Vorlesung “Formale Argumentation”

7. Definierbarkeit und Bezeugende Frameworks

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

23. Mai 2024
Leipzig

Definierbarkeit aka Realizability

. . . set the scene.

Gegeben einen logische Sprache $\mathcal{L}$ zusammen mit einer Semantik $\sigma_{\mathcal{L}} : 2^{\mathcal{L}} \rightarrow 2^{\mathcal{I}}$. Somit bekomme ich für jede $\mathcal{L}$-theorie $T \subseteq \mathcal{L}$ eine Menge von Modellen/Extensionen $\sigma_{\mathcal{L}}(T)$.

Definierbarkeit aka Realizability

. . . set the scene.

Gegeben einen logische Sprache $\mathcal{L}$ zusammen mit einer Semantik $\sigma_{\mathcal{L}} : 2^{\mathcal{L}} \to 2^{\mathcal{I}}$. Somit bekomme ich für jede $\mathcal{L}$-theorie $T \subseteq \mathcal{L}$ eine Menge von Modellen/Extensionen $\sigma_{\mathcal{L}}(T)$.

Zum Beispiel:

1. Aussagenlogik: $T = \{a, b \vee c\}$,
   $Mod(T) = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$

Definierbarkeit aka Realizability

... set the scene.

Gegeben einen logische Sprache $\mathcal{L}$ zusammen mit einer Semantik $\sigma_{\mathcal{L}} : 2^{\mathcal{L}} \to 2^{\mathcal{I}}$. Somit bekomme ich für jede $\mathcal{L}$-theorie $T \subseteq \mathcal{L}$ eine Menge von Modellen/Extensionen $\sigma_{\mathcal{L}}(T)$.

Zum Beispiel:

1. Aussagenlogik: $T = \{a, b \vee c\}$,
   $Mod(T) = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$
2. Argumentationtheorie: $F = (\{a, b\}, \{(a, b), (b, a)\})$,
   $stb(F) = \{\{a\}, \{b\}\}$

Definierbarkeit beschäftigt sich mit der Umkehrung, d.h.:

Definierbarkeit aka Realizability

. . . set the scene.

Gegeben einen logische Sprache $\mathcal{L}$ zusammen mit einer Semantik $\sigma_{\mathcal{L}} : 2^{\mathcal{L}} \to 2^{\mathcal{I}}$. Somit bekomme ich für jede $\mathcal{L}$-theorie $T \subseteq \mathcal{L}$ eine Menge von Modellen/Extensionen $\sigma_{\mathcal{L}}(T)$.

Zum Beispiel:

1. Aussagenlogik: $T = \{a, b \vee c\}$,
   $Mod(T) = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$
2. Argumentationtheorie: $F = (\{a, b\}, \{(a, b), (b, a)\})$,
   $stb(F) = \{\{a\}, \{b\}\}$

Definierbarkeit beschäftigt sich mit der Umkehrung, d.h.:

Gegeben eine Menge von Modellen/Extensionen $\mathbb{S} \subseteq \mathcal{I}$. Existiert eine $\mathcal{L}$-theorie T mit $\sigma_{\mathcal{L}}(T) = \mathbb{S}$?

Definierbarkeit

...set the scene.

Gegeben einen logische Sprache $\mathcal{L}$ zusammen mit einer Semantik $\sigma_{\mathcal{L}} : 2^{\mathcal{L}} \rightarrow 2^{\mathcal{I}}$. Somit bekomme ich für jede $\mathcal{L}$-theorie $T \subseteq \mathcal{L}$ eine Menge von Modellen/Extensionen $\sigma_{\mathcal{L}}(T)$.

Zum Beispiel:

1. Aussagenlogik: $T = \{a, b \vee c\}$,
   $Mod(T) = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$
2. Argumentationtheorie: $F = (\{a, b\}, \{(a, b), (b, a)\})$,
   $stb(F) = \{\{a\}, \{b\}\}$

Definierbarkeit beschäftigt sich mit der Umkehrung, d.h.:

Gegeben eine Menge von Modellen/Extensionen $\mathbb{S} \subseteq \mathcal{I}$. Existiert eine $\mathcal{L}$-theorie T mit $\sigma_{\mathcal{L}}(T) = \mathbb{S}$?

Definierbarkeit in der Aussagenlogik

…ist einfach. Warum?

Definierbarkeit in der Aussagenlogik

...ist einfach. Warum?

Proposition

Sei $\mathbb{S} = \{M_1, \ldots, M_n\}$ *eine endliche Menge von Interpretation mit* $M_i \subseteq \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m\} = \mathcal{A}$. *Es gilt* $Mod(\phi_{\mathbb{S}}) = \mathbb{S}$ *wobei*

Definierbarkeit in der Aussagenlogik

…ist einfach. Warum?

Proposition

Sei $\mathbb{S} = \{M_1, \ldots, M_n\}$ *eine endliche Menge von Interpretation mit* $M_i \subseteq \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m\} = \mathcal{A}$. *Es gilt* $Mod(\phi_{\mathbb{S}}) = \mathbb{S}$ *wobei*

- $\phi_{\mathbb{S}} = D_1 \vee D_2 \vee \ldots \vee D_n$ *(n Disjunkte)*

Definierbarkeit in der Aussagenlogik

...ist einfach. Warum?

