



Studentenmitteilung

2. Semester - SS 2006

Abt. Technische Informatik

Gerätebeauftragter

Dr. rer.nat. Hans-Joachim Lieske

Tel.: [49]-0341-97 32213

Zimmer: HG 02-37

e-mail: lieske@informatik.uni-leipzig.de

www: <http://www.informatik.uni-leipzig.de/~lieske>

Sprechstunde: Mi. 14⁰⁰ – 15⁰⁰ (Vorlesungszeit)

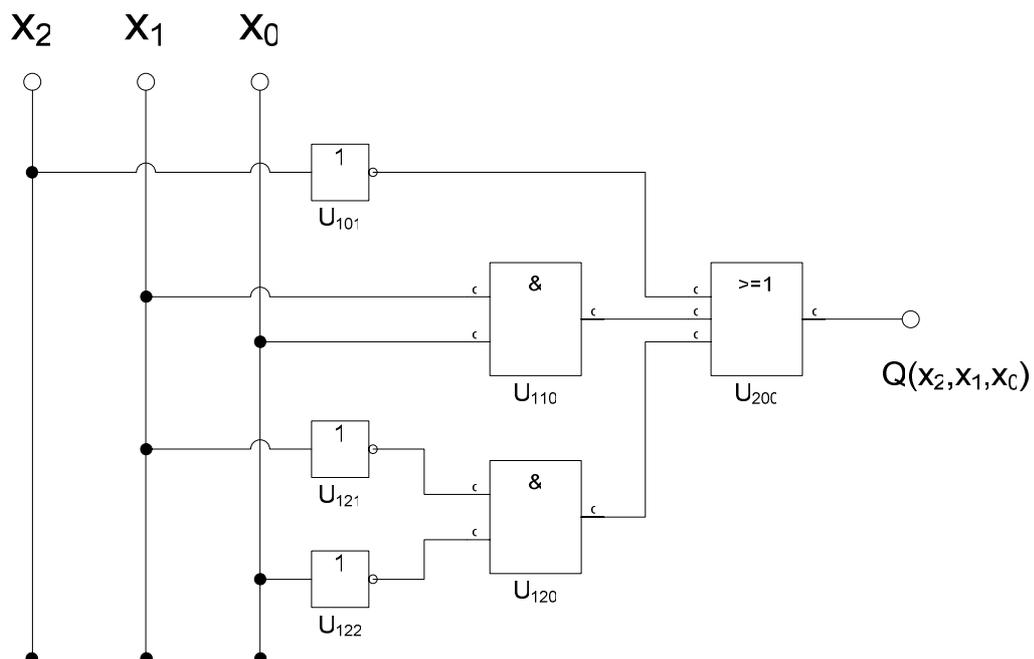
Freitag, 7. April 2006

Aufgaben zu Übung Grundlagen der Technischen Informatik 2

1. Aufgabenkomplex - 1. Aufgabe

Darstellungsformen logischer Gleichungen

Gegeben ist folgende logische Schaltung:



Aufgaben:

Gesamtpunktzahl: 30 Punkte

1. Bestimmen Sie die log. Gleichung entsprechend der logische Schaltung **2 Punkte**
2. Bestimmen Sie die Wertetabelle entsprechend der logische Gleichung **2 Punkte**
3. Bestimmen Sie die Minterme und die kanonisch disjunktive Normalform **2 Punkte**
4. Bestimmen Sie die Maxterme und die kanonisch konjunktive Normalform **2 Punkte**
5. Bestimmen Sie die Schaltung streng entsprechend der kanonisch disjunktiven Normalform **2 Punkte**
6. Bestimmen Sie die Schaltung streng entsprechend der kanonisch konjunktiven Normalform **2 Punkte**
7. Bestimmen Sie das KV-Diagramm **1 Punkt**
8. Bestimmen Sie Implikanten 0. Ordnung und höher **1 Punkt**
9. Bestimmen Sie Primimplikanten 0. Ordnung und höher **1 Punkt**
10. Bestimmen Sie Kernprimimplikanten 0. Ordnung und höher **1 Punkt**
11. Bestimmen Sie das Zeitverhalten **2 Punkte**
12. Bestimmen Sie das Venn-Diagramm **2 Punkte**
13. Bestimmen Sie die Baumdarstellung in der Reihenfolge x_2, x_1, x_0 (von oben nach unten). **2 Punkte**
14. Bestimmen Sie das Binary Decision Diagram in der Reihenfolge x_2, x_1, x_0 (von oben nach unten). **2 Punkte**
15. Bestimmen Sie das Reduced Ordered BDD (ROBDD) in der Reihenfolge x_2, x_1, x_0 (von oben nach unten). **2 Punkte**
16. Bestimmen Sie die Gleichung und die Schaltung ausschließlich mit NAND-Gattern (NAND-Konversion) **2 Punkte**
17. Bestimmen Sie die Gleichung und die Schaltung ausschließlich mit NOR-Gattern (NOR-Konversion) **2 Punkte**

Bemerkung:

Sind zwischen den Variablen keine Operatoren, so ist das als UND-Verknüpfung zu lesen.

Beispiel: $abc \equiv a \wedge b \wedge c$

Für bestimmte Fälle wird x_0 mit $2^0=1$, x_1 mit $2^1=2$, x_2 mit $2^2=4$ und später x_3 mit $2^3=8$ u.s.w. gewichtet, so das man sie als eine Zahl ansehen kann.

Bei den Schaltungen können die Gatter beliebig viele Eingänge haben, ausgenommen der Inverter. Es sind, wenn nicht ausdrücklich anders gefordert, nur AND-, OR- und NOT-Gatter zu verwenden.

Leere Felder in Karnaugh-Veitch-Diagrammen sind immer null.

Bei den Konversionen sind Inverter als Spezialfall der NAND- und NOR - Gatter auf der untersten Ebene erlaubt. Die Konversionen sind aus den kanonischen Normalformen zu erstellen.

Streng in Zusammenhang mit der Schaltung bedeutet, daß alle Inverter gezeichnet werden müssen! Es existiert jeweils nur ein Draht für die nicht invertierten Variablen.

Zum Beispiel gilt für die Implikanten 1. Ordnung (1,5) und (2,6) $I(1)=\{(1,5),(2,6)\}$

2. Ordnung (4,5,6,7) $I(2)=\{(4,5,6,7)\}$. Für die Primimplikanten z.B: $PI(1)=$ und die Kernimplikanten z.B: $KPI(2)=$

Bei der Baumdarstellung geht man zweckmäßiger Weise von der kanonisch disjunktiven Normalform oder einer disjunktiven Form aus.

Die Kosten sind entsprechend der Kostenbestimmung im Quine-McCluskey Verfahren aus der Vorlesung zu berechnen. Für n-Variablen hat der (Prim)implikant 0. Ordnung (Minterm) die Kosten n, der (Prim)implikant 1. Ordnung (2er Block) die Kosten n-1 usw.

Es kann mehrere minimale Funktionen mit minimalen Kosten geben.

Kernprimimplikanten sind eine Untermenge der Primimplikanten.

