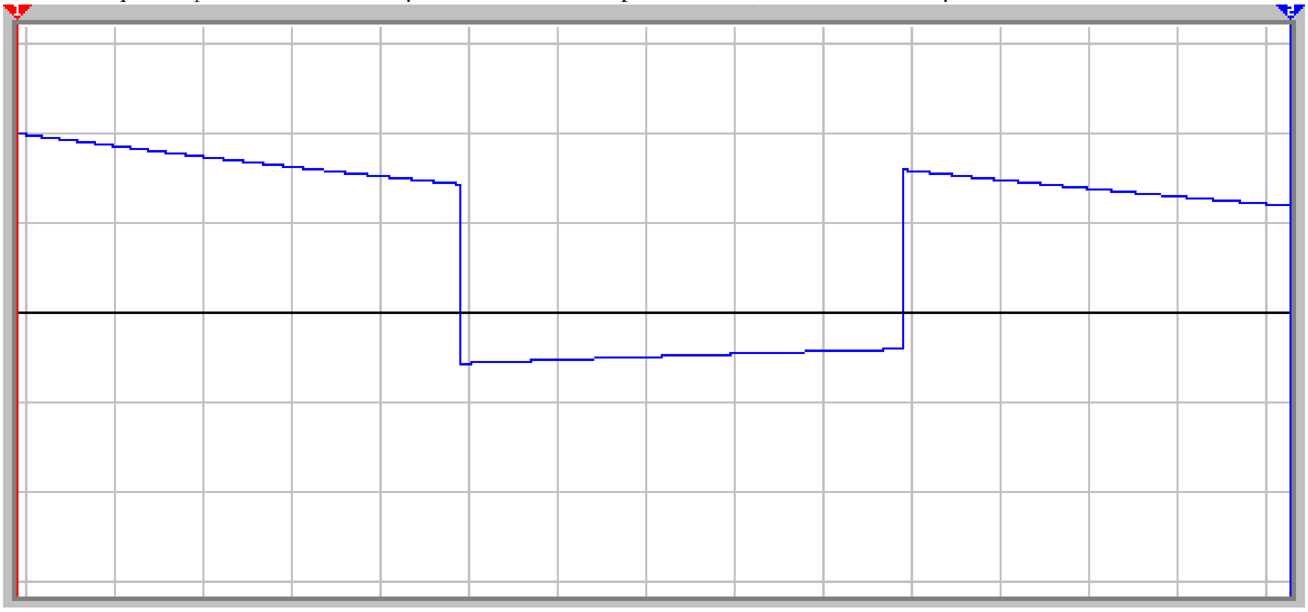
3.2.1. Frequenz f_1 = 100 Hz - T = 10 ms - 1Teilstrich entspricht 2 V; 1,33 mA bzw. 1ms



