



## Aufgaben zum Fach Technische Informatik

1. Semester / Wintersemester 1997/98

### Aufgabe 1.4. - Berechnung komplexer Widerstände in der Normal- und Versorform (Exponentialform)

#### Aufgabe 1.4.1. - Transformation von Zeitfunktionen in die komplexe Ebene

Transformieren Sie folgende Zeitfunktionen in die komplexe Ebene und bestimmen Sie die komplexe Amplitude  $\underline{U}$ :

$$u(t) = 2V \sin(15,708ks^{-1}t - 210^\circ)$$

allgemein:  $u(t) = U \sin(\omega t + \varphi_U)$

und stellen Sie diese in der Normal-, goniometrischen-, Exponential- und Versorform dar.

allgemein:  $\underline{U} = \operatorname{Re}\{\underline{U}\} + j\operatorname{Im}\{\underline{U}\} = U(\cos(\varphi_U) + jsin(\varphi_U)) = U \exp(j\varphi_U) = U \angle \varphi_U$   
mit:  $U = (\operatorname{Re}^2\{\underline{U}\} + \operatorname{Im}^2\{\underline{U}\})^{1/2}$ ,  $\varphi_U = \arctan(\operatorname{Im}\{\underline{U}\}/\operatorname{Re}\{\underline{U}\})$

(Beispiel für die Darstellung:  $\underline{U} = 3V + j4V = 5V(\cos 53,1^\circ + j\sin 53,1^\circ) = 5V \exp(j53,1^\circ) = 5V \angle 53,1^\circ$ )

#### Aufgabe 1.4.2. - Reihenschaltung von Widerstand und Kapazität

Gegeben ist folgende Schaltung für  $\underline{Z}_1$ :

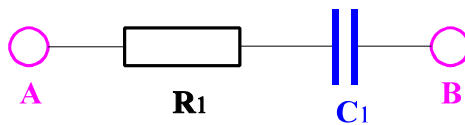


Abb. 1

$R_1 = 75 \Omega$   
 $C_1 = 2,307 \mu\text{F}$   
 $f = 1,5\text{k Hz}$

allgemein:  $\underline{Z} = \operatorname{Re}\{\underline{Z}\} + j\operatorname{Im}\{\underline{Z}\} = Z(\cos(\varphi_Z) + jsin(\varphi_Z)) = Z \exp(j\varphi_Z) = Z \angle \varphi_Z$   
mit:  $\operatorname{Re}\{\underline{Z}\} = R$ ,  $\operatorname{Im}\{\underline{Z}\} = X_L + X_C$ , mit  $jX_L = j\omega L$  und  $jX_C = -j(\omega C)^{-1}$   
und:  $Z = (\operatorname{Re}^2\{\underline{Z}\} + \operatorname{Im}^2\{\underline{Z}\})^{1/2}$ ,  $\varphi_Z = \arctan(\operatorname{Im}\{\underline{Z}\}/\operatorname{Re}\{\underline{Z}\})$

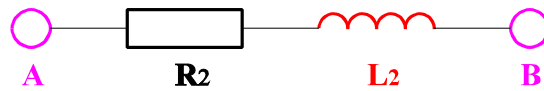
Berechnen Sie den komplexen Widerstand  $\underline{Z}$  zwischen den Punkten A und B in der Normal-, goniometrischen-, Exponential- und Versorform.

Stellen Sie das Ergebnis in der Gaußschen Zahlenebene dar

(Beispiel für die Darstellung:  $\underline{Z} = 3 \Omega + j4\Omega = 5\Omega(\cos 53,1^\circ + jsin 53,1^\circ) = 5\Omega \exp(j53,1^\circ) = 5\Omega \angle 53,1^\circ$ )