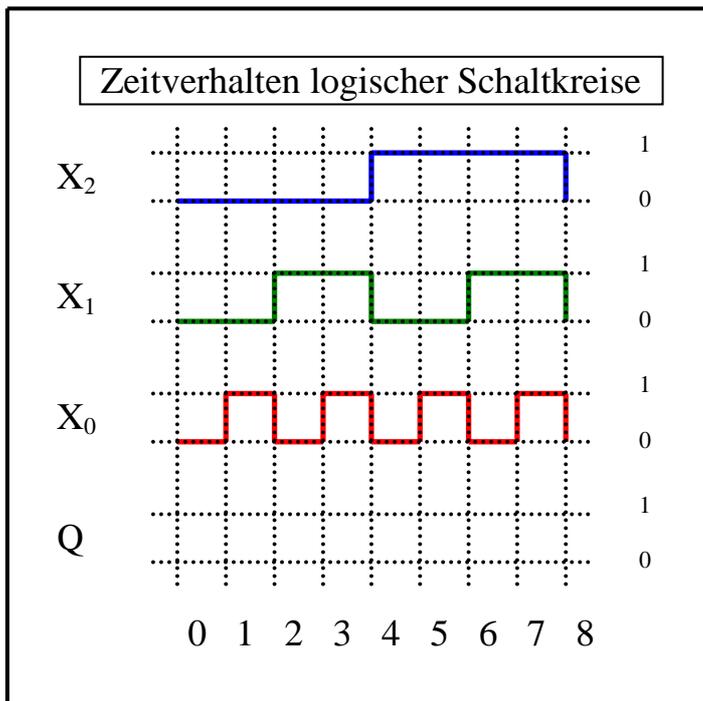
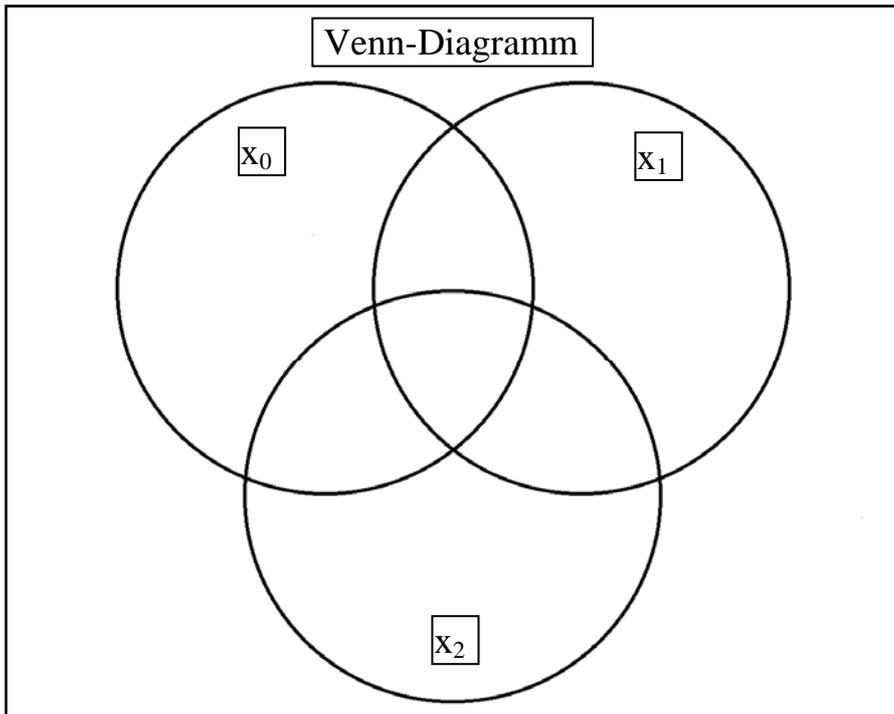
Primimplikanten sind eine Untermenge der Implikanten.

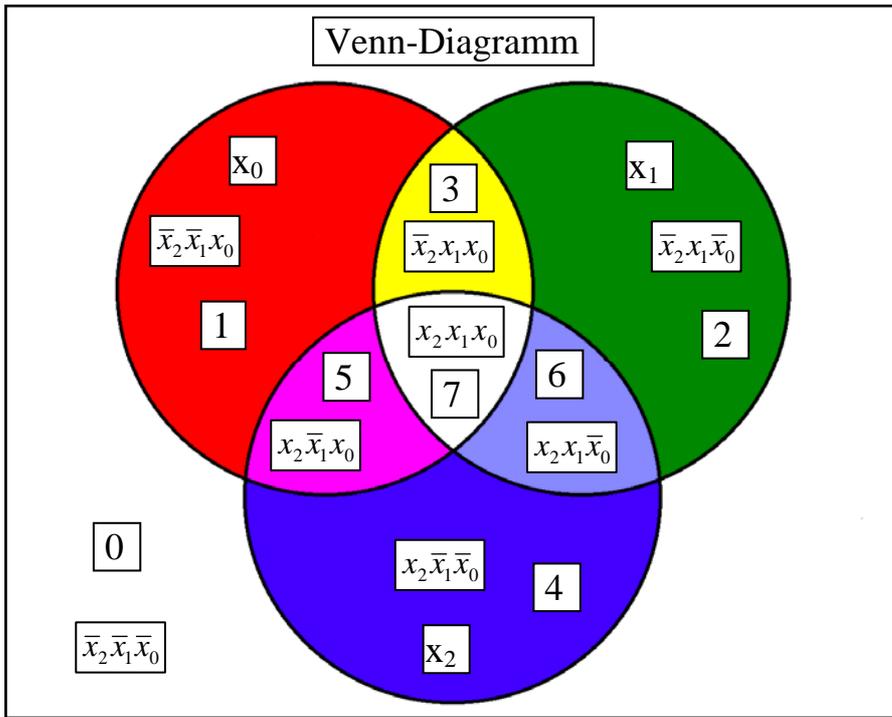
Im einfachsten Fall sind die Kernprimimplikanten gleich den Primimplikanten

Hilfen:

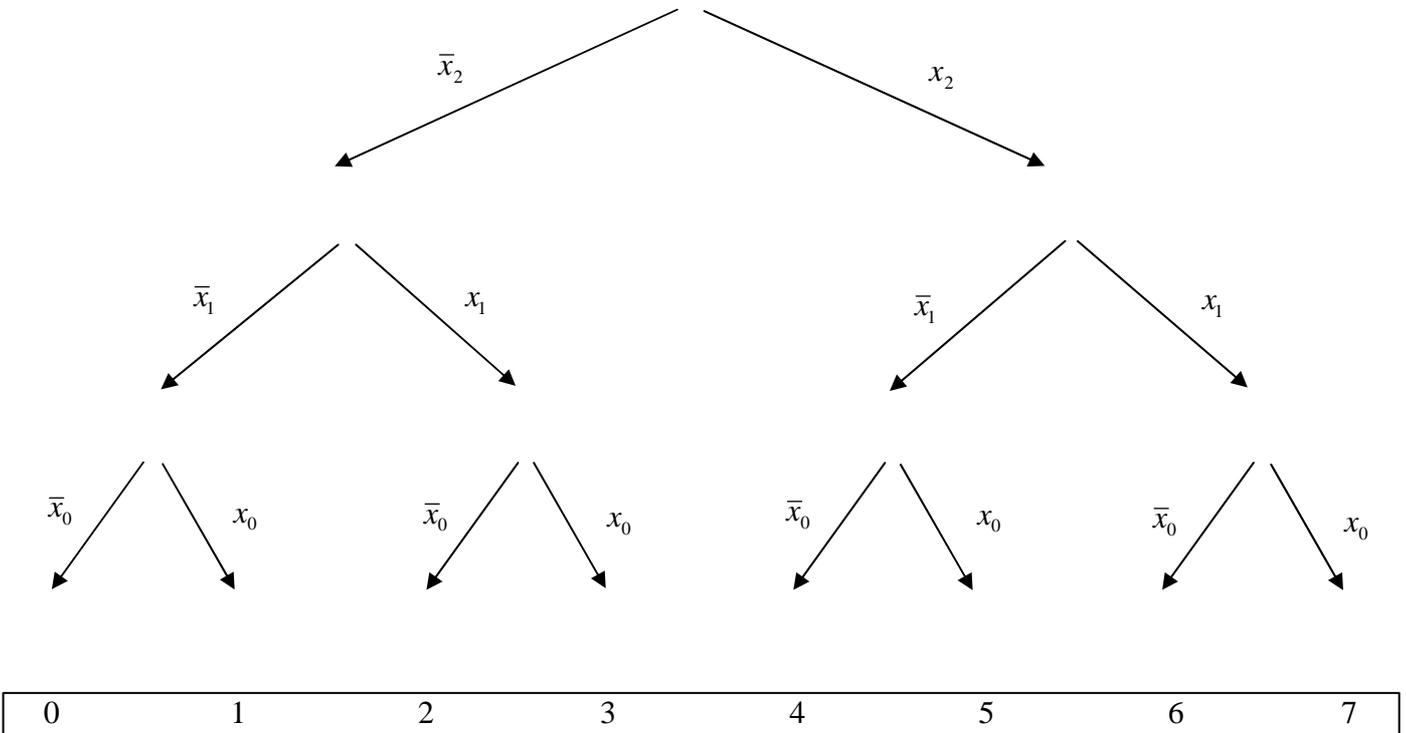
Normalformen				
Zahl	Eingangsvariablen x_2, x_1, x_0	Wert	Minterme	Maxterme
0	000			
1	001			
2	010			
3	011			
4	100			
5	101			
6	110			
7	111			

x_0				X	
0	1	1	0	0	x_1
0	1	5	4		
2	3	7	6	1	
0	0	1	1		
x_2					





Baumdarstellung



Beispiel:

Beispiel für logische Gleichung $Q = f(x_2, x_1, x_0) = (x_1 \vee x_0) \wedge \bar{x}_2$

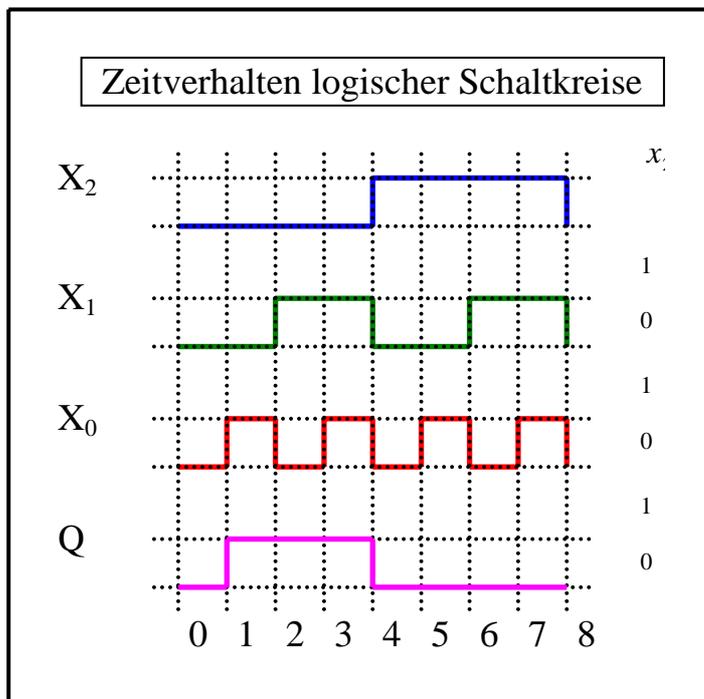
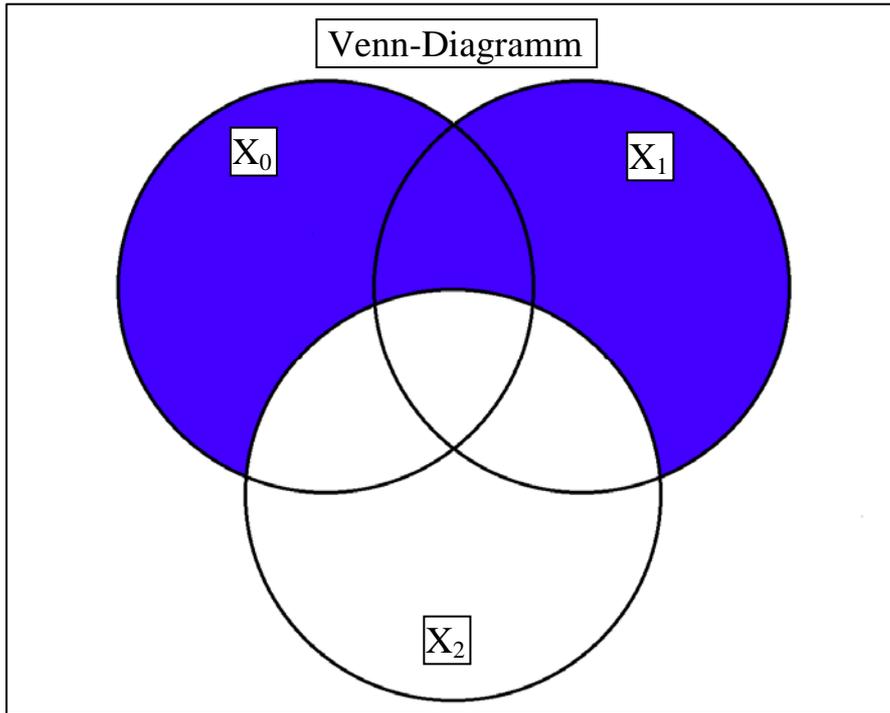
Normalformen			
Zahl	Eingangsvariablen x_2, x_1, x_0	Minterme	Maxterme
0	000		$x_2 \vee x_1 \vee x_0$
1	001	$\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_0$	
2	010	$\bar{x}_2 \wedge x_1 \wedge \bar{x}_0$	
3	011	$\bar{x}_2 \wedge x_1 \wedge x_0$	
4	100		$\bar{x}_2 \vee x_1 \vee x_0$
5	101		$\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0$
6	110		$\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0$
7	111		$\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0$

$$Q = \text{MIN}t(1,2,3)$$

$$Q = \text{MAX}t(0,4,5,6,7)$$

$$\begin{aligned} Q_{KDNF} = f_{KDNF}(x_2, x_1, x_0) &= \bar{x}_2 \wedge x_1 \wedge x_0 \vee \bar{x}_2 \wedge x_1 \wedge \bar{x}_0 \vee \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_0 \\ &= \bar{x}_2 x_1 x_0 \vee \bar{x}_2 x_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 x_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{KKNF} = f_{KKNF}(x_2, x_1, x_0) &= (x_2 \vee x_1 \vee x_0) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_1 \vee x_0) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0) \\ &\quad \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0) \\ &= (x_2 \vee x_1 \vee x_0)(\bar{x}_2 \vee x_1 \vee x_0)(\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0) \end{aligned}$$