3.2.2. Frequenz f_1 = 1 kHz - T = 1 ms - 1Teilstrich entspricht 2 V; 1,33 mA bzw. 100 µs



3.2.3. Frequenz f_1 = 10 kHz - T = 10 µs - 1Teilstrich entspricht 2 V; 1,33 mA bzw. 10 µs

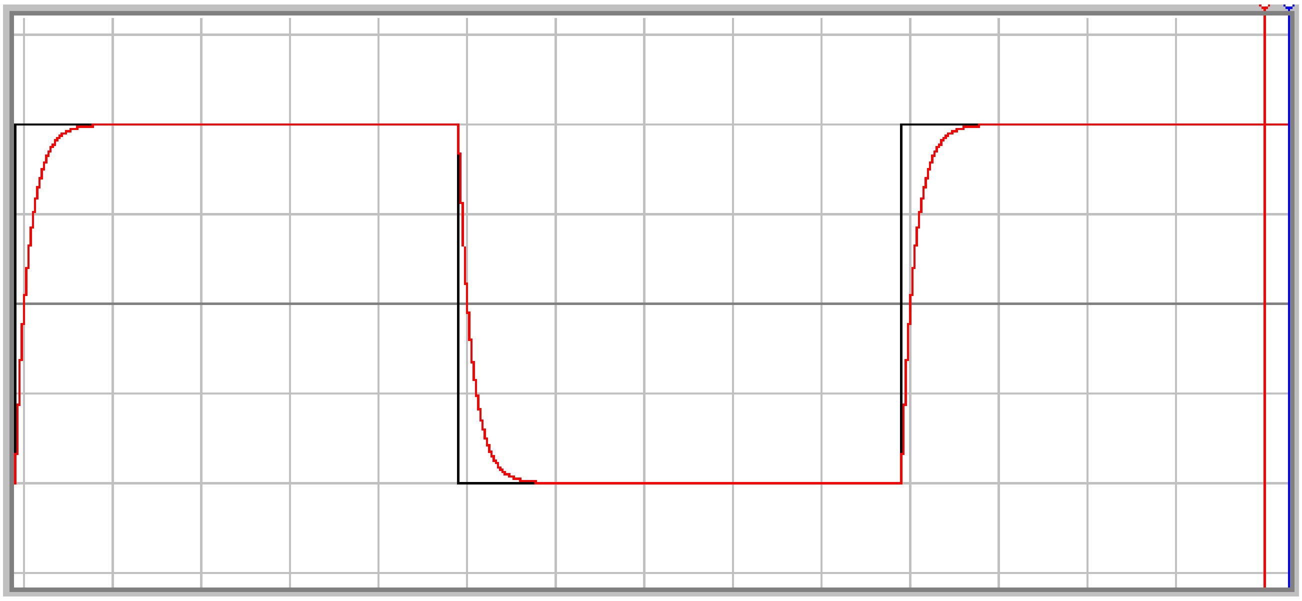


3.3. Vergleich von Strom und Spannung in Abhängigkeit von der Zeit

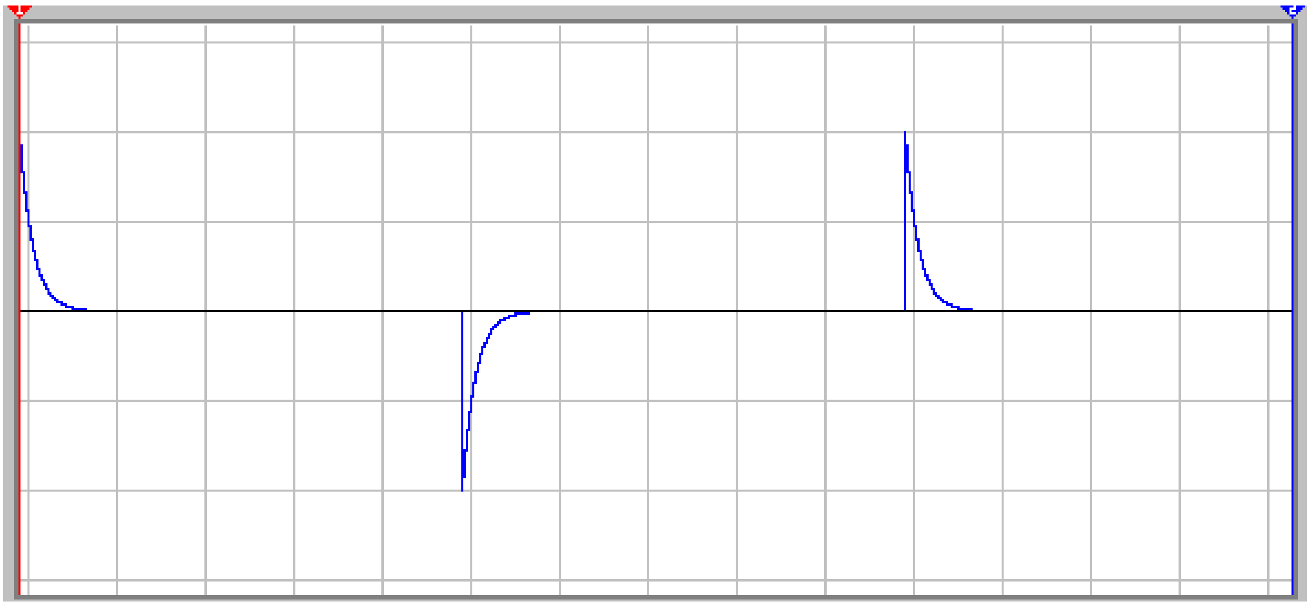
3.3.1. Frequenz = 100 Hz

Eingangsspannung (schwarz) Spannung über dem Kondensator (rot), Spannung über den Widerstad (blau) - Strom durch den Widerstand die gleiche Form, nur andere Amplitude