### Aufgabe 1.4.3. - Reihenschaltung von Widerstand und Induktivität

Gegeben ist folgende Schaltung für  $Z_2$ :



$$R_2 = 25\Omega$$

$$L_2 = 3,714\text{mH}$$

$$f = 1,5\text{kHz}$$

**Abb. 2**

allgemein:  $\underline{Z} = \text{Re}\{\underline{Z}\} + j\text{Im}\{\underline{Z}\} = Z(\cos(\varphi_Z) + j\sin(\varphi_Z)) = Z \exp(j\varphi_Z) = Z \angle \varphi_Z$   
 mit:  $\text{Re}\{\underline{Z}\} = R, \text{Im}\{\underline{Z}\} = X_L + X_C$ , mit  $jX_L = j\omega L$  und  $jX_C = -j(\omega C)^{-1}$   
 und:  $Z = (\text{Re}^2\{\underline{Z}\} + \text{Im}^2\{\underline{Z}\})^{1/2}, \varphi_Z = \arctan(\text{Im}\{\underline{Z}\}/\text{Re}\{\underline{Z}\})$

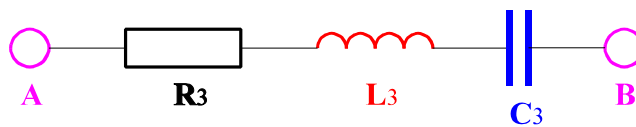
Berechnen Sie den komplexen Widerstand  $\underline{Z}$  zwischen den Punkten A und B in der Normal-, goniometrischen-, Exponential- und Versorform.

Stellen Sie das Ergebnis in der Gaußschen Zahlenebene dar

(Beispiel für die Darstellung:  $\underline{Z} = 3 \Omega + j 4\Omega = 5\Omega (\cos 53,1^\circ + j\sin 53,1^\circ) = 5\Omega \exp(j53,1^\circ) = 5\Omega \angle 53,1^\circ$ )

### Aufgabe 1.4.4. - Reihenschaltung von Widerstand, Kapazität und Induktivität

Gegeben ist folgende Schaltung für  $Z_3$ :



$$R_3 = 75\Omega$$

$$L_3 = 4,0565\text{mH}$$

$$C_3 = 2,449\mu\text{F}$$

$$f = 1,5\text{kHz}$$

**Abb. 3**

allgemein:  $\underline{Z} = \text{Re}\{\underline{Z}\} + j\text{Im}\{\underline{Z}\} = Z(\cos(\varphi_Z) + j\sin(\varphi_Z)) = Z \exp(j\varphi_Z) = Z \angle \varphi_Z$   
 mit:  $\text{Re}\{\underline{Z}\} = R, \text{Im}\{\underline{Z}\} = X_L + X_C$ , mit  $jX_L = j\omega L$  und  $jX_C = -j(\omega C)^{-1}$   
 und:  $Z = (\text{Re}^2\{\underline{Z}\} + \text{Im}^2\{\underline{Z}\})^{1/2}, \varphi_Z = \arctan(\text{Im}\{\underline{Z}\}/\text{Re}\{\underline{Z}\})$

Berechnen Sie den komplexen Widerstand  $\underline{Z}$  zwischen den Punkten A und B in der Normal-, goniometrischen-, Exponential- und Versorform.

Stellen Sie das Ergebnis in der Gaußschen Zahlenebene dar

(Beispiel für die Darstellung:  $\underline{Z} = 3 \Omega + j 4\Omega = 5\Omega (\cos 53,1^\circ + j\sin 53,1^\circ) = 5\Omega \exp(j53,1^\circ) = 5\Omega \angle 53,1^\circ$ )

## Aufgabe 1.4.5. - Berechnung des Gesamtwiderstandes einer komplexen Schaltung

Gegeben ist folgende Schaltung für  $\underline{Z}_4$ :

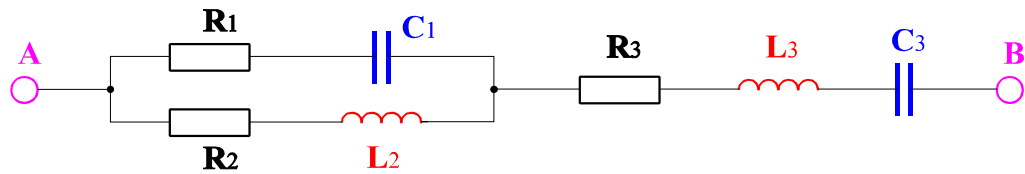


Abb. 4

Es sind die Werte aus den Aufgaben 1.4.2. bis 1.4.4. zu verwenden.

