Universität Leipzig
Institut für Informatik

Prof. Dr. Manfred Droste
Erik Paul

Übungsaufgaben zur Lehrveranstaltung

Automatentheorie

Serie 6

Hausaufgabe 6.1 (6 Punkte)

Welche der folgenden Monoide sind aperiodisch?

(a) $(\mathbb{N}_0, \max, 0)$

(b) $(\{1,2\}^{\{1,2\}}, \circ, \mathrm{id})$, also das Monoid von Selbstabbildungen der Menge $\{1,2\}$.

(c) $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, [0])$, die Gruppe der Restklassen modulo n mit Addition, für $n \geq 2$.

Beweisen Sie Ihre Antwort indem Sie für das entsprechende Monoid $(M, \cdot, 1)$ entweder eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ angeben, so dass $x^{n+1} = x^n$ für alle $x \in M$ gilt oder dass es für alle $n \in \mathbb{N}$ wenigstens ein Element $x \in M$ gibt, so dass $x^{n+1} \neq x^n$.

Hausaufgabe 6.2 (6 Punkte)

Sei $(M, \cdot, 1)$ ein endliches Monoid. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) M ist aperiodisch.

(b) M ist gruppenfrei, d.h. jede Unterhalbgruppe von M mit mehr als einem Element ist keine Gruppe.

(c) M ist lokal aperiodisch, d.h. für jedes $x \in M$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n = x^{n+1}$.

Eine nichtleere Menge $H \subseteq M$ heißt *Unterhalbgruppe*, falls für alle $x, y \in H$ gilt $xy \in H$.

Hinweis: Eine Unterhalbgruppe H von M enthält nicht unbedingt ein neutrales Element. Falls H ein neutrales Element enthält, kann dieses verschieden vom neutralen Element von M sein.

Seminaraufgabe 6.1

Zeigen Sie, dass die Sprache $\{ab, ba\}^*$ über dem Alphabet $A = \{a, b\}$ sternfrei ist.

Seminaraufgabe 6.2

Seien M, M' Monoide und $f\colon M \to M'$ ein Homomorphismus. Weiter seien $L' \subseteq M'$ und $L = f^{-1}(L')$. Zeigen Sie die folgenden beiden Aussagen.

(a) Ist L' aperiodisch, so auch L.

(b) Ist f surjektiv und L aperiodisch, so auch L'.

Seminaraufgabe 6.3
Sei A ein Alphabet, $L, L' \subseteq A^*$ aperiodische Sprachen und sei $n = i(L) + i(L') + 1$. Zeigen Sie, dass die Implikation

$$xy^{n+1}z \in L \cdot L' \implies xy^n z \in L \cdot L'$$

für alle $x, y, z \in A^*$ gilt.
Hinweis: Gehen Sie dazu wie im Beweis von Theorem 3.5 vor.

Termine:

- Die Hausaufgaben können in Gruppen zu je zwei Personen bearbeitet werden. Alle abgegebenen Aufgaben müssen vorgerechnet werden können.
- Die Abgabe der Hausaufgaben erfolgt am 06.12.2019 entweder vor der Vorlesung oder bis 12:00 Uhr mittags im Briefkasten „Automatentheorie“ (Poststelle im Augusteum, Raum A514, 5. Etage). Beschriften Sie bitte *jedes* Lösungsblatt mit Name(n) und Matrikelnummer(n).
- Die Übung am 02.12.2019 findet aufgrund des Dies Academicus nicht statt. Sie sind herzlich zum Festkolloquium ab 13 Uhr s. t. im Felix-Klein-Hörsaal eingeladen, zu dem üblicherweise auch Wein und Süßes gereicht wird.