Proposition

Sei $\mathbb{S} = \{M_1, \ldots, M_n\}$ *eine endliche Menge von Interpretation mit* $M_i \subseteq \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m\} = \mathcal{A}$. *Es gilt* $Mod(\phi_{\mathbb{S}}) = \mathbb{S}$ *wobei*

- $\phi_{\mathbb{S}} = D_1 \vee D_2 \vee \ldots \vee D_n$ *(n Disjunkte)*
- $D_i = \bigwedge_{a \in M_i} a \wedge \bigwedge_{a \in \mathcal{A} \setminus M_i} \neg a$ *(exakte Wahrheitsbedingung)*

Definierbarkeit in der Aussagenlogik

. . . ist einfach. Warum?

Proposition

Sei $\mathbb{S} = \{M_1, \dots, M_n\}$ *eine endliche Menge von Interpretation mit* $M_i \subseteq \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\} = \mathcal{A}$. *Es gilt* $Mod(\phi_{\mathbb{S}}) = \mathbb{S}$ *wobei*

- $\phi_{\mathbb{S}} = D_1 \vee D_2 \vee \dots \vee D_n$ *(n Disjunkte)*
- $D_i = \bigwedge_{a \in M_i} a \wedge \bigwedge_{a \in \mathcal{A} \setminus M_i} \neg a$ *(exakte Wahrheitsbedingung)*

Beispiel:

Sei $\mathbb{S} = \{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}, \{a_2, a_3\}\}$ und $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3\}$. Somit

Definierbarkeit in der Aussagenlogik

...ist einfach. Warum?

Proposition

Sei $\mathbb{S} = \{M_1, \ldots, M_n\}$ *eine endliche Menge von Interpretation mit* $M_i \subseteq \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m\} = \mathcal{A}$. *Es gilt* $Mod(\phi_{\mathbb{S}}) = \mathbb{S}$ *wobei*

- $\phi_{\mathbb{S}} = D_1 \vee D_2 \vee \ldots \vee D_n$ *(n Disjunkte)*
- $D_i = \bigwedge_{a \in M_i} a \wedge \bigwedge_{a \in \mathcal{A} \setminus M_i} \neg a$ *(exakte Wahrheitsbedingung)*

Beispiel:

Sei $\mathbb{S} = \{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}, \{a_2, a_3\}\}$ und $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3\}$. Somit

- $\phi_{\mathbb{S}} = D_1 \vee D_2 \vee D_3$ (3 Disjunkte)
- $D_1 = a_1 \wedge \neg a_2 \wedge \neg a_3$, $D_2 = a_1 \wedge a_2 \wedge \neg a_3$, $D_3 = \neg a_1 \wedge a_2 \wedge a_3$

Definierbarkeit in der Aussagenlogik

...ist einfach. Warum?

Proposition

Sei $\mathbb{S} = \{M_1, \ldots, M_n\}$ *eine endliche Menge von Interpretation mit* $M_i \subseteq \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m\} = \mathcal{A}$. *Es gilt* $Mod(\phi_{\mathbb{S}}) = \mathbb{S}$ *wobei*

- $\phi_{\mathbb{S}} = D_1 \vee D_2 \vee \ldots \vee D_n$ *(n Disjunkte)*
- $D_i = \bigwedge_{a \in M_i} a \wedge \bigwedge_{a \in \mathcal{A} \setminus M_i} \neg a$ *(exakte Wahrheitsbedingung)*

Beispiel:

Sei $\mathbb{S} = \{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}, \{a_2, a_3\}\}$ und $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3\}$. Somit

- $\phi_{\mathbb{S}} = D_1 \vee D_2 \vee D_3$ (3 Disjunkte)
- $D_1 = a_1 \wedge \neg a_2 \wedge \neg a_3$, $D_2 = a_1 \wedge a_2 \wedge \neg a_3$, $D_3 = \neg a_1 \wedge a_2 \wedge a_3$

Frage: Ist Definierbarkeit auch einfach für $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$?

Definierbarkeit in der Argumentationstheorie

Definition

Gegeben eine Semantik σ. Eine Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$ ist σ-realizable, sofern es ein AF F gibt mit: $\sigma(F) = \mathbb{S}$.

Definierbarkeit in der Argumentationstheorie

Definition

Gegeben eine Semantik σ. Eine Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$ ist σ-realizable, sofern es ein AF F gibt mit: $\sigma(F) = \mathbb{S}$.

Anmerkungen:

- Die Realizierbarkeit einer Menge $\mathbb{S}$ garantiert die Existenz eines Zeugen-AFs F. Dies heißt **nicht**, daß wir zwangsweise so ein F kennen.

Definierbarkeit in der Argumentationstheorie

Definition

Gegeben eine Semantik σ. Eine Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$ ist σ-realizable, sofern es ein AF F gibt mit: $\sigma(F) = \mathbb{S}$.

Anmerkungen:

- Die Realizierbarkeit einer Menge $\mathbb{S}$ garantiert die Existenz eines Zeugen-AFs F. Dies heißt **nicht**, daß wir zwangsweise so ein F kennen.
- Angabe eines Zeugen-AFs ist aber hinreichend für die Verifikation der Realisierbierkeit.

