Universität Leipzig
Institut für Informatik

Prof. Dr. Manfred Droste
Erik Paul

Übungsaufgaben zur Lehrveranstaltung

Automatentheorie

Serie 1

Hausaufgabe 1.1 (5 Punkte)

Finden Sie endliche Automaten, die die folgenden Sprachen über dem endlichen Alphabet $A = \{a, b\}$ erkennen:

(a) $\emptyset$

(b) $\{\varepsilon\}$

(c) $\{a\}$

(d) $\{ba\}$

(e) $\{b\}^*$

(f) A^*

(g) $(AA)^*$

(h) $A^*\{b\}A^*$

(i) $A^* \setminus (A^*\{abb\}A^*)$

(j) A^+

Hausaufgabe 1.2 (3 Punkte)

Konstruieren Sie einen Automaten über dem Alphabet $\{0, 1\}$, welcher die Sprache

$$L_3 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ ist die Binärdarstellung einer durch 3 teilbaren Zahl}\}$$

erkennt. Begründen Sie die Korrektheit Ihres Automaten.
Anmerkung: Der Automat soll z. B. das Wort 110 als Binärdarstellung von 6 erkennen und 000 als (eine) Binärdarstellung von 0.

Hausaufgabe 1.3 (4 Punkte)

Sei $\mathcal{A} = (Q, I, T, F)$ ein endlicher Automat über einem Alphabet A, in dem alle Zustände erreichbar sind. Hierbei nennen wir einen Zustand $q \in Q$ *erreichbar*, falls es einen Zustand $i \in I$, ein Wort $w \in A^*$ und einen Lauf $u \in T^*$ gibt sodass $u\colon i \overset{w}{\rightsquigarrow} q$.

Beweisen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) $\mathcal{A}$ ist deterministisch und vollständig.

(b) Für jedes Wort $w \in A^*$ existiert genau ein Lauf $u \in T^*$ mit Beschriftung (label) w und $\mathrm{dom}(u) \in I$.

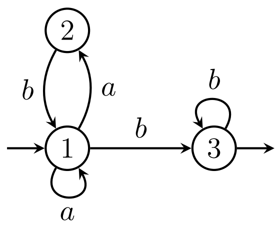
Seminaraufgabe 1.1

Finden Sie einen Automaten, der folgende Sprache über dem Alphabet $\{a, b\}$ akzeptiert:

$$\{w : |w|_a \text{ ist gerade und } |w|_b \text{ ist ungerade }\}.$$

Hierbei bezeichnet $|w|_x$ die Anzahl der Vorkommen des Buchstaben x im Wort w.

Seminaraufgabe 1.2
Wir betrachten den Automat $\mathcal{A} = (Q, I, T, F)$ über dem Alphabet $A = \{a, b\}$, der durch folgende Abbildung gegeben ist.



(a) Geben Sie einen regulären Ausdruck für die von $\mathcal{A}$ erkannte Sprache an.

(b) Finden Sie ein Wort $w \in A^*$ für welches 2 erfolgreiche Läufe $u, v \in T^*$ mit Beschriftung w existieren.

(c) Zeigen Sie, dass für jedes Wort $w \in A^*$ höchstens 2 erfolgreiche Läufe mit Beschriftung w existieren.

Seminaraufgabe 1.3
Das *Shuffle-Produkt* zweier Wörter $u, v \in A^*$ ist definiert durch

$$u \odot v = \{u_1 v_1 u_2 v_2 \dots u_n v_n \mid u_i, v_i \in A^*, u = u_1 u_2 \dots u_n, v = v_1 v_2 \dots v_n\}$$

und wird auf Sprachen $L, K \subseteq A^*$ erweitert durch $L \odot K = \bigcup_{u \in L, v \in K} u \odot v$.

(a) Berechnen Sie $ac \odot ba$.

(b) Sei $L = \{a^n \mid 2 \text{ teilt } n\}$ und $K = \{ba^m b \mid 6 \text{ teilt } m\}$. Berechnen Sie LK und $L \odot K$.

(c) Seien L und K erkennbar. Zeigen Sie, dass dann auch $L \odot K$ erkennbar ist.

Seminaraufgabe 1.4
Vervollständigen sie den Beweis von Lemma 1.6 c): zeigen Sie, dass es für jeden endlichen Automaten $\mathcal{A}$ einen normalisierten endlichen Automaten $\mathcal{A}_n$ gibt, so dass $L(\mathcal{A}_n) = L(\mathcal{A}) \setminus \{\epsilon\}$ gilt!

Termine:

- Die Hausaufgaben können in Gruppen zu je zwei Personen bearbeitet werden. Alle abgegebenen Aufgaben müssen vorgerechnet werden können.
- Die Abgabe der Hausaufgaben erfolgt am 25.10.2019 entweder vor der Vorlesung oder bis 12:00 Uhr mittags im Briefkasten „Automatentheorie“ (Poststelle im Augusteum, Raum A514, 5. Etage). Beschriften Sie bitte *jedes* Lösungsblatt mit Name(n) und Matrikelnummer(n).
- Die Seminaraufgaben werden in der Übung am 21.10.2019 besprochen.