allgemein:  $\underline{Z} = \text{Re}\{\underline{Z}\} + j\text{Im}\{\underline{Z}\} = Z(\cos(\varphi_Z) + j\sin(\varphi_Z)) = Z \exp(j\varphi_Z) = Z \angle \varphi_Z$   
 mit:  $\text{Re}\{\underline{Z}\} = R$ ,  $\text{Im}\{\underline{Z}\} = X_L + X_C$ , mit  $jX_L = j\omega L$  und  $jX_C = -j(\omega C)^{-1}$   
 und:  $Z = (\text{Re}^2\{\underline{Z}\} + \text{Im}^2\{\underline{Z}\})^{1/2}$ ,  $\varphi_Z = \arctan(\text{Im}\{\underline{Z}\}/\text{Re}\{\underline{Z}\})$

Berechnen Sie den komplexen Widerstand  $\underline{Z}$  zwischen den Punkten A und B in der Normal-, goniometrischen-, Exponential- und Versorform.

Stellen Sie das Ergebnis in der Gaußschen Zahlenebene dar

(Beispiel für die Darstellung:  $\underline{Z} = 3 \Omega + j 4 \Omega = 5 \Omega (\cos 53,1^\circ + j \sin 53,1^\circ) = 5 \Omega \exp(j53,1^\circ) = 5 \Omega \angle 53,1^\circ$ )

**Bemerkung:** Fassen Sie die Ergebnisse für  $\underline{U}$ ,  $\underline{Z}_1$ ,  $\underline{Z}_2$ ,  $\underline{Z}_3$ , und  $\underline{Z}_4$  in einer Tabelle zusammen!  
 Berechnen Sie Multiplikationen und Divisionen von Komplexen Zahlen in der Versorform (Exponentialform) und Additionen und Subtraktionen in der Normalform.

# Lösungen:

## Lösung: Aufgabe 1.4.1.

Transformation der Zeitfunktionen einer Spannung in die komplexe Ebene

$$u(t) = 2V \sin(15,708\text{ks}^{-1}t - 210^\circ)$$

daraus folgt:

$$U = 2V \quad \text{und} \quad \varphi_U = -210^\circ$$

$$\omega = 2\pi f = 15,708\text{ks}^{-1} \quad \text{und} \quad f = \omega / 2\pi = 15,708\text{ks}^{-1} / 2\pi = \mathbf{2500,0058\text{Hz} \approx 2,5\text{kHz}}$$

$$\text{Re}\{\underline{U}\} = U \cos(\varphi_U) = 2V \cos(-210^\circ) = 2V \cdot -0,86603 = -1,73205V \approx \mathbf{-1,73 V}$$

$$\text{Im}\{\underline{U}\} = U \sin(\varphi_U) = 2V \sin(-210^\circ) = 2V \cdot (-0,5) = -1V = \mathbf{-1V}$$

$$\underline{U} = \mathbf{-1,73V + j 1V = 2V(\cos[-210^\circ] + j \sin[-210^\circ]) = 2V \exp(-j210^\circ) = 2V \angle -210^\circ}$$

für genauere Betrachtungen kann man die Definitionsgleichung betrachten:

allgemein:

$$\underline{a}(t) = A e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{A} e^{j\omega t} \quad \text{mit} \quad a_2(t) = \text{Re}\{\underline{a}(t)\} = A \cos(\omega t + \varphi) \quad - T_2\text{-Transformation} \\ \text{(Projektion auf die Abszisse)}$$

$$\text{mit} \quad a_1(t) = \text{Im}\{\underline{a}(t)\} = A \sin(\omega t + \varphi) \quad - T_1\text{-Transformation} \\ \text{(Projektion auf die Ordinate)}$$

$$\text{und} \quad \underline{A} = A e^{j\varphi}$$

Bemerkung:

Transformiert man mit  $T_1$  in die Komplexe Ebene muß man auch mit  $T_1$  zurücktransformieren!  
Analog gilt dies auch für  $T_2$