$\Rightarrow$ Rate (glücklich) F mit $\sigma(F) = \mathbb{S}$

Definierbarkeit in der Argumentationstheorie

Definition

Gegeben eine Semantik σ. Eine Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$ ist σ-realizable, sofern es ein AF F gibt mit: $\sigma(F) = \mathbb{S}$.

Anmerkungen:

- Die Realizierbarkeit einer Menge $\mathbb{S}$ garantiert die Existenz eines Zeugen-AFs F. Dies heißt **nicht**, daß wir zwangsweise so ein F kennen.
- Angabe eines Zeugen-AFs ist aber hinreichend für die Verifikation der Realisierbierkeit.

  $\Rightarrow$ Rate (glücklich) F mit $\sigma(F) = \mathbb{S}$
- Die Falsifikation der Realsierbarkeit ist eine Aussage über alle AFs, d.h. $\sigma(F_1) \neq \mathbb{S}$, $\sigma(F_2) \neq \mathbb{S}$, $\sigma(F_3) \neq \mathbb{S}$, ...

  $\Rightarrow$ Kein Raten möglich

Notwendige Kriterien - Konfliktfreiheit

Definition

Gegeben eine Semantik σ. Eine Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$ ist σ-realizable, sofern es ein AF F gibt mit: $\sigma(F) = \mathbb{S}$.

1. Ist $\mathbb{S} = \emptyset$ *cf*-realisable?

Notwendige Kriterien - Konfliktfreiheit

Definition

Gegeben eine Semantik σ. Eine Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$ ist σ-realizable, sofern es ein AF F gibt mit: $\sigma(F) = \mathbb{S}$.

1. Ist $\mathbb{S} = \emptyset$ cf-realisable? Nein! Für jedes F gilt $\emptyset \in cf(F)$.

Notwendige Kriterien - Konfliktfreiheit

Definition

Gegeben eine Semantik σ. Eine Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$ ist σ-realizable, sofern es ein AF F gibt mit: $\sigma(F) = \mathbb{S}$.

1. Ist $\mathbb{S} = \emptyset$ *cf*-realisable? Nein! Für jedes F gilt $\emptyset \in cf(F)$.

$$\mathbb{S}\ cf\text{-realisable} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{S} \neq \emptyset$$

2. Ist $\mathbb{S} = \{\emptyset, \{a, b\}\}$ *cf*-realisable?

Notwendige Kriterien - Konfliktfreiheit

Definition

Gegeben eine Semantik σ. Eine Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$ ist σ-realizable, sofern es ein AF F gibt mit: $\sigma(F) = \mathbb{S}$.

1. Ist $\mathbb{S} = \emptyset$ *cf*-realisable? Nein! Für jedes F gilt $\emptyset \in cf(F)$.

$$\mathbb{S} \; cf\text{-realisable} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{S} \neq \emptyset$$

2. Ist $\mathbb{S} = \{\emptyset, \{a, b\}\}$ *cf*-realisable? Nein! Für jedes F gilt: Wenn $E \in cf(F)$, dann auch jede Teilmenge $E' \subseteq E$.

Notwendige Kriterien - Konfliktfreiheit

Definition

Gegeben eine Semantik σ. Eine Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$ ist σ-realizable, sofern es ein AF F gibt mit: $\sigma(F) = \mathbb{S}$.

1. Ist $\mathbb{S} = \emptyset$ *cf*-realisable? Nein! Für jedes F gilt $\emptyset \in cf(F)$.

$$\mathbb{S}\ cf\text{-realisable} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{S} \neq \emptyset$$

2. Ist $\mathbb{S} = \{\emptyset, \{a, b\}\}$ *cf*-realisable? Nein! Für jedes F gilt: Wenn $E \in cf(F)$, dann auch jede Teilmenge $E' \subseteq E$.

$$\mathbb{S}\ cf\text{-realisable} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{S} = dcl(\mathbb{S})$$

wobei $dcl(\mathbb{S}) = \{S' \mid S' \subseteq S, S \in \mathbb{S}\}$ (downward-closure)

Notwendige Kriterien - Konfliktfreiheit

Definition

Gegeben eine Semantik σ. Eine Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$ ist σ-realizable, sofern es ein AF F gibt mit: $\sigma(F) = \mathbb{S}$.

1. $\mathbb{S}$ *cf*-realisable $\Rightarrow$ $\mathbb{S} \neq \emptyset$
2. $\mathbb{S}$ *cf*-realisable $\Rightarrow$ $\mathbb{S} = dcl(\mathbb{S}) = \{S' \mid S' \subseteq S, S \in \mathbb{S}\}$

Notwendige Kriterien - Konfliktfreiheit

Definition

Gegeben eine Semantik σ. Eine Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$ ist σ-realizable, sofern es ein AF F gibt mit: $\sigma(F) = \mathbb{S}$.

1. $\mathbb{S}$ *cf*-realisable $\quad\Rightarrow\quad \mathbb{S} \neq \emptyset$
2. $\mathbb{S}$ *cf*-realisable $\quad\Rightarrow\quad \mathbb{S} = dcl(\mathbb{S}) = \{S' \mid S' \subseteq S, S \in \mathbb{S}\}$
3. Ist $\mathbb{S} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$ *cf*-realisable?