Frequenz f_1 = 100 Hz - T = 10 ms - 1Teilstrich entspricht 1V bzw. 1ms



Frequenz f_1 = 100 Hz - T = 10 ms - 1Teilstrich entspricht 2 V; 1,33 mA bzw. 1ms

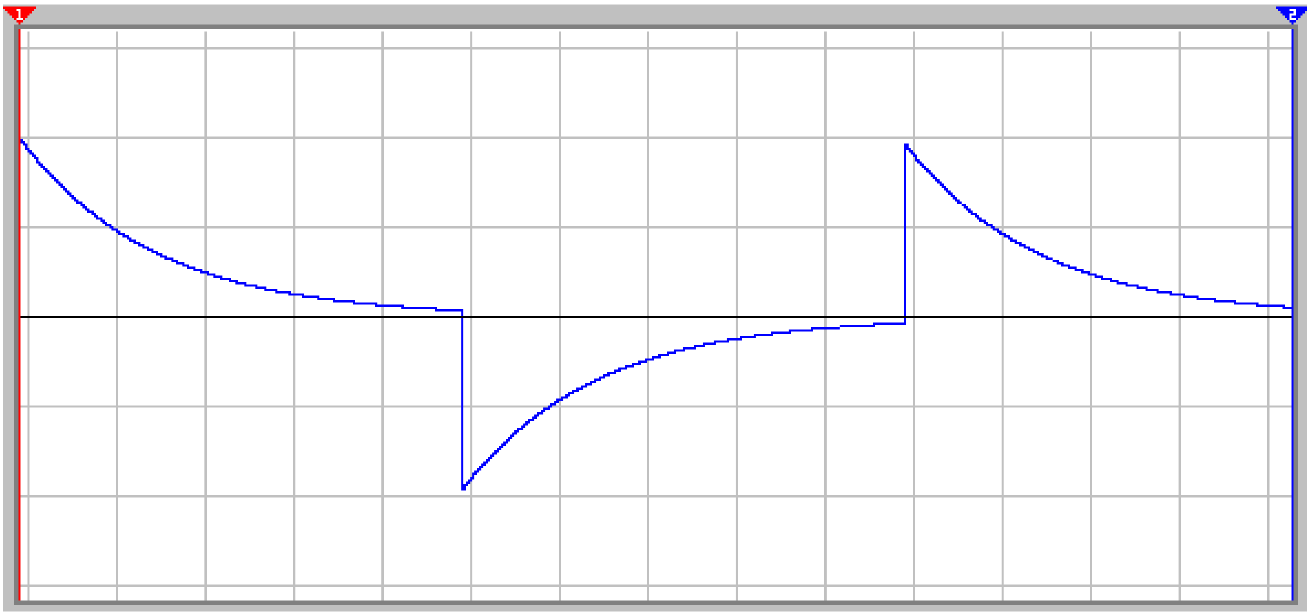


3.3.2. Frequenz = 1 kHz

Eingangsspannung (schwarz) Spannung über dem Kondensator (rot), Spannung über den Widerstad (blau) **-** Strom durch den Widerstand die gleiche Form, nur andere Amplitude

Frequenz f_1 = 1 kHz **-** T = 1 ms **-** 1Teilstrich entspricht 1V bzw. 100 µs

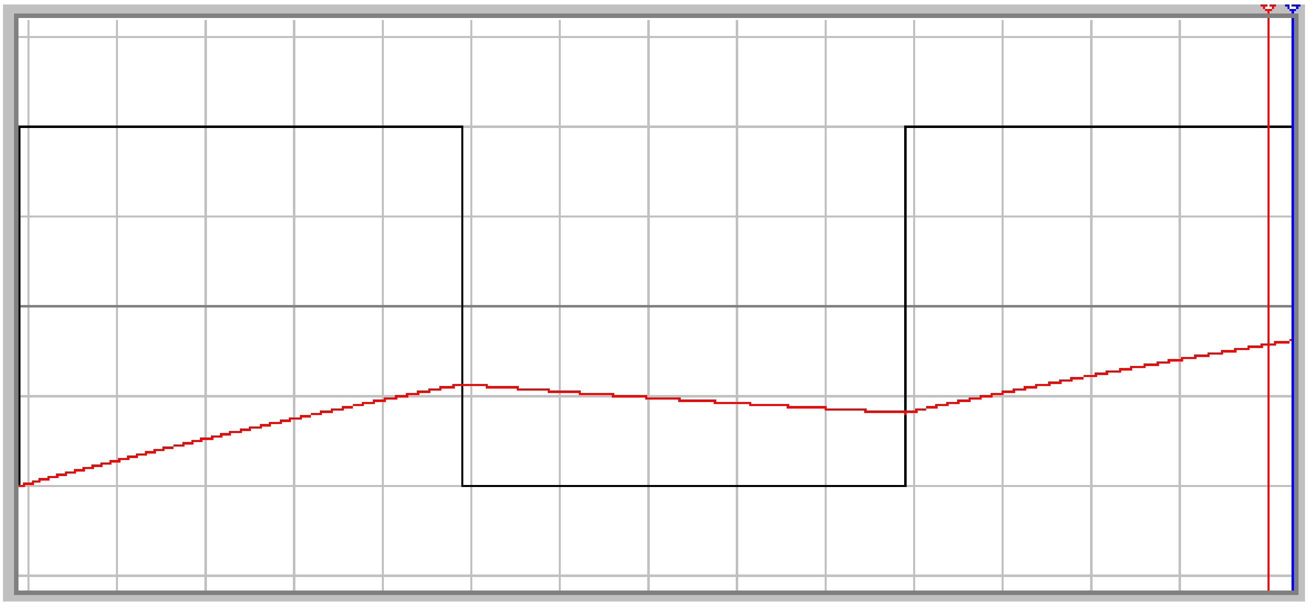
Frequenz f_1 = 1 kHz **-** T = 1 ms **-** 1Teilstrich entspricht 2 V; 1,33 mA bzw. 100 µs