Lösung:

1. Aufgabenkomplex - 1. Aufgabe

Darstellungsformen logischer Gleichungen

1. Bestimmen Sie die log. Gleichung entsprechend der logische Schaltung

$$Q = f(x_2, x_1, x_0) = \bar{x}_2 \vee x_1 x_0 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_0$$

2. Bestimmen Sie die Wertetabelle entsprechend der logische Gleichung
3. Bestimmen Sie die Minterme und die kanonisch disjunktive Normalform
4. Bestimmen Sie die Maxterme und die kanonisch konjunktive Normalform

1. Methode:

Bestimmung der Minterme durch Ergänzung nach dem Shannonschen Entwicklungssatz

$$\begin{aligned} Q &= f(x_2, x_1, x_0) = \bar{x}_2 \vee x_1 x_0 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_0 \\ &= \bar{x}_2 (x_1 \vee \bar{x}_1) (x_0 \vee \bar{x}_0) \vee (x_2 \vee \bar{x}_2) x_1 x_0 \vee (x_2 \vee \bar{x}_2) \bar{x}_1 \bar{x}_0 \\ &= (\bar{x}_2 x_1 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1) (x_0 \vee \bar{x}_0) \vee (x_2 \vee \bar{x}_2) x_1 x_0 \vee (x_2 \vee \bar{x}_2) \bar{x}_1 \bar{x}_0 \\ &= (\bar{x}_2 x_1 x_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 x_0) \vee (\bar{x}_2 x_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0) \vee (x_2 x_1 x_0 \vee \bar{x}_2 x_1 x_0) \vee (x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0) \\ &= \bar{x}_2 x_1 x_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_2 x_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee x_2 x_1 x_0 \vee \bar{x}_2 x_1 x_0 \vee x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \\ &= x_2 x_1 x_0 \vee x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_2 x_1 x_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_2 x_1 \bar{x}_0 \end{aligned}$$

$$Q = \text{MIN}t(0,1,2,3,4,7)$$

$$Q = \text{MAX}t(5,6)$$

$$Q_{KDNF} = f_{KDNF}(x_2, x_1, x_0) = x_2 x_1 x_0 \vee x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_2 x_1 x_0 \vee \bar{x}_2 x_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0$$

$$Q_{KKNF} = f_{KKNF}(x_2, x_1, x_0) = (\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0) (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0)$$

2. Methode: Bestimmung der Minterme

$$Q = f(x_2, x_1, x_0) = Q = f(x_2, x_1, x_0) = \bar{x}_2 \vee x_1 x_0 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_0$$

$$\bar{x}_1 \bar{x}_0 = 1 \leftrightarrow a00$$

$$\Rightarrow 000$$

100

$MINt(0,4)$

$$x_1 x_0 = 1 \leftrightarrow a11$$

$$\Rightarrow 011$$

111

$MINt(3,7)$

$$\bar{x}_2 = 1 \leftrightarrow 0ab$$

$$\Rightarrow 00b$$

01b

$$000 \quad 001$$

010 \quad 011

$MINt(0,1,2,3)$

$$Q = MINt(0,1,2,3,4,7)$$

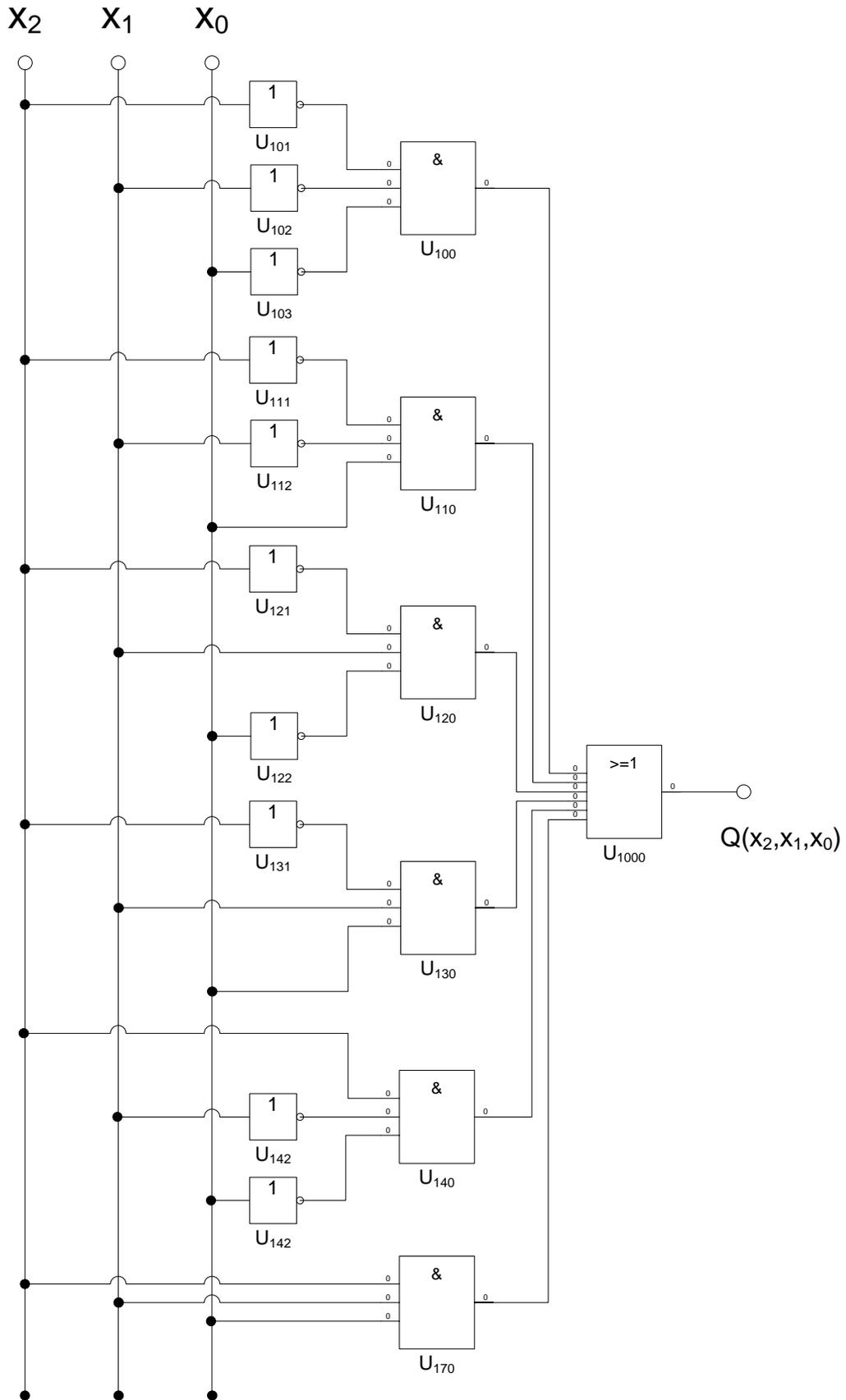
$$Q = MAXt(5,6)$$

$$Q_{KDNF} = f_{KDNF}(x_2, x_1, x_0) = x_2 x_1 x_0 \vee x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_2 x_1 x_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_2 x_1 \bar{x}_0$$