Notwendige Kriterien - Konfliktfreiheit

Definition

Gegeben eine Semantik σ. Eine Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$ ist σ-realizable, sofern es ein AF F gibt mit: $\sigma(F) = \mathbb{S}$.

1. $\mathbb{S}$ *cf*-realisable $\Rightarrow$ $\mathbb{S} \neq \emptyset$
2. $\mathbb{S}$ *cf*-realisable $\Rightarrow$ $\mathbb{S} = dcl(\mathbb{S}) = \{S' \mid S' \subseteq S, S \in \mathbb{S}\}$
3. Ist $\mathbb{S} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$ *cf*-realisable?

   Nein! Es müsste auch $\{a, b, c\}$ konfliktfrei sein.

Notwendige Kriterien - Konfliktfreiheit

Definition

Gegeben eine Semantik σ. Eine Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$ ist σ-realizable, sofern es ein AF F gibt mit: $\sigma(F) = \mathbb{S}$.

1. $\mathbb{S}$ *cf*-realisable $\Rightarrow$ $\mathbb{S} \neq \emptyset$
2. $\mathbb{S}$ *cf*-realisable $\Rightarrow$ $\mathbb{S} = dcl(\mathbb{S}) = \{S' \mid S' \subseteq S, S \in \mathbb{S}\}$
3. Ist $\mathbb{S} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$ *cf*-realisable?

   Nein! Es müsste auch $\{a, b, c\}$ konfliktfrei sein. Genauer: Die Menge $\{a, b\}$ kann ich um c erweitern, da wir schon wissen, daß $\{a, c\}$ und $\{b, c\}$ auch konfliktfrei sind

$\mathbb{S}$ *cf*-realisable $\Rightarrow$ $\mathbb{S}$ ist tight

Tightness

- $Args_{\mathbb{S}} = \bigcup \mathbb{S}$ (Menge aller Argumente)
- $Pairs_{\mathbb{S}} = \{(a, b) \mid \{a, b\} \subseteq S, S \in \mathbb{S}\}$ (“verträgliche” Paare)

Beispiel:

Für $\mathbb{S} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$ ergibt sich

Tightness

- $Args_{\mathbb{S}} = \bigcup \mathbb{S}$ (Menge aller Argumente)
- $Pairs_{\mathbb{S}} = \{(a, b) \mid \{a, b\} \subseteq S, S \in \mathbb{S}\}$ („verträgliche" Paare)

Beispiel:

Für $\mathbb{S} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$ ergibt sich

- $Args_{\mathbb{S}} = \{a, b, c\}$
- $Pairs_{\mathbb{S}} = \{(a, a), (b, b), (c, c)\} \cup$
  $\{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b)\}$

Tightness

- $Args_{\mathbb{S}} = \bigcup \mathbb{S}$ (Menge aller Argumente)
- $Pairs_{\mathbb{S}} = \{(a,b) \mid \{a,b\} \subseteq S, S \in \mathbb{S}\}$ ("verträgliche" Paare)

Beispiel:

Für $\mathbb{S} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$ ergibt sich

- $Args_{\mathbb{S}} = \{a,b,c\}$
- $Pairs_{\mathbb{S}} = \{(a,a),(b,b),(c,c)\} \cup \{(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),(b,c),(c,b)\}$

Definition

Eine Menge $\mathbb{S}$ heißt tight, sofern für alle $S \in \mathbb{S}$ und $a \in Args_{\mathbb{S}}$ gilt: Falls $S \cup \{a\} \notin \mathbb{S}$, dann existiert ein $s \in S$ mit $(a,s) \notin Pairs_{\mathbb{S}}$.

Tightness

- $Args_{\mathbb{S}} = \bigcup \mathbb{S}$ (Menge aller Argumente)
- $Pairs_{\mathbb{S}} = \{(a,b) \mid \{a,b\} \subseteq S, S \in \mathbb{S}\}$ („verträgliche" Paare)

Beispiel:

Für $\mathbb{S} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$ ergibt sich

- $Args_{\mathbb{S}} = \{a,b,c\}$
- $Pairs_{\mathbb{S}} = \{(a,a),(b,b),(c,c)\} \cup$
  $\{(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),(b,c),(c,b)\}$

Definition

Eine Menge $\mathbb{S}$ heißt tight, sofern für alle $S \in \mathbb{S}$ und $a \in Args_{\mathbb{S}}$ gilt: Falls $S \cup \{a\} \notin \mathbb{S}$, dann existiert ein $s \in S$ mit $(a,s) \notin Pairs_{\mathbb{S}}$.

Intuitiv: Falls S nicht um a erweitert werden kann, dann muß es ein Argument s in S geben, welches nicht mit a verträglich ist.

Tightness

- $Args_{\mathbb{S}} = \bigcup \mathbb{S}$ (Menge aller Argumente)
- $Pairs_{\mathbb{S}} = \{(a,b) \mid \{a,b\} \subseteq S, S \in \mathbb{S}\}$ ("verträgliche" Paare)

Definition

Eine Menge $\mathbb{S}$ heißt tight, sofern für alle $S \in \mathbb{S}$ und $a \in Args_{\mathbb{S}}$ gilt:
Falls $S \cup \{a\} \notin \mathbb{S}$, dann existiert ein $s \in S$ mit $(a,s) \notin Pairs_{\mathbb{S}}$.

