Universität Leipzig
Institut für Informatik

Prof. Dr. Manfred Droste
Erik Paul

Übungsaufgaben zur Lehrveranstaltung

Automatentheorie

Serie 12

Hausaufgabe 12.1 (6 Punkte)

Seien $\{s_i\}_{i\in I}$ und $\{t_j\}_{j\in J}$ lokal-endliche Familien von formalen Potenzreihen über einem Alphabet A und einem beliebigen Semiring $(S,+,\cdot,0,1)$. Beweisen Sie, dass

- $(s_i \cdot t_j)_{(i,j)\in I\times J}$ eine lokal-endliche Potenzreihe ist und
- die Gleichung

$$\left(\sum_{i\in I} s_i\right) \cdot \left(\sum_{j\in J} t_j\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} s_i \cdot t_j$$

  gilt.

Hausaufgabe 12.2 (4 Punkte)

Sei $A = \{a,b\}$ ein Alphabet und $S = (S,+,\cdot,0,1)$ ein Semiring. Weiter seien die formalen Potenzreihen $s,t \in S\langle\langle A^*\rangle\rangle$ definiert durch

$$\begin{aligned} s &= ((1a+1b)^*)^2 \\ t &= ((1a+1a)^2)^* \quad . \end{aligned}$$

Bestimmen Sie s und t explizit jeweils für

(a) $S = (\mathbb{N}_0,+,\cdot,0,1)$,

(b) $S = (\mathbb{Z}\cup\{-\infty\},\max,+,-\infty,0)$.

Hausaufgabe 12.3 (2 Punkte)

Geben Sie rationale Ausdrücke für die folgenden formalen Potenzreihen über dem Alphabet $A = \{a,b\}$ und dem Semiring $(\mathbb{Z},+,\cdot,0,1)$ an.

(a) $s\colon w \mapsto \begin{cases} 2 & \text{falls } |w|_a \text{ gerade und } |w|_b \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } |w|_a + |w|_b \equiv 1 \mod 2 \\ -2 & \text{falls } |w|_a \text{ ungerade und } |w|_b \text{ ungerade} \end{cases}$

(b) $s\colon w \mapsto |w|$

Seminaraufgabe 12.4

Bestimmen Sie explizit die formalen Potenzreihen über dem Alphabet $A = \{a,b\}$ und dem Semiring $(\mathbb{Z},+,\cdot,0,1)$, die durch die folgenden rationalen Ausdrücke definiert sind.

(a) $(1a + 1b)^2$

(b) $(2a + 3b)^*$

(c) $(1a \cdot 2b)^*$

Seminaraufgabe 12.5
Geben Sie rationale Ausdrücke für die folgenden formalen Potenzreihen über dem Alphabet $A = \{a, b\}$ und dem Semiring $(\mathbb{N}_0 \cup \{-\infty\}, \max, +, -\infty, 0)$ an.

(a) $s\colon w \mapsto |w|$

(b) $s\colon w \mapsto \max\{|w|_a, |w|_b\}$

(c) $s\colon w \mapsto \max\{|u|_a + |v|_b \mid w = uv\}$

(d) $s\colon w \mapsto \max\{n \in \mathbb{N}_0 \mid w \in A^* a^n A^*\}$

Seminaraufgabe 12.6
Sei A ein Alphabet und $(S, +, \cdot, 0, 1)$ ein Semiring. Eine formale Potenzreihe $s\colon A^* \to S$ heißt *erkennbare Stufenfunktion*, falls erkennbare Sprachen $L_1, \ldots, L_n \subseteq A^*$ und Elemente $k_1, \ldots, k_n$ aus S existieren sodass

$$s = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot \mathbb{1}_{L_i} \quad .$$

Zeigen Sie, dass jede erkennbare Stufenfunktion von einem deterministischen gewichteten Automaten (vgl. HA 10.2) über A und $(S, +, \cdot, 0, 1)$ erkannt werden kann.

Termine:

- Die Hausaufgaben können in Gruppen zu je zwei Personen bearbeitet werden. Alle abgegebenen Aufgaben müssen vorgerechnet werden können.
- Die Abgabe der Hausaufgaben erfolgt am 31.01.2020 entweder vor der Vorlesung oder bis 12:00 Uhr mittags im Briefkasten „Automatentheorie“ (Poststelle im Augusteum, Raum A514, 5. Etage). Beschriften Sie bitte *jedes* Lösungsblatt mit Name(n) und Matrikelnummer(n).
- Die Seminaraufgaben werden in der Übung am 27.01.2020 besprochen.