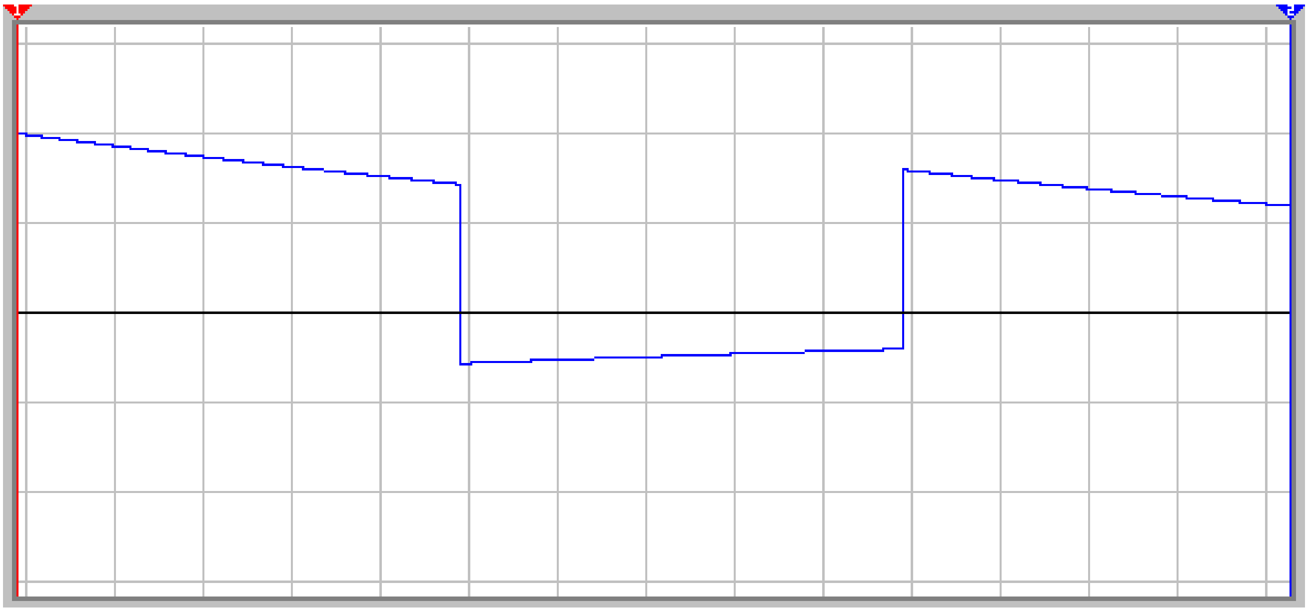
3.3.3. Frequenz = 10 kHz

Eingangsspannung (schwarz) Spannung über dem Kondensator (rot), Spannung über den Widerstad (blau) **-** Strom durch den Widerstand die gleiche Form, nur andere Amplitude

Frequenz f_1 = 10 kHz **-** T = 10 µs **-** 1Teilstrich entspricht 1V bzw. 10 µs



Frequenz f_1 = 10 kHz **-** T = 10 µs **-** 1Teilstrich entspricht 2 V; 1,33 mA bzw. 10 µs