1. $\mathbb{S}$ *cf*-realisable $\Rightarrow$ $\mathbb{S} \neq \emptyset$
2. $\mathbb{S}$ *cf*-realisable $\Rightarrow$ $\mathbb{S} = dcl(\mathbb{S}) = \{S' \mid S' \subseteq S, S \in \mathbb{S}\}$
3. $\mathbb{S}$ *cf*-realisable $\Rightarrow$ $\mathbb{S}$ ist tight
   Beweis: $\mathbb{S}$ ist *cf*-realisable, d.h. es ex. ein F mit $cf(F) = \mathbb{S}$.

Tightness

- $Args_{\mathbb{S}} = \bigcup \mathbb{S}$ (Menge aller Argumente)
- $Pairs_{\mathbb{S}} = \{(a,b) \mid \{a,b\} \subseteq S, S \in \mathbb{S}\}$ („verträgliche" Paare)

Definition

Eine Menge $\mathbb{S}$ heißt tight, sofern für alle $S \in \mathbb{S}$ und $a \in Args_{\mathbb{S}}$ gilt:
Falls $S \cup \{a\} \notin \mathbb{S}$, dann existiert ein $s \in S$ mit $(a,s) \notin Pairs_{\mathbb{S}}$.

1. $\mathbb{S}$ *cf*-realisable $\Rightarrow$ $\mathbb{S} \neq \emptyset$
2. $\mathbb{S}$ *cf*-realisable $\Rightarrow$ $\mathbb{S} = dcl(\mathbb{S}) = \{S' \mid S' \subseteq S, S \in \mathbb{S}\}$
3. $\mathbb{S}$ *cf*-realisable $\Rightarrow$ $\mathbb{S}$ ist tight
   Beweis: $\mathbb{S}$ ist *cf*-realisable, d.h. es ex. ein F mit $cf(F) = \mathbb{S}$.
   Ang. nicht tight, dann ex. $S \in cf(F)$ und $a \in Args_{cf(F)}$ mit
   $S \cup \{a\} \notin cf(F)$, aber für alle $s \in S$, $(a,s) \in Pairs_{cf(F)}$.

Tightness

- $Args_{\mathbb{S}} = \bigcup \mathbb{S}$ (Menge aller Argumente)
- $Pairs_{\mathbb{S}} = \{(a, b) \mid \{a, b\} \subseteq S, S \in \mathbb{S}\}$ ("verträgliche" Paare)

Definition

Eine Menge $\mathbb{S}$ heißt tight, sofern für alle $S \in \mathbb{S}$ und $a \in Args_{\mathbb{S}}$ gilt:
Falls $S \cup \{a\} \notin \mathbb{S}$, dann existiert ein $s \in S$ mit $(a, s) \notin Pairs_{\mathbb{S}}$.

1. $\mathbb{S}$ *cf*-realisable $\Rightarrow$ $\mathbb{S} \neq \varnothing$
2. $\mathbb{S}$ *cf*-realisable $\Rightarrow$ $\mathbb{S} = dcl(\mathbb{S}) = \{S' \mid S' \subseteq S, S \in \mathbb{S}\}$
3. $\mathbb{S}$ *cf*-realisable $\Rightarrow$ $\mathbb{S}$ ist tight
   Beweis: $\mathbb{S}$ ist *cf*-realisable, d.h. es ex. ein F mit $cf(F) = \mathbb{S}$.
   Ang. nicht tight, dann ex. $S \in cf(F)$ und $a \in Args_{cf(F)}$ mit
   $S \cup \{a\} \notin cf(F)$, aber für alle $s \in S$, $(a, s) \in Pairs_{cf(F)}$.
   Letzteres bedeutet, daß für alle $s \in S$, $\{a, s\} \in cf(F)$.

Tightness

- $Args_{\mathbb{S}} = \bigcup \mathbb{S}$ (Menge aller Argumente)
- $Pairs_{\mathbb{S}} = \{(a,b) \mid \{a,b\} \subseteq S, S \in \mathbb{S}\}$ („verträgliche" Paare)

Definition

Eine Menge $\mathbb{S}$ heißt tight, sofern für alle $S \in \mathbb{S}$ und $a \in Args_{\mathbb{S}}$ gilt:
Falls $S \cup \{a\} \notin \mathbb{S}$, dann existiert ein $s \in S$ mit $(a,s) \notin Pairs_{\mathbb{S}}$.

1. $\mathbb{S}$ *cf*-realisable $\Rightarrow$ $\mathbb{S} \neq \emptyset$
2. $\mathbb{S}$ *cf*-realisable $\Rightarrow$ $\mathbb{S} = dcl(\mathbb{S}) = \{S' \mid S' \subseteq S, S \in \mathbb{S}\}$
3. $\mathbb{S}$ *cf*-realisable $\Rightarrow$ $\mathbb{S}$ ist tight

   Beweis: $\mathbb{S}$ ist *cf*-realisable, d.h. es ex. ein F mit $cf(F) = \mathbb{S}$.
   Ang. nicht tight, dann ex. $S \in cf(F)$ und $a \in Args_{cf(F)}$ mit $S \cup \{a\} \notin cf(F)$, aber für alle $s \in S$, $(a,s) \in Pairs_{cf(F)}$.
   Letzteres bedeutet, daß für alle $s \in S$, $\{a,s\} \in cf(F)$. Des Weiteren impliziert $a \in Args_{cf(F)}$, daß $\{a\} \in cf(F)$.