# Lösung: Aufgabe 1.4.2.

## Berechnung der Ersatzschaltung - Reihenschaltung von Widerstand und Kapazität

$$\operatorname{Re}\{\underline{Z}_1\} = R_1 = 75\Omega$$

$$\operatorname{Im}\{\underline{Z}_1\} = X_C = -(\omega C)^{-1} = -(2\pi \cdot 1,5\text{kHz} \cdot 2,307\mu\text{F})^{-1} = -(2\pi \cdot 3,4605\text{mS})^{-1} = -(21,74296\text{mS})^{-1} \approx -(22\text{mS})^{-1} = -46\Omega$$

$$\underline{Z}_1 = \operatorname{Re}\{\underline{Z}_1\} + j\operatorname{Im}\{\underline{Z}_1\} = 75\Omega - j46\Omega$$

$$Z_1 = (\operatorname{Re}^2\{\underline{Z}_1\} + \operatorname{Im}^2\{\underline{Z}_1\})^{1/2} = ([75\Omega]^2 + [-46\Omega]^2)^{1/2} = (5625\Omega^2 + 2116\Omega^2)^{1/2} = (7741\Omega^2)^{1/2} = 87,98\Omega$$

$$\varphi_{Z_1} = \arctan(\operatorname{Im}\{\underline{Z}_1\} / \operatorname{Re}\{\underline{Z}_1\}) = \arctan(-46\Omega / 75\Omega) = \arctan(-0,613333) = -31,52^\circ$$

$$\underline{Z}_1 = 75\Omega - j46\Omega = 87,98\Omega (\cos[-31,52^\circ] + j\sin[-31,52^\circ]) = 87,98\Omega \exp(-j31,52^\circ) = 87,98\Omega \angle -31,52^\circ$$

# Lösung: Aufgabe 1.4.3.

## Berechnung der Ersatzschaltung - Reihenschaltung von Widerstand und Induktivität

$$\operatorname{Re}\{\underline{Z}_2\} = R_2 = 25\Omega$$

$$\operatorname{Im}\{\underline{Z}_2\} = X_L = \omega L = 2\pi \cdot 1,5\text{kHz} \cdot 3,714\text{mH} = 2\pi \cdot 5,571\Omega = 35,003\Omega \approx 35\Omega$$

$$\underline{Z}_2 = \operatorname{Re}\{\underline{Z}_2\} + j\operatorname{Im}\{\underline{Z}_2\} = 25\Omega + j35\Omega$$

$$Z_2 = (\operatorname{Re}^2\{\underline{Z}_2\} + \operatorname{Im}^2\{\underline{Z}_2\})^{1/2} = ([25\Omega]^2 + [35\Omega]^2)^{1/2} = (625\Omega^2 + 1225\Omega^2)^{1/2} = (1850\Omega^2)^{1/2} = 43,01\Omega \approx 43\Omega$$

$$\varphi_{Z_2} = \arctan(\operatorname{Im}\{\underline{Z}_2\} / \operatorname{Re}\{\underline{Z}_2\}) = \arctan(35\Omega / 25\Omega) = \arctan(1,4) = 54,46^\circ$$

$$\underline{Z}_2 = 25\Omega + j35\Omega = 43\Omega (\cos[54,46^\circ] + j\sin[54,46^\circ]) = 43\Omega \exp(j54,46^\circ) = 43\Omega \angle 54,46^\circ$$

# Lösung: Aufgabe 1.4.4.

## Berechnung der Ersatzschaltung - Reihenschaltung von Widerstand, Kapazität und Induktivität

$$\operatorname{Re}\{\underline{Z}_3\} = R_3 = 75\Omega$$

$$X_C = -(\omega C)^{-1} = -(2\pi \cdot 1,5\text{kHz} \cdot 2,449\mu\text{F})^{-1} = -(2\pi \cdot 3,6735\text{ms})^{-1} = -(23,08128\text{ms})^{-1} = -43,325\Omega$$

$$X_L = \omega L = 2\pi \cdot 1,5\text{kHz} \cdot 4,0565\text{mH} = 2\pi \cdot 6,08475\Omega = 38,2316\Omega$$

$$\operatorname{Im}\{\underline{Z}_3\} = X_L + X_C = 38,2316\Omega - 43,325\Omega = -5,0935\Omega$$

