

Aufgaben zum Fach Technische Informatik

1. Semester / Wintersemester 1996/97

Aufgabe 1.5.1. - Berechnung zeitabhängiger Spannungen und - Ströme durch Hin- und Rücktransformation von Spannungen, Strömen und Widerständen in die komplexe Ebene

Gegeben ist folgende Schaltung:

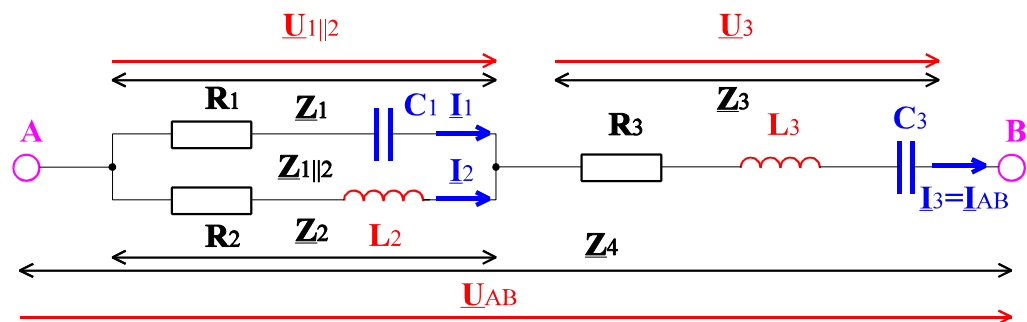


Abb. 1

und die Zeitfunktion:

$$u_{AB}(t) = 20V \sin(6.2832ks^{-1}t + 0^\circ)$$

Die Werte für die Bauelemente entsprechen denen des Aufgabenkomplexes 1.4.

Werte:

$R_1 = 60\Omega$	$C_1 = 3,183\mu F$	
$R_2 = 30\Omega$		$L_2 = 6,366mH$
$R_3 = 56,875\Omega$	$C_3 = 2,273\mu F$	$L_3 = 4,0565mH$
$f = 1kHz$		

Somit ergeben sich für die Widerstände (Impedanzen):

$$\underline{Z}_1 = 60\Omega - j50\Omega = 78,1025\Omega \angle -39,8056^\circ$$

$$\underline{Z}_{1||2} = 40,6097\Omega + j14,5121\Omega = 43,1248\Omega \angle 19,6647^\circ$$

$$\underline{Z}_2 = 30\Omega + j40\Omega = 50\Omega \angle 53,1301^\circ$$

$$\underline{Z}_3 = 56,875\Omega - j44,5123\Omega = 72,2223\Omega \angle -38,0479^\circ$$

$$\underline{Z}_4 = 97,4847\Omega - j30\Omega = 101,9964\Omega \angle -17,1053^\circ$$

Aufgabe:

Bestimmen Sie die Zeitfunktionen der Spannungen $u_{1||2}(t)$ und $u_3(t)$ und der Ströme $i_1(t)$, $i_2(t)$ und $i_3(t)$ $= i_{AB}(t)$

Vorgehensweise:

1. Bestimmen Sie die komplexe Amplitude \underline{U}_{AB} durch Transformation der Zeitfunktion $u_{AB}(t)$ in die komplexe Ebene. Schreiben Sie das Ergebnis in der Normal- und Versorform auf.
2. Berechnen Sie den Gesamtstrom $\underline{I}_{AB} = \underline{I}_3$ aus der Spannung \underline{U}_{AB} und dem Widerstand \underline{Z}_4 . Schreiben Sie das Ergebnis in der Normal- und Versorform auf.
3. Berechnen Sie die Teilspannung \underline{U}_3 aus dem Strom \underline{I}_{AB} und dem Widerstand \underline{Z}_3 . Schreiben Sie das Ergebnis in der Normal- und Versorform auf.
4. Berechnen Sie die Teilspannung $\underline{U}_{1||2}$ aus dem Strom \underline{I}_{AB} und dem Widerstand $\underline{Z}_{1||2}$. Schreiben Sie das Ergebnis in der Normal- und Versorform auf.
5. Berechnen Sie den Teilstrom \underline{I}_2 aus der Spannung $\underline{U}_{1||2}$ und dem Widerstand \underline{Z}_2 . Schreiben Sie das Ergebnis in der Normal- und Versorform auf.
6. Berechnen Sie den Teilstrom \underline{I}_1 aus der Spannung $\underline{U}_{1||2}$ und dem Widerstand \underline{Z}_1 . Schreiben Sie das Ergebnis in der Normal- und Versorform auf.
7. Stellen Sie die Ergebnisse für die komplexen Spannungen und -Ströme grafisch dar. Zeigen Sie, daß man bei vektorieller Addition von $\underline{U}_{1||2}$ und \underline{U}_3 die Spannung \underline{U}_{AB} erhält und bei vektorieller Addition von \underline{I}_1 und \underline{I}_2 den Strom \underline{I}_{AB} .
8. Transformieren Sie die Spannungen \underline{U}_3 und $\underline{U}_{1||2}$ in die Zeitfunktionen $u_3(t)$ und $u_{1||2}(t)$
9. Transformieren Sie die Ströme \underline{I}_1 , \underline{I}_2 und \underline{I}_{AB} in die Zeitfunktionen $i_1(t)$, $i_2(t)$ und $i_{AB}(t)$.