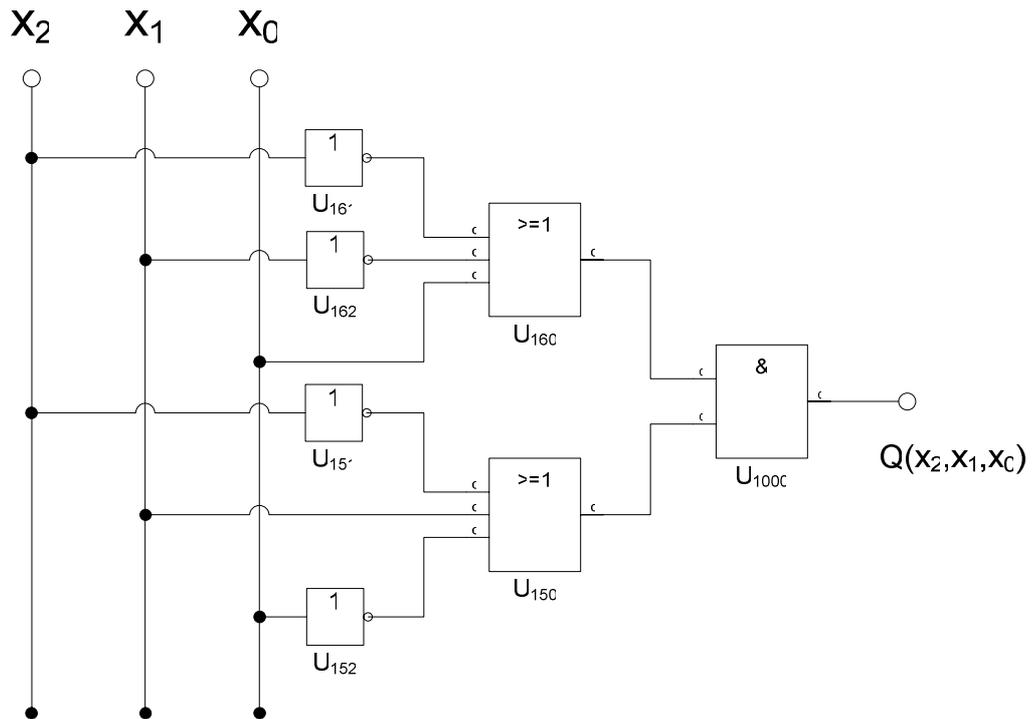
$$Q_{KKNF} = f_{KKNF}(x_2, x_1, x_0) = (\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0)$$

Normalformen				
Zahl	Eingangsvariablen x_2, x_1, x_0	Wert	Minterme	Maxterme
0	000	1	$\bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0$	
1	001	1	$\bar{x}_2 \bar{x}_1 x_0$	
2	010	1	$\bar{x}_2 x_1 \bar{x}_0$	
3	011	1	$\bar{x}_2 x_1 x_0$	
4	100	1	$x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0$	
5	101			$(\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0)$
6	110			$(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0)$
7	111	1	$\bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0$	