Tightness

- $Args_{\mathbb{S}} = \bigcup \mathbb{S}$ (Menge aller Argumente)
- $Pairs_{\mathbb{S}} = \{(a, b) \mid \{a, b\} \subseteq S, S \in \mathbb{S}\}$ ("verträgliche" Paare)

Definition

Eine Menge $\mathbb{S}$ heißt tight, sofern für alle $S \in \mathbb{S}$ und $a \in Args_{\mathbb{S}}$ gilt: Falls $S \cup \{a\} \notin \mathbb{S}$, dann existiert ein $s \in S$ mit $(a, s) \notin Pairs_{\mathbb{S}}$.

1. $\mathbb{S}$ *cf*-realisable $\Rightarrow$ $\mathbb{S} \neq \emptyset$
2. $\mathbb{S}$ *cf*-realisable $\Rightarrow$ $\mathbb{S} = dcl(\mathbb{S}) = \{S' \mid S' \subseteq S, S \in \mathbb{S}\}$
3. $\mathbb{S}$ *cf*-realisable $\Rightarrow$ $\mathbb{S}$ ist tight

   Beweis: $\mathbb{S}$ ist *cf*-realisable, d.h. es ex. ein F mit $cf(F) = \mathbb{S}$. Ang. nicht tight, dann ex. $S \in cf(F)$ und $a \in Args_{cf(F)}$ mit $S \cup \{a\} \notin cf(F)$, aber für alle $s \in S$, $(a, s) \in Pairs_{cf(F)}$. Letzteres bedeutet, daß für alle $s \in S$, $\{a, s\} \in cf(F)$. Des Weiteren impliziert $a \in Args_{cf(F)}$, daß $\{a\} \in cf(F)$. Kombiniert mit $S \in cf(F)$ folgt $S \cup \{a\} \in cf(F)$. W!

Notwendige Kriterien - Konfliktfreiheit

1. $\mathbb{S}$ *cf*-realisable $\Rightarrow$ $\mathbb{S} \neq \emptyset$
2. $\mathbb{S}$ *cf*-realisable $\Rightarrow$ $\mathbb{S} = dcl(\mathbb{S})$
3. $\mathbb{S}$ *cf*-realisable $\Rightarrow$ $\mathbb{S}$ ist tight

Notwendige Kriterien - Konfliktfreiheit

1. $\mathbb{S}$ *cf*-realisable $\Rightarrow$ $\mathbb{S} \neq \emptyset$
2. $\mathbb{S}$ *cf*-realisable $\Rightarrow$ $\mathbb{S} = dcl(\mathbb{S})$
3. $\mathbb{S}$ *cf*-realisable $\Rightarrow$ $\mathbb{S}$ ist tight

Auch hinreichend? Falls ja, wie beweist man das?

Beispiel: Sei $\mathbb{S} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}$.

Notwendige Kriterien - Konfliktfreiheit

1. $\mathbb{S}$ *cf*-realisable $\quad\Rightarrow\quad$ $\mathbb{S} \neq \emptyset$
2. $\mathbb{S}$ *cf*-realisable $\quad\Rightarrow\quad$ $\mathbb{S} = dcl(\mathbb{S})$
3. $\mathbb{S}$ *cf*-realisable $\quad\Rightarrow\quad$ $\mathbb{S}$ ist tight

Auch hinreichend? Falls ja, wie beweist man das?

Beispiel: Sei $\mathbb{S} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}$. Klar, $\mathbb{S} \neq \emptyset$ und $\mathbb{S} = dcl(\mathbb{S})$.

Notwendige Kriterien - Konfliktfreiheit

1. $\mathbb{S}$ *cf*-realisable $\Rightarrow$ $\mathbb{S} \neq \emptyset$
2. $\mathbb{S}$ *cf*-realisable $\Rightarrow$ $\mathbb{S} = dcl(\mathbb{S})$
3. $\mathbb{S}$ *cf*-realisable $\Rightarrow$ $\mathbb{S}$ ist tight

Auch hinreichend? Falls ja, wie beweist man das?

Beispiel: Sei $\mathbb{S} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}$. Klar, $\mathbb{S} \neq \emptyset$ und $\mathbb{S} = dcl(\mathbb{S})$. Des Weiteren ist $Args_{\mathbb{S}} = \{a, b, c\}$, $Pairs_{\mathbb{S}} = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ und somit $\mathbb{S}$ auch tight.

Definition

Eine Menge $\mathbb{S}$ heißt tight, sofern für alle $S \in \mathbb{S}$ und $a \in Args_{\mathbb{S}}$ gilt: Falls $S \cup \{a\} \notin \mathbb{S}$, dann existiert ein $s \in S$ mit $(a, s) \notin Pairs_{\mathbb{S}}$.