Stellen Sie die Ergebnisse in einer Tabelle dar.

Bemerkung:

- Der Widerstand $Z_{1||2}$ besteht aus der Parallelschaltung von Z_1 und Z_2 .
- Negative Werte von Winkeln brauchen nicht umgerechnet werden.
- Schreiben Sie alle komplexen Ergebnisse in der Normal- und der Versorform auf.
- Berechnen Sie Multiplikationen und Divisionen von komplexen Zahlen in der Versorform (Exponentialform) und Additionen und Subtraktionen in der Normalform.

Formeln:

- Transformation Zeitbereich in komplexen Bildbereich (allgemein):

$$\underline{a}(t) = A e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{A} e^{j\omega t} \quad \text{mit} \quad a_2(t) = \operatorname{Re}\{\underline{a}(t)\} = A \cos(\omega t + \varphi) \quad - T_2\text{-Transformation} \\ \text{(Projektion auf die Abszisse)}$$

$$\text{mit} \quad a_1(t) = \operatorname{Im}\{\underline{a}(t)\} = A \sin(\omega t + \varphi) \quad - T_1\text{-Transformation} \\ \text{(Projektion auf die Ordinate)}$$

$$\text{und} \quad \underline{A} = A e^{j\varphi}$$

Wir verwenden die T_1 -Transformation entsprechend der Vorlesung.
Der Buchstabe A kann für Strom, Spannung u.s.w. stehen.

- Ohmsches Gesetz für komplexe Widerstände:

$$\underline{U} = \underline{I} \cdot \underline{Z} = \underline{I} / \underline{Y}$$

Analog gelten die Kirchhoffschen Sätze

- komplexe Spannungen:

$$\text{allgemein: } \underline{U} = \operatorname{Re}\{\underline{U}\} + j \operatorname{Im}\{\underline{U}\} = U (\cos(\varphi_U) + j \sin(\varphi_U)) = U \exp(j\varphi_U) = U \angle \varphi_U$$

$$\text{mit: } U = (\operatorname{Re}^2\{\underline{U}\} + \operatorname{Im}^2\{\underline{U}\})^{1/2}, \quad \varphi_U = \arctan(\operatorname{Im}\{\underline{U}\} / \operatorname{Re}\{\underline{U}\})$$

$$\text{(Beispiel für Darstellung: } \underline{U} = 30V + j 40V = 50V (\cos 53,1^\circ + j \sin 53,1^\circ) = 50V \exp(j53,1^\circ) = 50V \angle 53,1^\circ)$$

- komplexe Ströme:

$$\text{allgemein: } \underline{I} = \operatorname{Re}\{\underline{I}\} + j \operatorname{Im}\{\underline{I}\} = I (\cos(\varphi_I) + j \sin(\varphi_I)) = I \exp(j\varphi_I) = I \angle \varphi_I$$

$$\text{mit: } I = (\operatorname{Re}^2\{\underline{I}\} + \operatorname{Im}^2\{\underline{I}\})^{1/2}, \quad \varphi_I = \arctan(\operatorname{Im}\{\underline{I}\} / \operatorname{Re}\{\underline{I}\})$$

$$\text{(Beispiel für Darstellung: } \underline{I} = 300\text{mA} + j 400\text{mA} = 500\text{mA} (\cos 53,1^\circ + j \sin 53,1^\circ) = 500\text{mA} \exp(j53,1^\circ) = 500\text{mA} \angle 53,1^\circ)$$