5. Bestimmen Sie die Schaltung streng entsprechend der kanonisch disjunktiven Normalform



6. Bestimmen Sie die Schaltung streng entsprechend der kanonisch konjunktiven Normalform



7. Bestimmen Sie das KV-Diagramm

x ₀				X	
0	1	1	0		
1	1		1	0	x ₁
0	1	5	4		
1	1	1		1	x ₁
2	3	7	6		
0	0	1	1		
x ₂					

8. Bestimmen Sie Implikanten 0. Ordnung und höher

$$I(0)=\{0,1,2,3,4,7\}$$

$$I(1)=\{(0,1),(0,2),(0,4),(1,3),(2,3),(3,7)\}$$

$$I(2)=\{(0,1,2,3)\}$$

9. Bestimmen Sie Primimplikanten 0. Ordnung und höher

$$PI(0)=\text{keine}$$

$$PI(1)=\{(0,4),(3,7)\}$$

$$PI(2)=\{(0,1,2,3)\}$$

10. Bestimmen Sie Kernprimimplikanten 0. Ordnung und höher

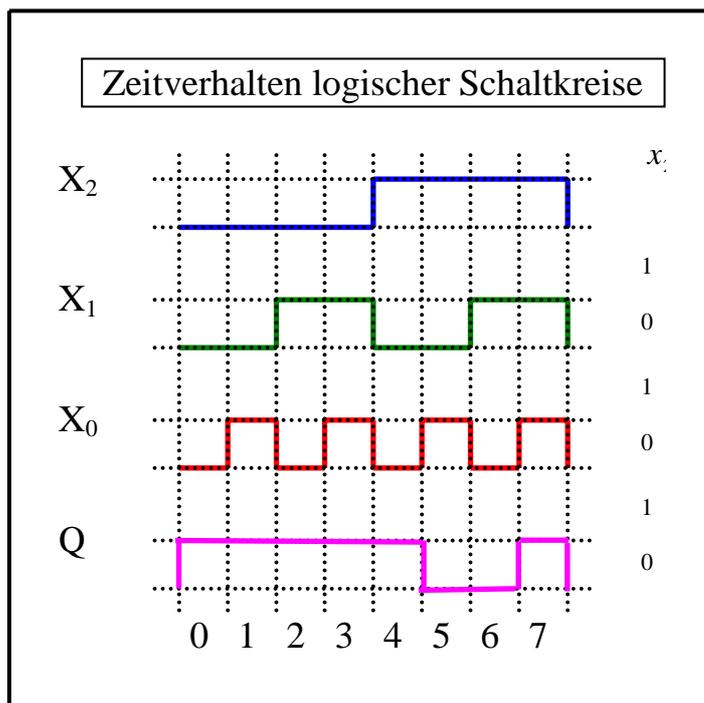
$$KPI(0)=\text{keine}$$

$$KPI(1)=\{(0,4),(3,7)\}$$

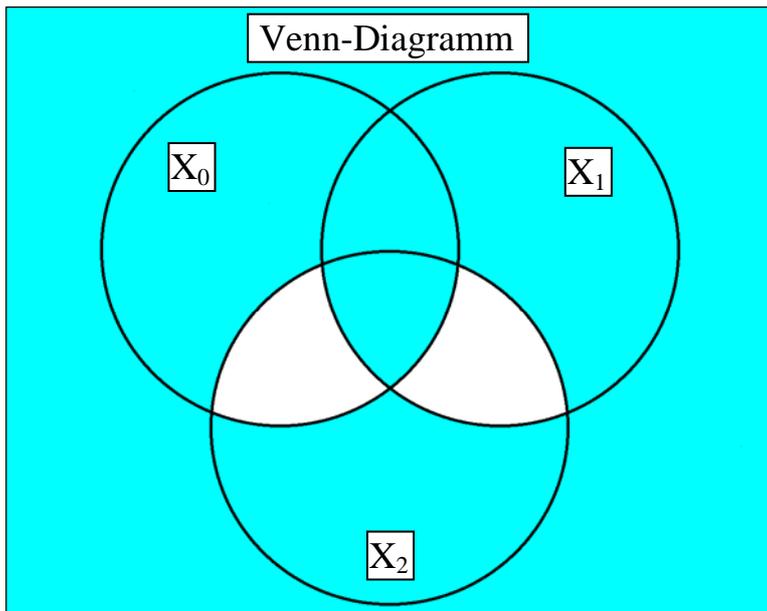
$$KPI(2)=\{(0,1,2,3)\}$$

Die Kernprimimplikanten entsprechen den Primimplikanten

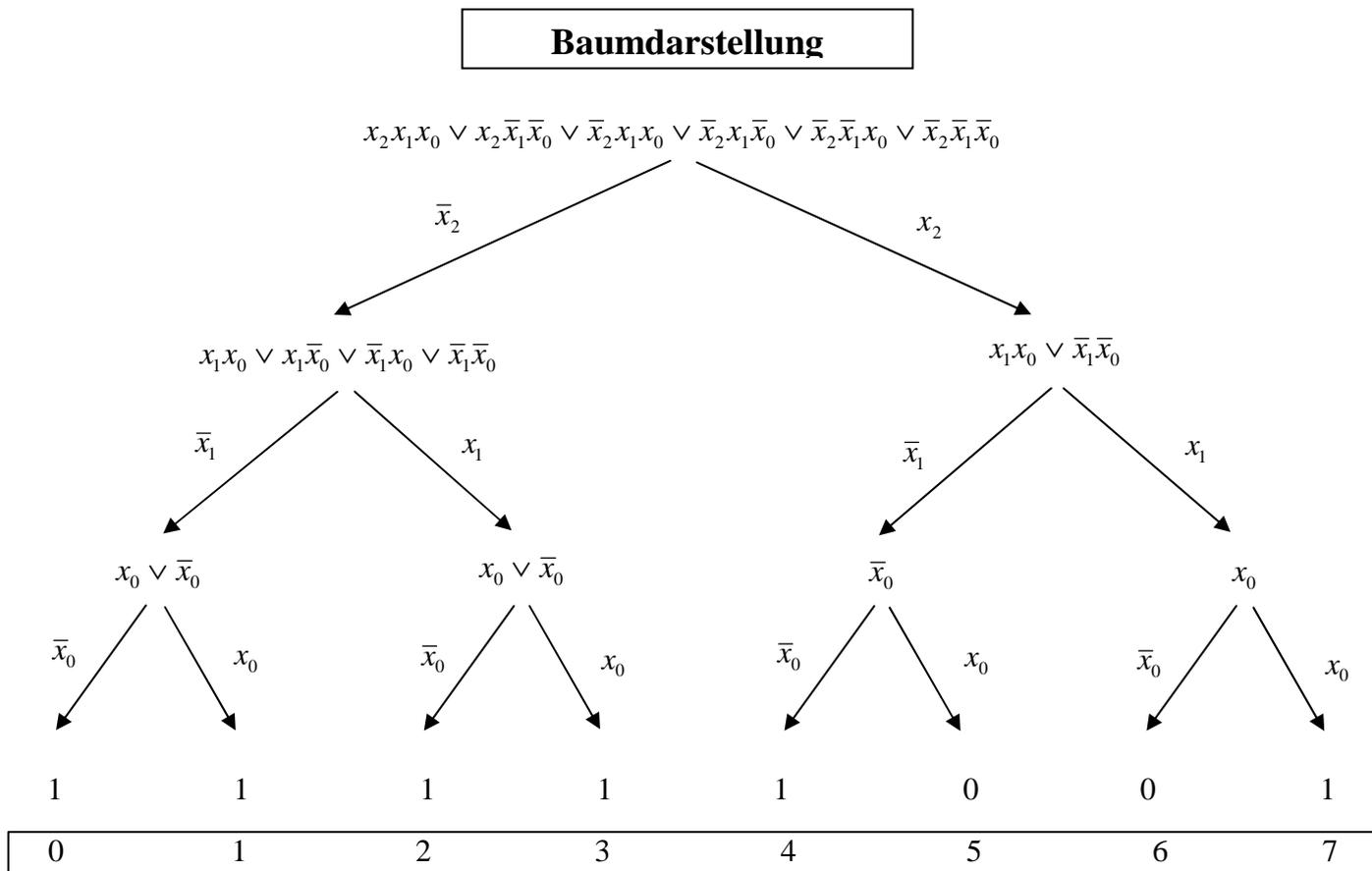
11. Bestimmen Sie das Zeitverhalten



12. Bestimmen Sie das Venn-Diagramm

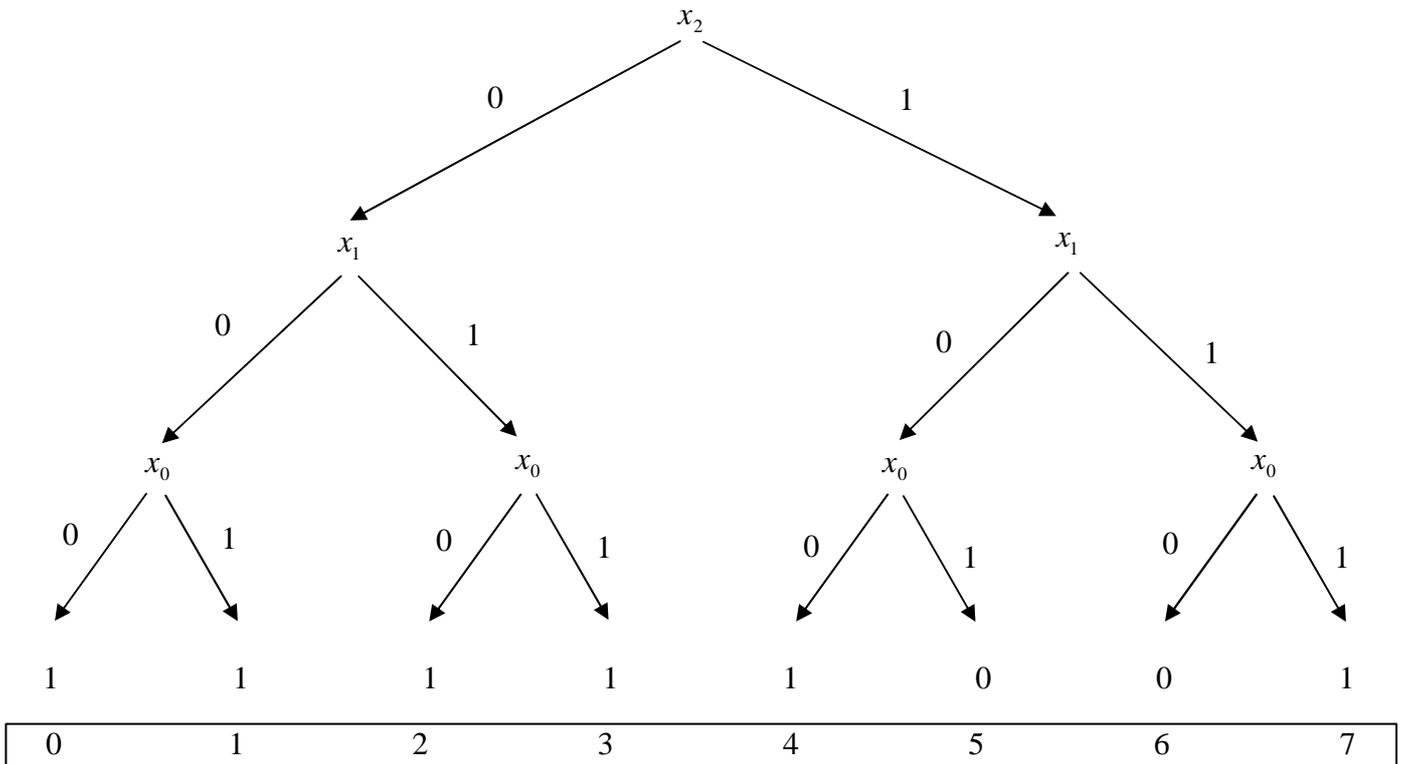


13. Bestimmen Sie die Baumdarstellung in der Reihenfolge x_2, x_1, x_0 (von oben nach unten).



14. Bestimmen Sie das Binary Decision Diagram in der Reihenfolge x_2, x_1, x_0 (von oben nach unten).

Binary Decision Diagram (BDD)