Notwendige Kriterien - Konfliktfreiheit

1. $\mathbb{S}$ *cf*-realisable $\Rightarrow$ $\mathbb{S} \neq \emptyset$
2. $\mathbb{S}$ *cf*-realisable $\Rightarrow$ $\mathbb{S} = dcl(\mathbb{S})$
3. $\mathbb{S}$ *cf*-realisable $\Rightarrow$ $\mathbb{S}$ ist tight

Auch hinreichend? Falls ja, wie beweist man das?

Beispiel: Sei $\mathbb{S} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}$. Klar, $\mathbb{S} \neq \emptyset$ und $\mathbb{S} = dcl(\mathbb{S})$. Des Weiteren ist $Args_{\mathbb{S}} = \{a, b, c\}$, $Pairs_{\mathbb{S}} = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ und somit $\mathbb{S}$ auch tight.

Definition

Eine Menge $\mathbb{S}$ heißt tight, sofern für alle $S \in \mathbb{S}$ und $a \in Args_{\mathbb{S}}$ gilt: Falls $S \cup \{a\} \notin \mathbb{S}$, dann existiert ein $s \in S$ mit $(a, s) \notin Pairs_{\mathbb{S}}$.

☞ ein Zeugen-AF würde die Realisierbarkeit zeigen

Der kanonische Zeuge $F^{cf}_{\mathbb{S}}$

Definition

Gegen eine Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$. Wir definieren

$$F^{cf}_{\mathbb{S}} = (Args_{\mathbb{S}}, (Args_{\mathbb{S}} \times Args_{\mathbb{S}}) \setminus Pairs_{\mathbb{S}})$$

Der kanonische Zeuge $F^{cf}_{\mathbb{S}}$

Definition

Gegen eine Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$. Wir definieren

$$F^{cf}_{\mathbb{S}} = (Args_{\mathbb{S}}, (Args_{\mathbb{S}} \times Args_{\mathbb{S}}) \setminus Pairs_{\mathbb{S}})$$

Beispiel:

Für $\mathbb{S} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ ist $Args_{\mathbb{S}} = \{a, b, c\}$ und $Pairs_{\mathbb{S}} = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$. Somit

Der kanonische Zeuge $F^{cf}_{\mathbb{S}}$

Definition

Gegen eine Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$. Wir definieren

$$F^{cf}_{\mathbb{S}} = (Args_{\mathbb{S}}, (Args_{\mathbb{S}} \times Args_{\mathbb{S}}) \setminus Pairs_{\mathbb{S}})$$

Beispiel:

Für $\mathbb{S} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ ist $Args_{\mathbb{S}} = \{a, b, c\}$ und $Pairs_{\mathbb{S}} = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$. Somit

$$F^{cf}_{\mathbb{S}} = (\{a, b, c\}, \{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b)\})$$

Es gilt $\mathbb{S} = cf\left(F^{cf}_{\mathbb{S}}\right)$.

Der kanonische Zeuge $F^{cf}_{\mathbb{S}}$

Definition

Gegen eine Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$. Wir definieren

$$F^{cf}_{\mathbb{S}} = (Args_{\mathbb{S}}, (Args_{\mathbb{S}} \times Args_{\mathbb{S}}) \setminus Pairs_{\mathbb{S}})$$

Beispiel:

Für $\mathbb{S} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ ist $Args_{\mathbb{S}} = \{a, b, c\}$ und $Pairs_{\mathbb{S}} = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$. Somit

$$F^{cf}_{\mathbb{S}} = (\{a, b, c\}, \{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b)\})$$

Es gilt $\mathbb{S} = cf\left(F^{cf}_{\mathbb{S}}\right)$.

Einfache Eigenschaften:

- $F^{cf}_{\mathbb{S}}$ ist symmetrisch
- $L\left(F^{cf}_{\mathbb{S}}\right) = \emptyset$ (keine self-loops)

Charakterisierung - Konfliktfreiheit

Theorem

Gegeben eine endliche Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$*.*

$$\mathbb{S} \neq \emptyset,\ \mathbb{S} = dcl(\mathbb{S}),\ \mathbb{S} \text{ tight} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{S} \text{ cf-realisable}$$

Charakterisierung - Konfliktfreiheit

Theorem

Gegeben eine endliche Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$.

$$\mathbb{S} \neq \varnothing,\ \mathbb{S} = dcl(\mathbb{S}),\ \mathbb{S}\ \textit{tight} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{S}\ \textit{cf-realisable}$$

Proof.

($\Leftarrow$) Schon gezeigt.

Charakterisierung - Konfliktfreiheit

Theorem

Gegeben eine endliche Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$.

$$\mathbb{S} \neq \emptyset,\ \mathbb{S} = dcl(\mathbb{S}),\ \mathbb{S} \text{ tight} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{S} \text{ cf-realisable}$$

Proof.

($\Leftarrow$) Schon gezeigt.
($\Rightarrow$) Wir zeigen $\mathbb{S} = cf\left(F_{\mathbb{S}}^{cf}\right)$.

Charakterisierung - Konfliktfreiheit

Theorem

Gegeben eine endliche Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$.

$$\mathbb{S} \neq \emptyset,\ \mathbb{S} = dcl(\mathbb{S}),\ \mathbb{S}\ \textit{tight} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{S}\ \textit{cf-realisable}$$

Proof.

($\Leftarrow$) Schon gezeigt.