- komplexe Widerstände:

$$\text{allgemein: } \underline{Z} = \operatorname{Re}\{\underline{Z}\} + j \operatorname{Im}\{\underline{Z}\} = Z (\cos(\varphi_Z) + j \sin(\varphi_Z)) = Z \exp(j\varphi_Z) = Z \angle \varphi_Z$$

$$\text{mit: } \operatorname{Re}\{\underline{Z}\} = R, \quad \operatorname{Im}\{\underline{Z}\} = X_L + X_C, \quad \text{mit } jX_L = j\omega L \text{ und } jX_C = -j(\omega C)^{-1}$$

$$\text{und: } Z = (\operatorname{Re}^2\{\underline{Z}\} + \operatorname{Im}^2\{\underline{Z}\})^{1/2}, \quad \varphi_Z = \arctan(\operatorname{Im}\{\underline{Z}\} / \operatorname{Re}\{\underline{Z}\})$$

$$\text{(Beispiel für Darstellung: } \underline{Z} = 300\Omega + j 400\Omega = 500\Omega (\cos 53,1^\circ + j \sin 53,1^\circ) = 500\Omega \exp(j53,1^\circ) = 500\Omega \angle 53,1^\circ)$$

- komplexe Leitwerte

$$\text{allgemein: } \underline{Y} = 1 / \underline{Z}$$

$$\underline{Y} = \operatorname{Re}\{\underline{Y}\} + j \operatorname{Im}\{\underline{Y}\} = Y (\cos(\varphi_Y) + j \sin(\varphi_Y)) = Y \exp(j\varphi_Y) = Y \angle \varphi_Y$$

$$\text{mit: } \operatorname{Re}\{\underline{Y}\} = R, \quad \operatorname{Im}\{\underline{Y}\} = B_L + B_C, \quad \text{mit } jB_L = -j(\omega L)^{-1} \text{ und } jB_C = j\omega C$$

$$\text{und: } Y = (\operatorname{Re}^2\{\underline{Y}\} + \operatorname{Im}^2\{\underline{Y}\})^{1/2}, \quad \varphi_Y = \arctan(\operatorname{Im}\{\underline{Y}\} / \operatorname{Re}\{\underline{Y}\})$$

$$\text{(Beispiel für Darstellung: } \underline{Y} = 300\text{mS} + j 400\text{mS} = 500\text{mS} (\cos 53,1^\circ + j \sin 53,1^\circ) = 500\text{mS} \exp(j53,1^\circ) = 500\text{mS} \angle 53,1^\circ)$$

Lösungen:

Lösung: Aufgabe 1.5.1.

1. Transformation der Zeitfunktionen einer Spannung in die komplexe Ebene, Bestimmung der komplexen Amplitude

$$u_{AB}(t) = 20V \sin(6,2832ks^{-1}t + 0^{\circ})$$

daraus folgt:

$$U = 20V \quad \text{und} \quad \varphi_U = 0^{\circ}$$

$$\omega = 2\pi f = 6,2832ks^{-1} \quad \text{und} \quad f = \omega / 2\pi = 6,2832ks^{-1} / 2\pi = \mathbf{1000,002Hz \approx 1kHz}$$

$$T = 1/f = 1/1kHz = \mathbf{1ms}$$

$$\operatorname{Re}\{\underline{U}\} = U \cos(\varphi_U) = 20V \cos(0^{\circ}) = 20V \cdot 1 = \mathbf{20V}$$

$$\operatorname{Im}\{\underline{U}\} = U \sin(\varphi_U) = 20V \sin(0^{\circ}) = 20V \cdot 0 = \mathbf{0V}$$

$$\underline{U}_{AB} = \mathbf{20V \angle 0^{\circ} = 20V \exp(j0^{\circ}) = 20V(\cos[0^{\circ}] + j \sin[0^{\circ}]) = 20V + j 0V}$$

für genauere Betrachtungen kann man die Definitionsgleichung betrachten:

allgemein:

$$\underline{a}(t) = A e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{A} e^{j\omega t} \quad \text{mit} \quad a_2(t) = \operatorname{Re}\{\underline{a}(t)\} = A \cos(\omega t + \varphi) \quad - T_2\text{-Transformation} \\ \text{(Projektion auf die Abszisse)}$$

$$\text{mit} \quad a_1(t) = \operatorname{Im}\{\underline{a}(t)\} = A \sin(\omega t + \varphi) \quad - T_1\text{-Transformation} \\ \text{(Projektion auf die Ordinate)}$$

$$\text{und} \quad \underline{A} = A e^{j\varphi}$$

Bemerkung:

Transformiert man mit T_1 in die Komplexe Ebene muß man auch mit T_1 zurücktransformieren!
Analog gilt dies auch für T_2

2. Berechnung des Gesamtstroms \underline{I}_{AB}

$$\underline{U}_{AB} = \underline{I}_{AB} \cdot \underline{Z}_4 = \underline{I}_{AB} \cdot \underline{Z}_{AB}$$

$$\begin{aligned}\underline{I}_{AB} &= \underline{U}_{AB} / \underline{Z}_{AB} = 20\text{V} \angle 0^\circ / 101,9964\Omega \angle -17,1053^\circ = 0,1960854\text{A} = \mathbf{196,0854\text{mA} \angle 17,1053^\circ} \\ &= 196,0854\text{mA} (\cos[17,1053^\circ] + j \sin[17,1053^\circ]) = \mathbf{187,4117\text{mA} + j57,6744\text{mA}}\end{aligned}$$

3. Berechnung der Teilspannung \underline{U}_3

$$\begin{aligned}\underline{U}_3 &= \underline{I}_{AB} \cdot \underline{Z}_3 = 196,0854\text{mA} \angle 17,1053^\circ \cdot 72,2223\Omega \angle -38,0479^\circ = \mathbf{14,1617\text{V} \angle -20,9426^\circ} \\ &= 14,1617\text{V} (\cos[-20,9426^\circ] + j \sin[-20,9426^\circ]) = \mathbf{13,2262\text{V} - j5,0619\text{V}}\end{aligned}$$

4. Berechnung der Teilspannung $\underline{U}_{1||2}$

$$\begin{aligned}\underline{U}_{1||2} &= \underline{I}_{AB} \cdot \underline{Z}_{1||2} = 196,0854\text{mA} \angle 17,1053^\circ \cdot 43,1248\Omega \angle 19,6647^\circ = \mathbf{8,4561\text{V} \angle 36,77^\circ} \\ &= \mathbf{6,7737\text{V} + j5,0619\text{V}}\end{aligned}$$

5. Berechnung des Teilstromes \underline{I}_2

$$\begin{aligned}\underline{I}_2 &= \underline{U}_{1||2} / \underline{Z}_2 = 8,4561\text{V} \angle 36,77^\circ / 50\Omega \angle 53,1301^\circ = \mathbf{169,122\text{mA} \angle -16,3601^\circ} \\ &= \mathbf{162,2743\text{mA} - j47,6372\text{mA}}\end{aligned}$$

6. Berechnung des Teilstromes \underline{I}_1

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \underline{U}_{1||2} / \underline{Z}_1 = 8,4561\text{V} \angle 36,77^\circ / 78,1025\Omega \angle -39,8056^\circ = \mathbf{108,2693\text{mA} \angle 76,5756^\circ} \\ &= \mathbf{25,1360\text{mA} + j105,3111\text{mA}}\end{aligned}$$

8. Bestimmung der Zeitfunktionen $u_3(t)$ und $u_{1||2}(t)$

$$a_1(t) = \text{Im}\{\underline{a}(t)\} = A \sin(\omega t + \varphi) = A \sin(\omega[t + t_\varphi]) \quad \varphi_{\text{RAD}} = (2\pi/360^\circ) \cdot \varphi, \quad t_\varphi = \varphi_{\text{RAD}}/\omega$$

$$\underline{U}_3 = 14,1617\text{V} \angle -20,9426^\circ \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} u_3(t) &= 14,1617\text{V} \sin(6,2832\text{ks}^{-1} \cdot t - 20,9426^\circ) \\ &= 14,1617\text{V} \sin(2\pi \cdot 1\text{kHz} \cdot t - 20,9426^\circ) \\ &= 14,1617\text{V} \sin(2\pi \cdot 1\text{kHz} \cdot t - 0,3655) \\ &= 14,1617\text{V} \sin(2\pi \cdot 1\text{kHz} \cdot t + 5,9177) \\ &= 14,1617\text{V} \sin(2\pi \cdot 1\text{kHz} \cdot [t - 58,17\mu\text{s}]) \end{aligned}$$

$$\underline{U}_{1||2} = 8,4561\text{V} \angle 36,77^\circ \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} u_{1||2}(t) &= 8,4561\text{V} \sin(6,2832\text{ks}^{-1} \cdot t + 36,77^\circ) \\ &= 8,4561\text{V} \sin(2\pi \cdot 1\text{kHz} \cdot t + 36,77^\circ) \\ &= 8,4561\text{V} \sin(2\pi \cdot 1\text{kHz} \cdot t + 0,6418) \\ &= 8,4561\text{V} \sin(2\pi \cdot 1\text{kHz} \cdot [t + 102,15\mu\text{s}]) \end{aligned}$$