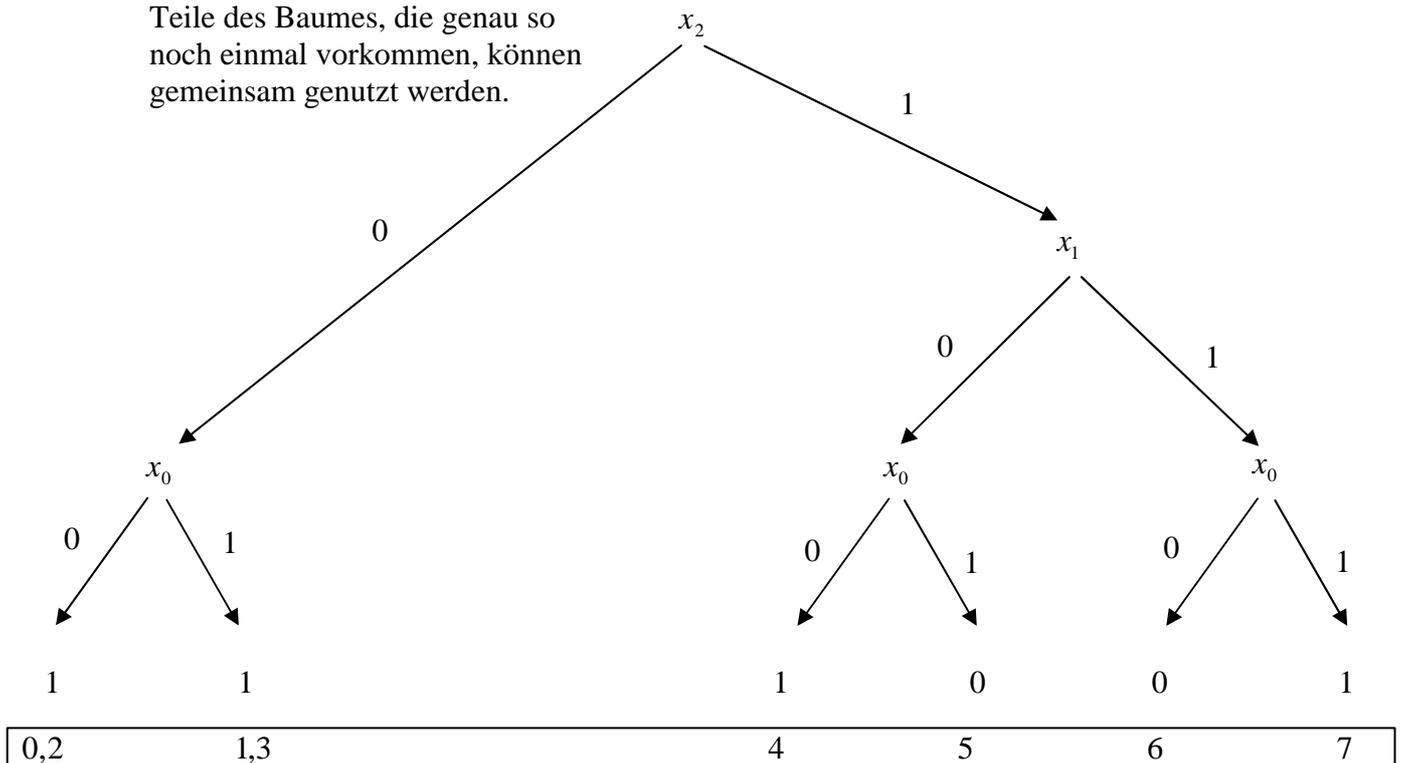


15. Bestimmen Sie das Reduced Ordered BDD (ROBDD) in der Reihenfolge x_2, x_1, x_0 (von oben nach unten).

Binary Decision Diagram (BDD)

Regel 2

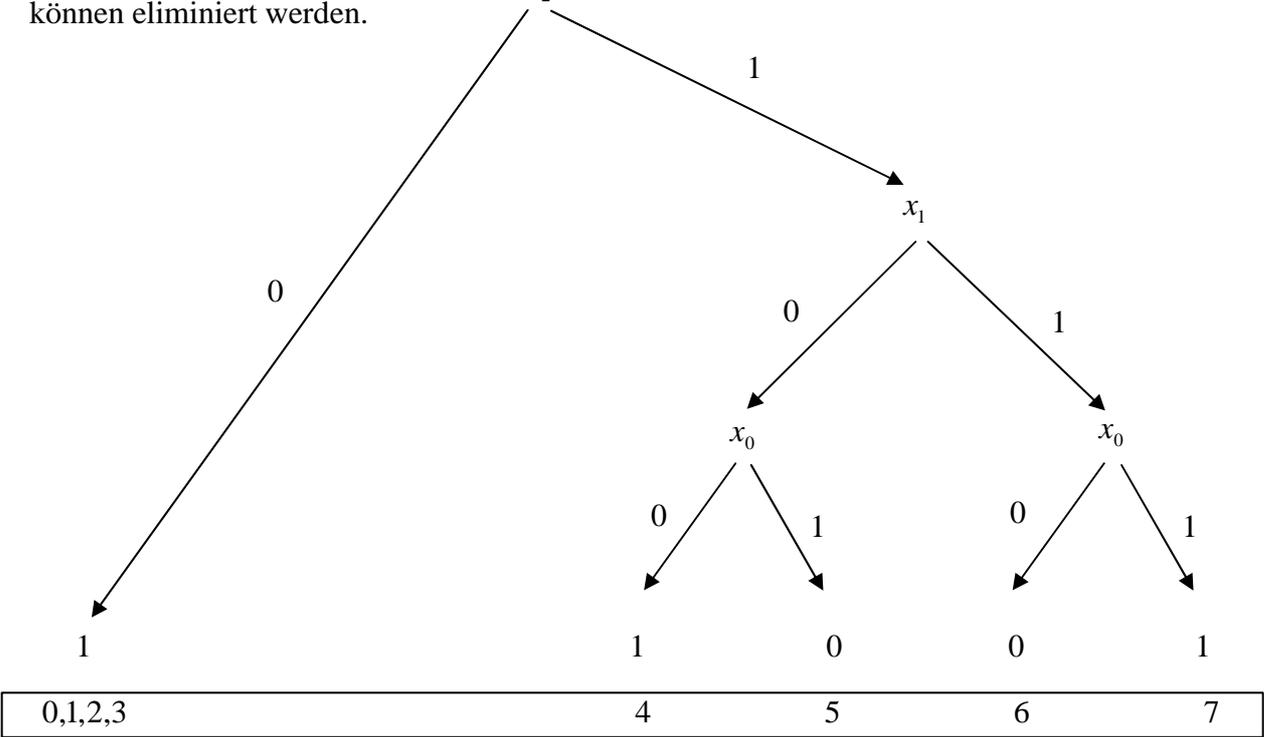
Teile des Baumes, die genau so noch einmal vorkommen, können gemeinsam genutzt werden.