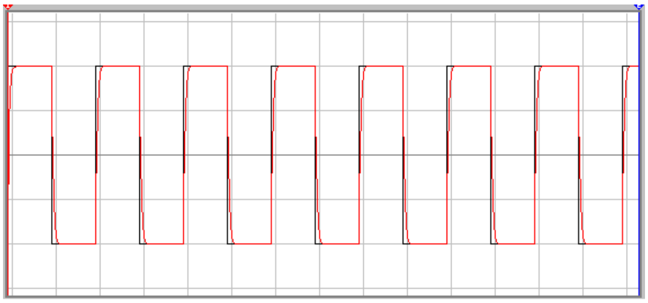
3.4. Vergleich der Impulse über 7 Perioden

3.4.1. Frequenz = 100 Hz

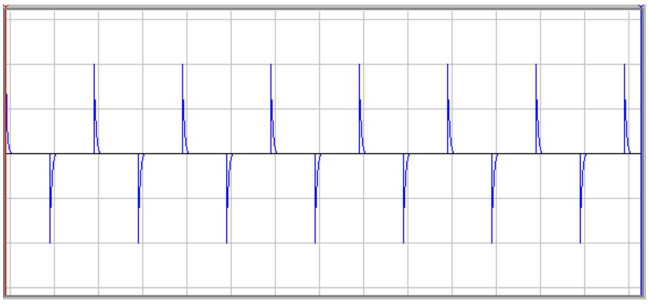
Eingangsspannung (schwarz) Spannung über dem Kondensator (rot), Spannung über den Widerstad (blau) - Strom durch den Widerstand die gleiche Form, nur andere Amplitude

Frequenz f_1 = 100 Hz - T = 10 ms

1Teilstrich entspricht 1V bzw. 5ms



1Teilstrich entspricht 2 V; 1,33 mA bzw. 5ms

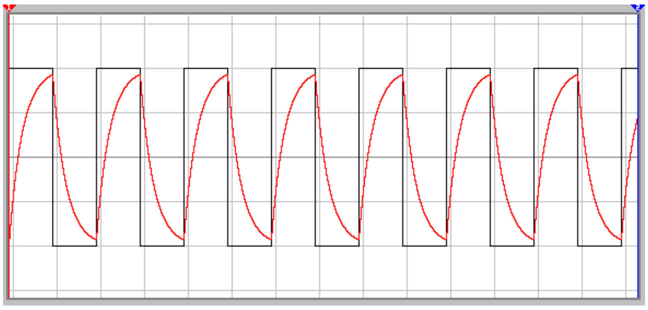


3.4.2. Frequenz = 1 kHz

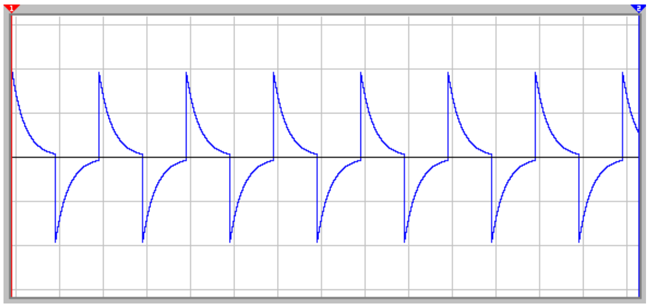
Eingangsspannung (schwarz) Spannung über dem Kondensator (rot), Spannung über den Widerstad (blau) - Strom durch den Widerstand die gleiche Form, nur andere Amplitude

Frequenz f_1 = 1 kHz - T = 1 ms

1Teilstrich entspricht 1V bzw. 500 µs



1Teilstrich entspricht 2 V; 1,33 mA bzw. 500 µs

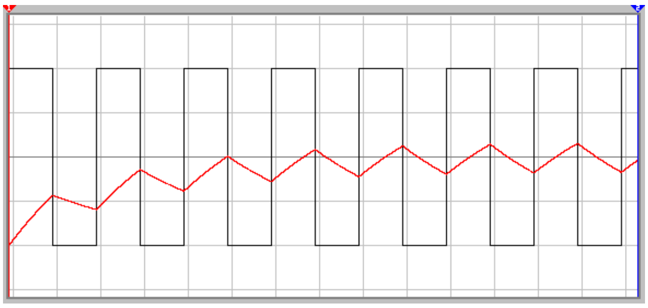


3.4.3. Frequenz = 10 kHz

Eingangsspannung (schwarz) Spannung über dem Kondensator (rot), Spannung über den Widerstad (blau) - Strom durch den Widerstand die gleiche Form, nur andere Amplitude

Frequenz f_1 = 10 kHz - T = 10 µs

1Teilstrich entspricht 1V bzw. 50 µs



1Teilstrich entspricht 2 V; 1,33 mA bzw. 50 µs