$$\underline{Z}_3 = \operatorname{Re}\{\underline{Z}_3\} + j\operatorname{Im}\{\underline{Z}_3\} = 75\Omega - j5,0935\Omega$$

$$\begin{aligned} Z_3 &= (\operatorname{Re}^2\{\underline{Z}_3\} + \operatorname{Im}^2\{\underline{Z}_3\})^{1/2} = ([75\Omega]^2 + [-5,0935\Omega]^2)^{1/2} = (5625\Omega^2 + 25,944\Omega^2)^{1/2} \\ &= (5650,944\Omega^2)^{1/2} = 75,17276\Omega \end{aligned}$$

$$\varphi_{Z_3} = \arctan(\operatorname{Im}\{\underline{Z}_3\} / \operatorname{Re}\{\underline{Z}_3\}) = \arctan(-5,0935\Omega / 75\Omega) = \arctan(-0,06791) = -3,885^\circ$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_3 &= 75\Omega - j5,0935\Omega = 75,17276\Omega (\cos[-3,885^\circ] + j\sin[-3,885^\circ]) = 75,17276\Omega \exp(-j3,885^\circ) \\ &= 75,17276\Omega \angle -3,885^\circ \end{aligned}$$

# Lösung: Aufgabe 1.4.5.

Berechnung der Ersatzschaltung - Gruppenschaltung von  $\underline{Z}_1$ ,  $\underline{Z}_2$  und  $\underline{Z}_3$

## 1. Berechnung der Parallelschaltung von $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_2$

### 1.1. Erste Variante - Berechnung über die Leitwerte:

$$\underline{Y}_1 = 1/\underline{Z}_1 = (87,98\Omega \angle -31,52^\circ)^{-1} = 11,366\text{mS} \angle 31,52^\circ = 9,68\text{ms} + j5,94\text{mS}$$

$$\underline{Y}_2 = 1/\underline{Z}_2 = (43\Omega \angle 54,46^\circ)^{-1} = 23,25\text{mS} \angle -54,46^\circ = 13,51\text{mS} - j18,91\text{mS}$$

$$\begin{aligned}\underline{Y}_{1\parallel 2} &= \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = 9,68\text{ms} + j5,94\text{mS} + 13,51\text{mS} - j18,91\text{mS} \\ &= (9,68\text{mS} + 13,51\text{mS}) + j(5,94\text{mS} - 18,91\text{mS}) \\ &= 23,2\text{mS} - j12,97\text{mS} = 26,58\text{mS} \angle -29,2^\circ\end{aligned}$$

$$\underline{Z}_{1\parallel 2} = 1/\underline{Y}_{1\parallel 2} = (26,58\text{mS} \angle -29,2^\circ)^{-1} = 37,62\Omega \angle 29,2^\circ = 32,8\Omega + j18,3\Omega$$

$$\begin{aligned}\underline{Z}_4 &= \underline{Z}_{1\parallel 2} + \underline{Z}_3 = 32,8\Omega + j18,3\Omega + 75\Omega - j5,0935\Omega \\ &= (32,8\Omega + 75\Omega) + j(18,3\Omega - 5,0935\Omega) = 107,82\Omega + j13,26\Omega \\ &= 108,63\Omega \angle 7,01^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{Z}_4 &= 107,82\Omega + j13,26\Omega = 108,63\Omega(\cos[7,01^\circ] + j\sin[7,01^\circ]) \\ &= 108,63\Omega \exp(j7,01^\circ) = 108,63\Omega \angle 7,01^\circ\end{aligned}$$