Binary Decision Diagram (BDD)

Regel 1

Knoten, deren Nachfolger gleich sind, x_2
können eliminiert werden.



16. Bestimmen Sie die Gleichung und die Schaltung ausschließlich mit NAND-Gattern (NAND-Konversion)

Zweckmäßigerweise geht man von der Kanonisch Disjunktiven Normalform (KDNF) aus!

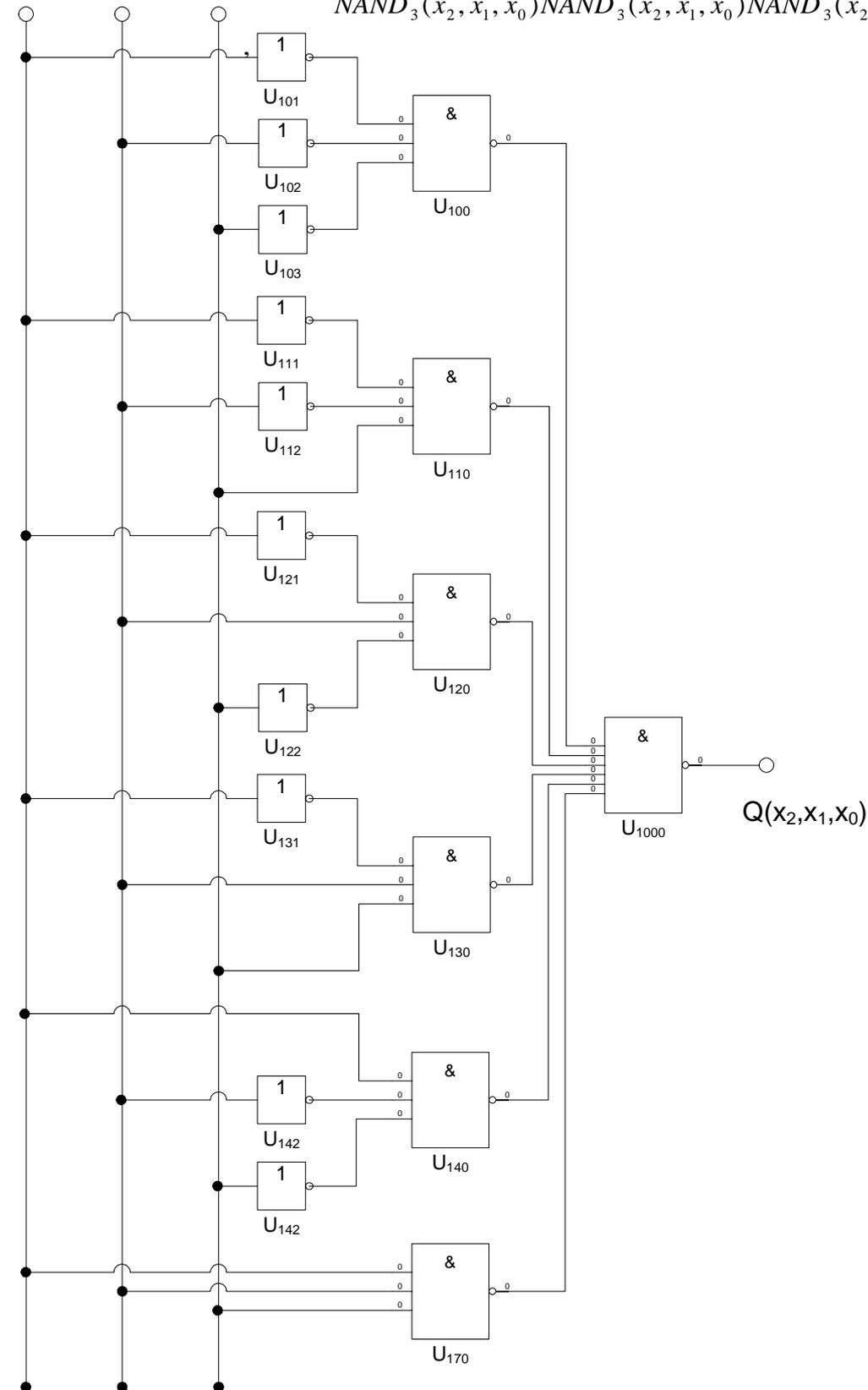
Unter Anwendung des DeMorgan Gesetzes $x_2 \vee x_1 = \overline{\overline{x_2} \wedge \overline{x_1}}$ erhält man:

$$Q_{KDNF} = x_2 x_1 x_0 \vee x_2 \overline{x_1} \overline{x_0} \vee \overline{x_2} x_1 x_0 \vee \overline{x_2} x_1 \overline{x_0} \vee \overline{x_2} \overline{x_1} x_0 \vee \overline{x_2} \overline{x_1} \overline{x_0}$$

$$= x_2 x_1 x_0 \vee x_2 \overline{x_1} \overline{x_0} \vee \overline{x_2} x_1 x_0 \vee \overline{x_2} x_1 \overline{x_0} \vee \overline{x_2} \overline{x_1} x_0 \vee \overline{x_2} \overline{x_1} \overline{x_0}$$

$$Q_{NAND} = \overline{\overline{x_2 x_1 x_0} \wedge \overline{x_2 \overline{x_1} \overline{x_0}} \wedge \overline{\overline{x_2} x_1 x_0} \wedge \overline{\overline{x_2} x_1 \overline{x_0}} \wedge \overline{\overline{x_2} \overline{x_1} x_0} \wedge \overline{\overline{x_2} \overline{x_1} \overline{x_0}}}$$

$$Q(x_2, x_1, x_0) = \text{NAND}_6[\text{NAND}_3(x_2, x_1, x_0) \text{NAND}_3(x_2, \overline{x_1}, \overline{x_0}) \text{NAND}_3(\overline{x_2}, x_1, x_0) \text{NAND}_3(\overline{x_2}, x_1, \overline{x_0}) \text{NAND}_3(\overline{x_2}, \overline{x_1}, x_0) \text{NAND}_3(\overline{x_2}, \overline{x_1}, \overline{x_0})]$$



17. Bestimmen Sie die Gleichung und die Schaltung ausschließlich mit NOR-Gattern (NOR-Konversion)

Zweckmäßigerweise geht man von der Kanonisch Konjunktiven Normalform (KKNF) aus!

Unter Anwendung des DeMorgan Gesetzes $\overline{x_2 \wedge x_1} = \overline{x_2} \vee \overline{x_1}$ erhält man:

$$Q_{KKNF} = (\overline{x_2} \vee x_1 \vee \overline{x_0})(\overline{x_2} \vee \overline{x_1} \vee x_0)$$

$$= \overline{(\overline{x_2} \vee x_1 \vee \overline{x_0})(\overline{x_2} \vee \overline{x_1} \vee x_0)}$$

$$Q_{NOR} = \overline{(\overline{x_2} \vee x_1 \vee \overline{x_0})} \vee \overline{(\overline{x_2} \vee \overline{x_1} \vee x_0)}$$

$$= NOR_2[NOR_3(\overline{x_2}, x_1, \overline{x_0}) NOR_3(\overline{x_2}, \overline{x_1}, x_0)]$$

