

Übungsaufgaben zur Lehrveranstaltung  
Automatentheorie

Serie 10

---

---

**Hausaufgabe 10.1 (8 Punkte)**

Welche der folgenden Strukturen bilden einen Semiring? Begründen Sie Ihre Antwort.

- (a)  $([-1, 1], \max, \oplus)$  wobei  $x \oplus y = \max\{-1, \min\{1, x + y\}\}$ ,
- (b)  $([0, 1], \max, \odot)$  wobei  $x \odot y = \max\{0, x + y - 1\}$  für  $x, y \in [0, 1]$ ,
- (c)  $(\mathbb{N}_0, \text{kgV}, \text{ggT})$  wobei  $m \text{ kgV } n$  das kleinste gemeinsame Vielfache und  $m \text{ ggT } n$  der größte gemeinsame Teiler von  $m, n \in \mathbb{N}_0$  ist,
- (d)  $(\mathcal{P}(X), \cap, \Delta)$  für die Potenzmenge  $\mathcal{P}$  einer Menge  $X$  und die *symmetrische Differenz*  $X \Delta Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$ ,

**Hausaufgabe 10.2 (4 Punkte)**

Seien  $A$  ein Alphabet und  $(S, +, \cdot, 0, 1)$  ein Semiring. Ein gewichteter Automat  $\mathcal{A} = (Q, \text{in}, \text{wt}, \text{out})$  über  $A$  und  $S$  heißt *deterministisch*, falls

- es für jedes Paar  $(p, a) \in Q \times A$  höchstens ein  $q \in Q$  mit  $\text{wt}(p, a, q) \neq 0$  gibt und
- es höchstens ein  $q \in Q$  mit  $\text{in}(q) \neq 0$  gibt.

Zeigen Sie, dass das Verhalten  $s: A^* \rightarrow \mathbb{N}_0, w \mapsto |w|$

- (a) von einem deterministischen gewichteten Automaten über  $A$  und dem Semiring  $(\mathbb{N}_0 \cup \{-\infty\}, \max, +, -\infty, 0)$  erkannt wird.
- (b) zwar von einem gewichteten Automaten über  $A$  und  $(\mathbb{N}_0, +, \cdot, 0, 1)$  erkannt wird, aber von keinem deterministischen gewichteten Automaten über  $A$  und dem Semiring  $(\mathbb{N}_0, +, \cdot, 0, 1)$  erkannt wird.

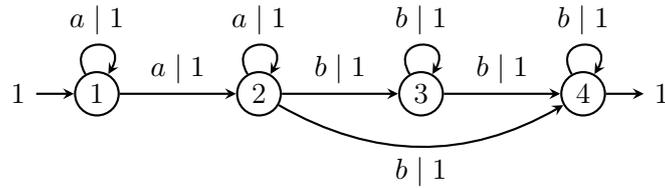
**Seminaraufgabe 10.3**

Geben Sie jeweils einen gewichteten Automaten  $\mathcal{A}$  über dem Alphabet  $A = \{a, b\}$  und dem Semiring  $(\mathbb{N}_0 \cup \{-\infty\}, \max, +, -\infty, 0)$  mit dem folgenden Verhalten an.

- (a)  $\|\mathcal{A}\|(w) = \max\{n \in \mathbb{N}_0 \mid w \in A^* a^n A^*\}$
- (b)  $\|\mathcal{A}\|(w) = \max\{|u|_a + |v|_b \mid w = uv\}$

**Seminaraufgabe 10.4**

Bestimmen Sie das Verhalten des folgenden gewichteten Automaten über dem Alphabet  $A = \{a, b\}$  und dem Semiring  $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ .



### Seminaraufgabe 10.5

Sei  $A = \{a, b\}$  ein Alphabet. Geben Sie eine Funktion  $s: A^* \rightarrow \mathbb{Q}$  an, die nicht von einem gewichteten Automaten über  $A$  und dem Semiring  $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$  erkannt wird.

### Termine:

- Die Hausaufgaben können in Gruppen zu je zwei Personen bearbeitet werden. Alle abgegebenen Aufgaben müssen vorgerechnet werden können.
- Die Abgabe der Hausaufgaben erfolgt am 17.01.2020 entweder vor der Vorlesung oder bis 12:00 Uhr mittags im Briefkasten „Automatentheorie“ (Poststelle im Augusteum, Raum A514, 5. Etage). Beschriften Sie bitte *jedes* Lösungsblatt mit Name(n) und Matrikelnummer(n).
- Die Seminaraufgaben werden in der Übung am 13.01.2020 besprochen.