9. Bestimmung der Zeitfunktionen $i_1(t)$, $i_2(t)$ und $i_{AB}(t)$

$$\underline{I}_1 = 108,2693\text{mA} \angle 76,5776^\circ \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} i_1(t) &= 108,2693\text{mA} \cdot \sin(6,2832\text{ks}^{-1} \cdot t + 76,5756^\circ) \\ &= 108,2693\text{mA} \cdot \sin(2\pi \cdot 1\text{kHz} \cdot t + 76,5756^\circ) \\ &= 108,2693\text{mA} \cdot \sin(2\pi \cdot 1\text{kHz} \cdot t + 1,3365) \\ &= 108,2693\text{mA} \cdot \sin(2\pi \cdot 1\text{kHz} \cdot [t + 212,71\mu\text{s}]) \end{aligned}$$

$$\underline{I}_2 = 169,122\text{mA} \angle -16,3601^\circ \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} i_2(t) &= 169,122\text{mA} \cdot \sin(6,2832\text{ks}^{-1} \cdot t - 16,3601^\circ) \\ &= 169,122\text{mA} \cdot \sin(2\pi \cdot 1\text{kHz} \cdot t - 16,3601^\circ) \\ &= 169,122\text{mA} \cdot \sin(2\pi \cdot 1\text{kHz} \cdot t - 0,2855) \\ &= 169,122\text{mA} \cdot \sin(2\pi \cdot 1\text{kHz} \cdot [t - 45,44\mu\text{s}]) \\ &= 169,122\text{mA} \cdot \sin(2\pi \cdot 1\text{kHz} \cdot t + 5,9976) \\ &= 169,122\text{mA} \cdot \sin(2\pi \cdot 1\text{kHz} \cdot [t + 954,55\mu\text{s}]) \end{aligned}$$

$$\underline{I}_{AB} = 196,0854\text{mA} \angle 17,1053^\circ \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} i_{AB}(t) &= 196,0854\text{mA} \cdot \sin(6,2832\text{ks}^{-1} \cdot t + 17,1053^\circ) \\ &= 196,0854\text{mA} \cdot \sin(2\pi \cdot 1\text{kHz} \cdot t + 17,1053^\circ) \\ &= 196,0854\text{mA} \cdot \sin(2\pi \cdot 1\text{kHz} \cdot t + 0,2985) \\ &= 196,0854\text{mA} \cdot \sin(2\pi \cdot 1\text{kHz} \cdot [t + 47,51\mu\text{s}]) \end{aligned}$$

Zusammenfassung:

$$\underline{U}_{AB} = 20\text{V} \angle 0^\circ = 20\text{V} + j\,0\text{V}$$

$$\underline{U}_3 = 14,1617\text{V} \angle -20,9426^\circ = 13,2262\text{V} - j5,0619\text{V}$$

$$\underline{U}_{1|2} = 8.4561\text{V} \angle 36,77^\circ = 6,7737\text{V} + j5,0619\text{V}$$

$$\underline{I}_{AB} = 196,0854\text{mA} \angle 17,1053^\circ = 187,4117\text{mA} + j57,6744\text{mA}$$

$$\underline{I}_1 = 108,2693\text{mA} \angle 76,5756^\circ = 25,1360\text{mA} + j105,3111\text{mA}$$

$$\underline{I}_2 = 169,122\text{mA} \angle -16,3601^\circ = 162,2743\text{mA} - j47,6372\text{mA}$$

$$u_{AB}(t) = 20\text{V} \sin(6,2832\text{ks}^{-1}t + 0^\circ)$$

$$u_3(t) = 14,1617\text{V} \sin(6,2832\text{ks}^{-1}t - 20,9426^\circ) = 14,1617\text{V} \sin(2\pi \cdot 1\text{kHz} \cdot t - 20,9426^\circ)$$

