Universität Leipzig
Institut für Informatik

Prof. Dr. Manfred Droste
Erik Paul

Übungsaufgaben zur Lehrveranstaltung

Automatentheorie

Serie 7

Hausaufgabe 7.1 (4 Punkte)

Seien A, B, C Mengen. Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen bijektiv sind.

(a) $F\colon [A \to [B \to C]] \to [A \times B \to C], f \mapsto ((a, b) \mapsto f(a)(b))$,

(b) $G\colon \mathrm{Rel}(A, B, C) \to [A \to \mathrm{Rel}(B, C)], R \mapsto (a \mapsto \{(b, c) \mid (a, b, c) \in R\})$.

Hierbei bezeichnet

$[M \to N]$ die Menge der (totalen) Abbildungen von M nach N,

$\mathrm{Rel}(M_1, \ldots, M_n)$ die Menge der n-stelligen Relationen zwischen $M_1, \ldots, M_n$.

Hausaufgabe 7.2 (8 Punkte)

Wir betrachten die Struktur $(S, \leq)$, in der S eine Menge und $\leq$ eine partielle Ordnung auf S ist, d.h. $\leq$ ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv.
Geben Sie Sätze der monadischen Logik zweiter Stufe an, die die folgenden Eigenschaften beschreiben.

(a) $(S, \leq)$ ist linear geordnet, d.h. für alle $a, b \in S$ gilt $a \leq b$ oder $b \leq a$.

(b) Es gibt keine unendliche Folge $a_1 \leq a_2 \leq \ldots$ mit paarweise verschiedenen Elementen $a_i \in S$.

(c) $(S, \leq)$ ist linear und endlich.

(d) $(S, \leq)$ ist linear und endlich und die Kardinalität von S ist ungerade.

Hinweis: Es ist hilfreich, sich eine Formel der Form “$y = x + 1$” wie in der Vorlesung zu definieren. Auch darf die Identitätsrelation “=” auf dem Universum unabhängig der gegebenen Signatur stets in Formeln verwendet werden.

Seminaraufgabe 7.3

Wir betrachten die Struktur $G = (E, K, R_a, R_b)$ eines ungerichteten Graphen mit Eckenbeschriftungen a und b, d.h. $K \subseteq E \times E$ ist irreflexiv und symmetrisch und $R_a, R_b \subseteq E$ sind einstellige Relationen mit $R_a \cap R_b = \emptyset$ und $R_a \cup R_b = E$.
Geben Sie Formeln der monadischen Logik zweiter Stufe an, die die folgenden Eigenschaften beschreiben.

(a) Wenn eine Ecke $e \in E$ mit a beschriftet ist, so ist keine Nachbarecke von e (bezüglich der Kantenrelation K) mit a beschriftet.

(b) Jede Ecke $e \in E$ hat maximal zwei Nachbarecken.

(c) Es gibt eine Clique der Größe n in G, wobei $n \in \mathbb{N}$ fest.

(d) G ist bipartit.

(e) G ist zusammenhängend.

(f) Es existiert ein Pfad von Ecke x zu Ecke y.

Seminaraufgabe 7.4
Wir betrachten die Struktur $(G, \circ, \cdot^{-1}, e)$ einer Gruppe.
Geben Sie Sätze der monadischen Logik zweiter Stufe an, die die folgenden Eigenschaften beschreiben.

(a) X ist eine Untergruppe von G.

(b) X ist ein Normalteiler von G.

(c) G wird von n Elementen erzeugt, wobei $n \in \mathbb{N}$ fest.

Termine:

- Die Hausaufgaben können in Gruppen zu je zwei Personen bearbeitet werden. Alle abgegebenen Aufgaben müssen vorgerechnet werden können.
- Die Abgabe der Hausaufgaben erfolgt am 13.12.2019 entweder vor der Vorlesung oder bis 12:00 Uhr mittags im Briefkasten „Automatentheorie“ (Poststelle im Augusteum, Raum A514, 5. Etage). Beschriften Sie bitte *jedes* Lösungsblatt mit Name(n) und Matrikelnummer(n).
- Die Seminaraufgaben werden in der Übung am 09.12.2019 besprochen.