### 1.1. Zweite Variante - Berechnung über die Widerstände:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{1\parallel 2} &= \underline{Z}_1 \parallel \underline{Z}_2 = \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) = 87,98\Omega \angle -31,52^\circ \cdot 43\Omega \angle 54,46^\circ / (75\Omega - j46\Omega + 25\Omega + j35\Omega) \\ &= 3783,14\Omega^2 \angle 22,94^\circ / (100\Omega - j11\Omega) = 3783,14\Omega^2 \angle 22,94^\circ / 100,603\Omega \angle -6,277^\circ \\ &= 37,60\Omega \angle 29,217^\circ = 32,816\Omega + j18,35\Omega\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{Z}_4 &= \underline{Z}_{1\parallel 2} + \underline{Z}_3 = 32,816\Omega + j18,35\Omega + 75\Omega - j5,0935\Omega = 107,816\Omega + j13,25\Omega \\ &= 108,6336\Omega \angle 7,01243^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{Z}_4 &= 107,82\Omega + j13,26\Omega = 108,63\Omega(\cos[7,01^\circ] + j\sin[7,01^\circ]) \\ &= 108,63\Omega \exp(j7,01^\circ) = 108,63\Omega \angle 7,01^\circ\end{aligned}$$

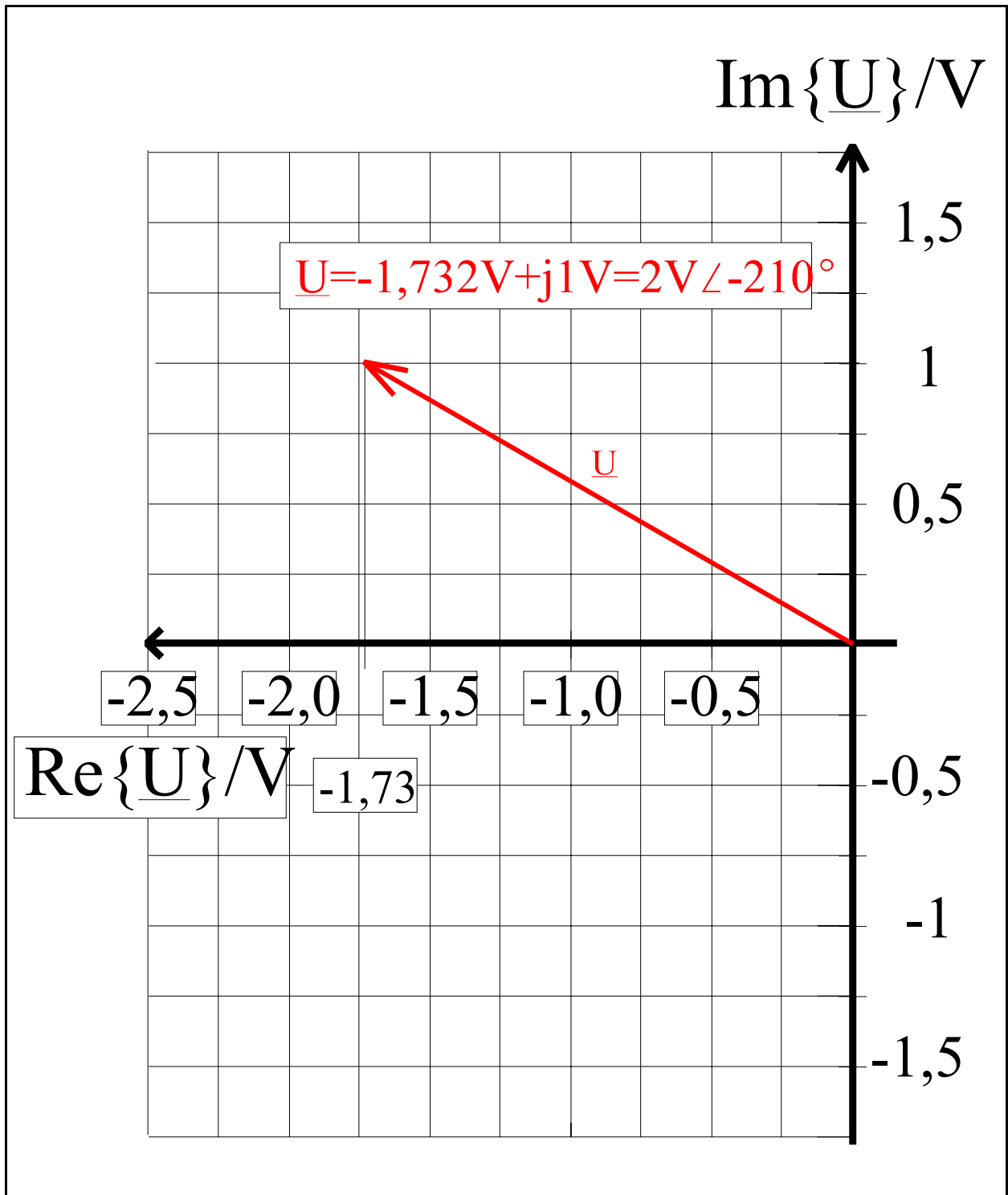


Abb. 5



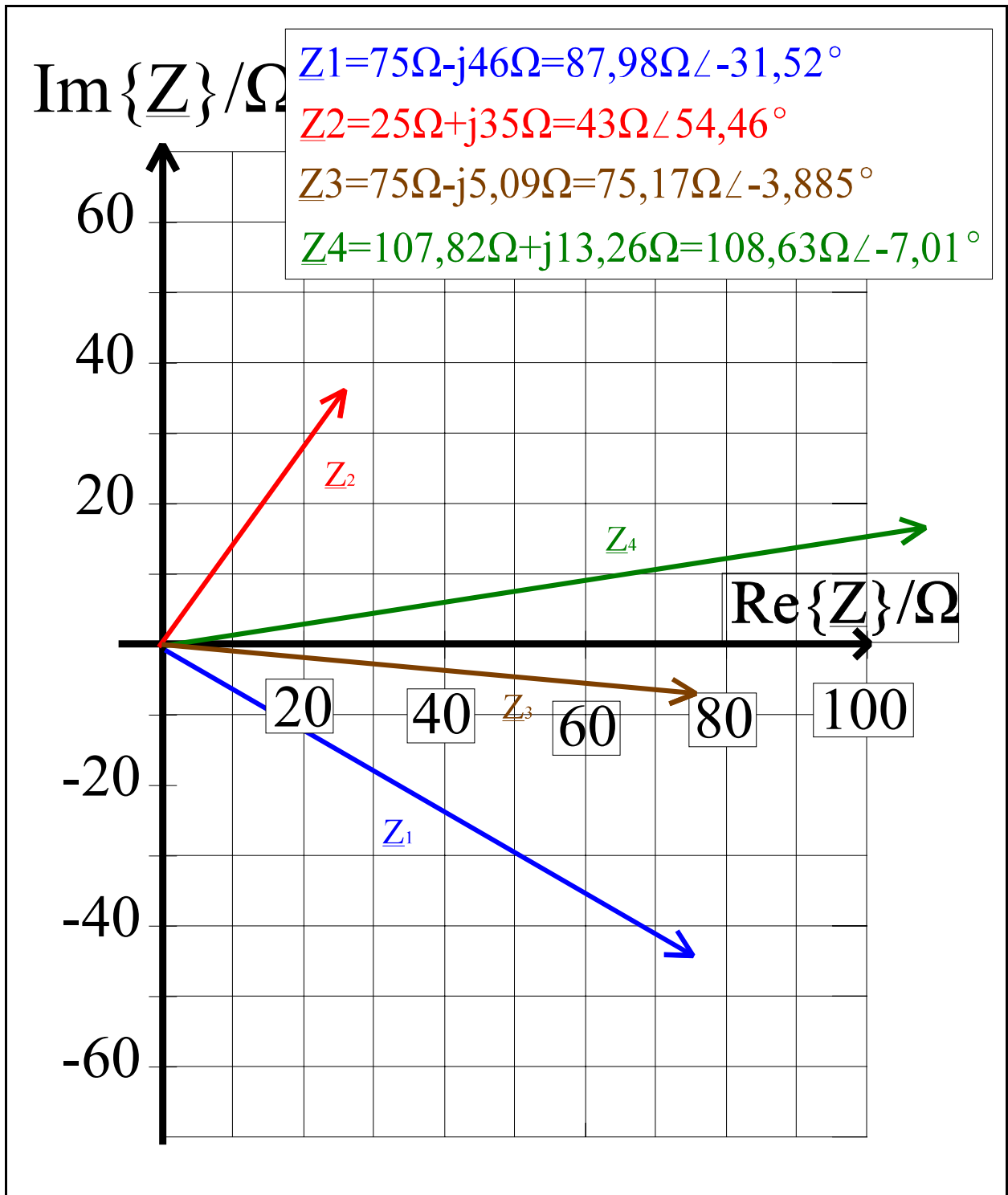


Abb. 6

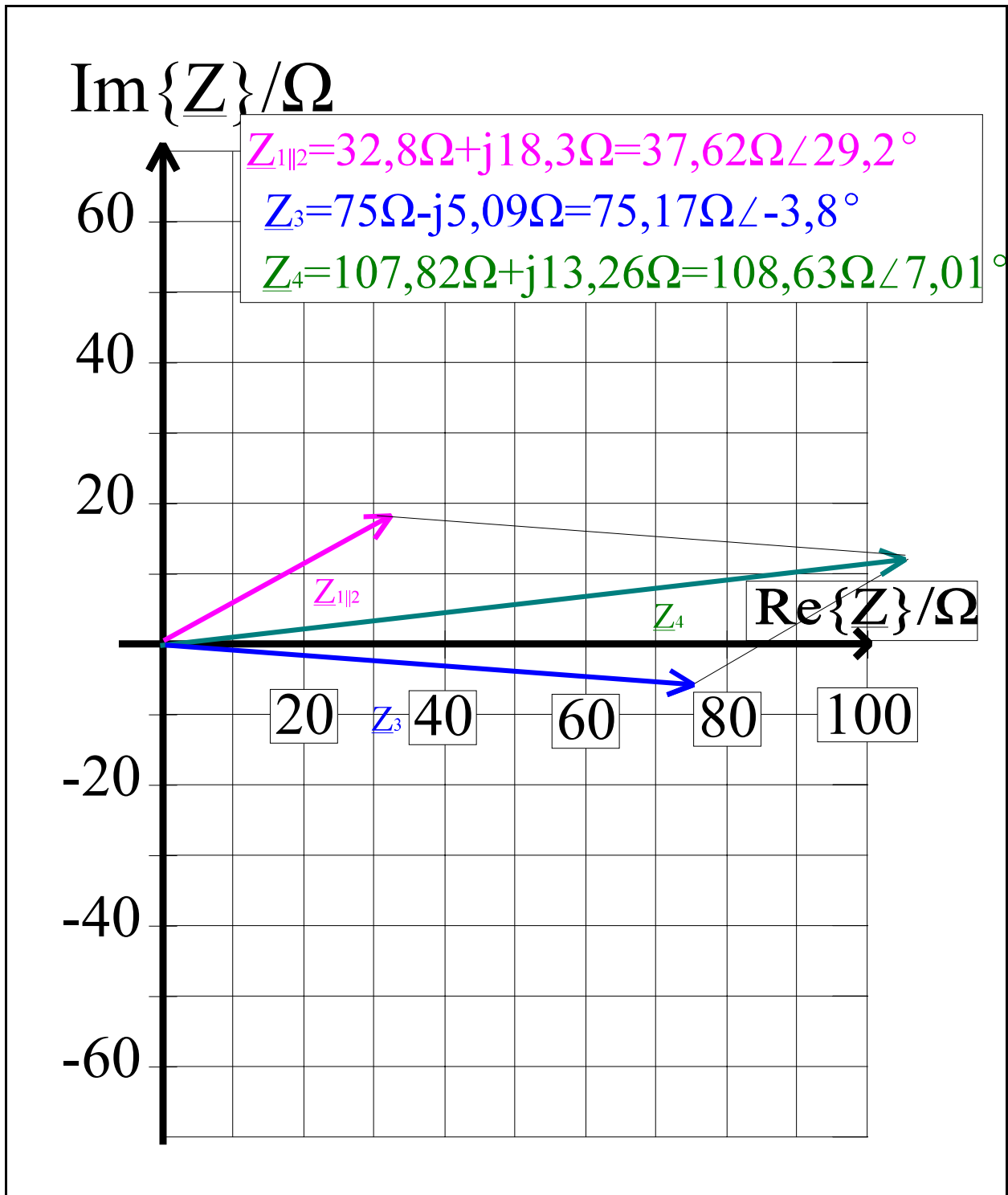


Abb. 7