$$u_{1|2}(t) = 8.4561\text{V} \sin(6,2832\text{ks}^{-1}t + 36,77^\circ) = 8.4561\text{V} \sin(2\pi \cdot 1\text{kHz} \cdot t + 36,77^\circ)$$

$$i_{AB}(t) = 196,0854\text{mA} \cdot \sin(6,2832\text{ks}^{-1}t + 17,1053^\circ) = 196,0854\text{mA} \cdot \sin(2\pi \cdot 1\text{kHz} \cdot t + 17,1053^\circ)$$

$$i_1(t) = 108,2693\text{mA} \cdot \sin(6,2832\text{ks}^{-1}t + 76,5776^\circ) = 108,2693\text{mA} \cdot \sin(2\pi \cdot 1\text{kHz} \cdot t + 76,5776^\circ)$$

$$i_2(t) = 169,122\text{mA} \cdot \sin(6,2832\text{ks}^{-1}t - 16,3601^\circ) = 169,122\text{mA} \cdot \sin(2\pi \cdot 1\text{kHz} \cdot t - 16,3601^\circ)$$

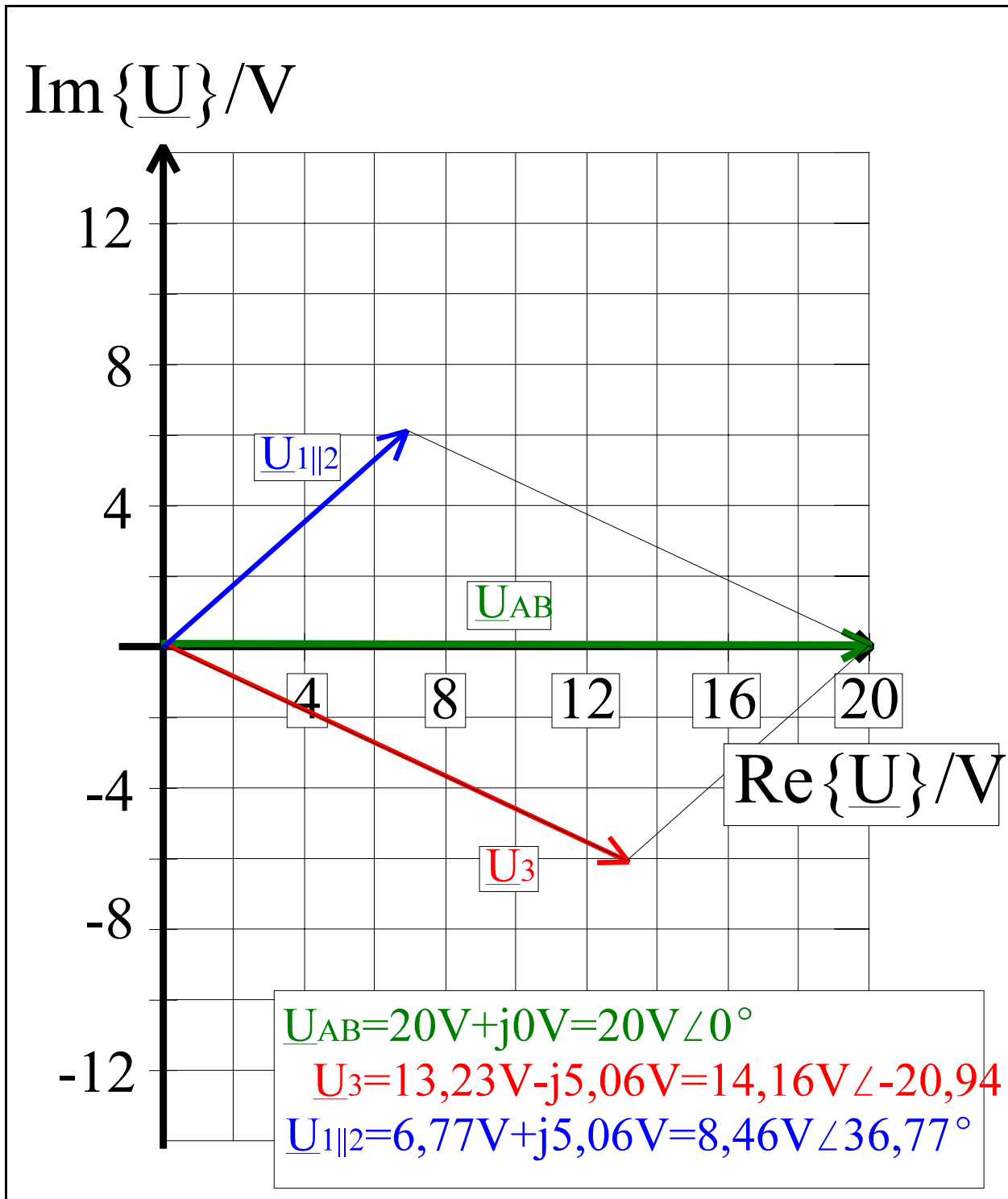


Abb. 2

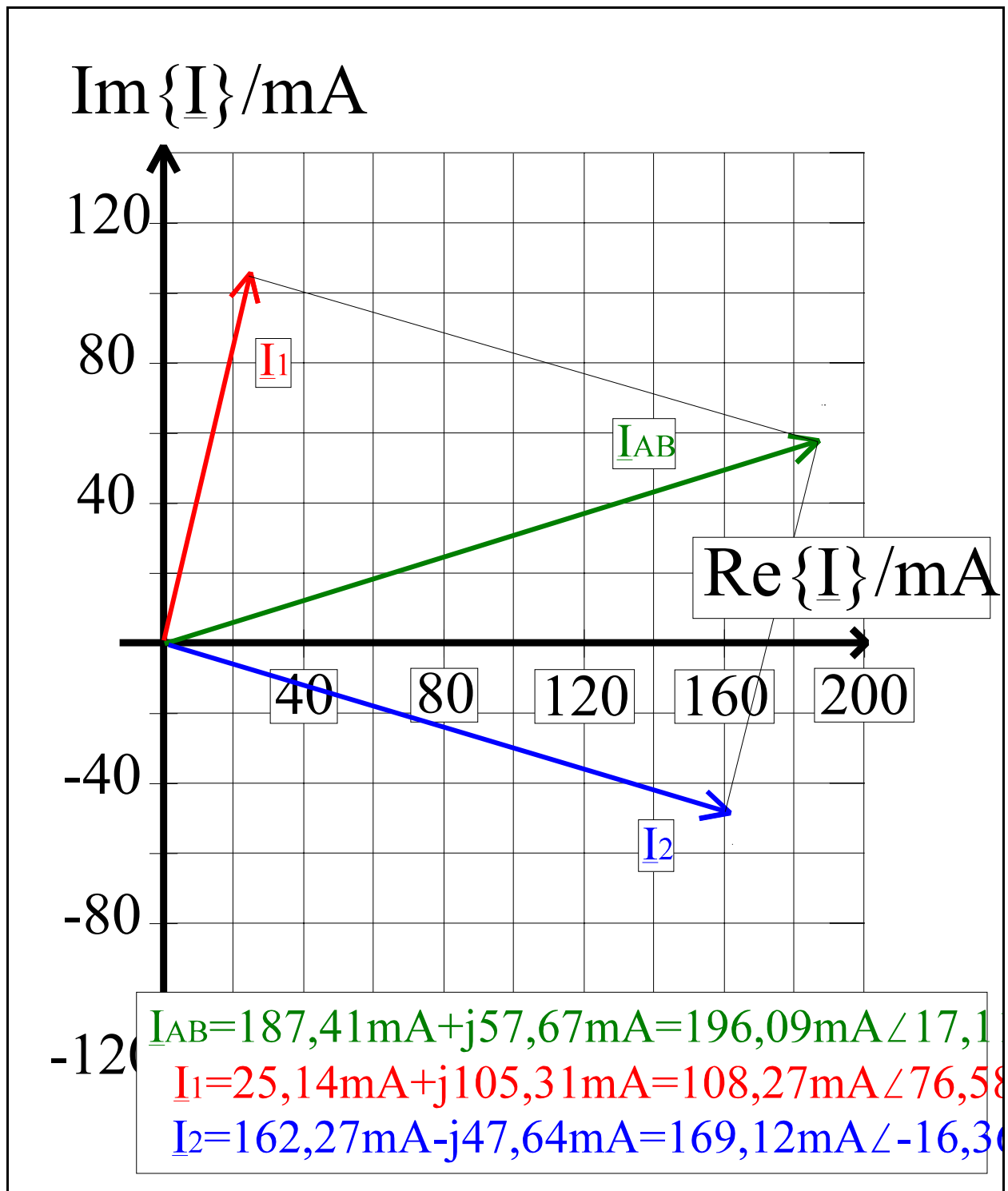


Abb. 3