($\Rightarrow$) Wir zeigen $\mathbb{S} = cf\left(F_{\mathbb{S}}^{cf}\right)$.

- ($\subseteq$) Sei $S \in \mathbb{S}$. Dann gilt für alle $a, b \in S$: $(a, b) \in Pairs_{\mathbb{S}}$.

Charakterisierung - Konfliktfreiheit

Theorem

Gegeben eine endliche Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$.

$$\mathbb{S} \neq \emptyset,\ \mathbb{S} = dcl(\mathbb{S}),\ \mathbb{S}\ tight \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{S}\ cf\text{-}realisable$$

Proof.

(⇐) Schon gezeigt.

(⇒) Wir zeigen $\mathbb{S} = cf\left(F^{cf}_{\mathbb{S}}\right)$.

- (⊆) Sei $S \in \mathbb{S}$. Dann gilt für alle $a, b \in S$: $(a, b) \in Pairs_{\mathbb{S}}$. Somit $(a, b) \notin R\left(F^{cf}_{\mathbb{S}}\right)$

Charakterisierung - Konfliktfreiheit

Theorem

Gegeben eine endliche Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$.

$$\mathbb{S} \neq \emptyset,\ \mathbb{S} = dcl(\mathbb{S}),\ \mathbb{S}\ tight \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{S}\ cf\text{-}realisable$$

Proof.

($\Leftarrow$) Schon gezeigt.

($\Rightarrow$) Wir zeigen $\mathbb{S} = cf\left(F_{\mathbb{S}}^{cf}\right)$.

- ($\subseteq$) Sei $S \in \mathbb{S}$. Dann gilt für alle $a, b \in S$: $(a, b) \in Pairs_{\mathbb{S}}$. Somit $(a, b) \notin R\left(F_{\mathbb{S}}^{cf}\right)$ und folglich, $S \in cf\left(F_{\mathbb{S}}^{cf}\right)$.
- ($\supseteq$) Indirekt.

Charakterisierung - Konfliktfreiheit

Theorem

Gegeben eine endliche Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$.

$$\mathbb{S} \neq \emptyset,\ \mathbb{S} = dcl(\mathbb{S}),\ \mathbb{S}\ \textit{tight} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{S}\ \textit{cf-realisable}$$

Proof.

($\Leftarrow$) Schon gezeigt.

($\Rightarrow$) Wir zeigen $\mathbb{S} = cf\left(F^{cf}_{\mathbb{S}}\right)$.

- ($\subseteq$) Sei $S \in \mathbb{S}$. Dann gilt für alle $a, b \in S$: $(a, b) \in Pairs_{\mathbb{S}}$. Somit $(a, b) \notin R\left(F^{cf}_{\mathbb{S}}\right)$ und folglich, $S \in cf\left(F^{cf}_{\mathbb{S}}\right)$.
- ($\supseteq$) Indirekt. Sei $E \in cf\left(F^{cf}_{\mathbb{S}}\right) \setminus \mathbb{S}$.

Charakterisierung - Konfliktfreiheit

Theorem

Gegeben eine endliche Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$.

$$\mathbb{S} \neq \emptyset,\ \mathbb{S} = dcl(\mathbb{S}),\ \mathbb{S}\ \textit{tight} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{S}\ \textit{cf-realisable}$$

Proof.

($\Leftarrow$) Schon gezeigt.

($\Rightarrow$) Wir zeigen $\mathbb{S} = cf\left(F^{cf}_{\mathbb{S}}\right)$.

- ($\subseteq$) Sei $S \in \mathbb{S}$. Dann gilt für alle $a, b \in S$: $(a, b) \in Pairs_{\mathbb{S}}$. Somit $(a, b) \notin R\left(F^{cf}_{\mathbb{S}}\right)$ und folglich, $S \in cf\left(F^{cf}_{\mathbb{S}}\right)$.
- ($\supseteq$) Indirekt. Sei $E \in cf\left(F^{cf}_{\mathbb{S}}\right) \setminus \mathbb{S}$. Da $\mathbb{S} = dcl(\mathbb{S})$ ex. kein $S \in \mathbb{S}$ mit $E \subseteq S$.

Charakterisierung - Konfliktfreiheit

Theorem

Gegeben eine endliche Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$.

$$\mathbb{S} \neq \emptyset,\ \mathbb{S} = dcl(\mathbb{S}),\ \mathbb{S}\ \textit{tight} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{S}\ \textit{cf-realisable}$$

Proof.

($\Leftarrow$) Schon gezeigt.

($\Rightarrow$) Wir zeigen $\mathbb{S} = cf\left(F^{cf}_{\mathbb{S}}\right)$.

- ($\subseteq$) Sei $S \in \mathbb{S}$. Dann gilt für alle $a, b \in S$: $(a, b) \in Pairs_{\mathbb{S}}$. Somit $(a, b) \notin R\left(F^{cf}_{\mathbb{S}}\right)$ und folglich, $S \in cf\left(F^{cf}_{\mathbb{S}}\right)$.
- ($\supseteq$) Indirekt. Sei $E \in cf\left(F^{cf}_{\mathbb{S}}\right) \setminus \mathbb{S}$. Da $\mathbb{S} = dcl(\mathbb{S})$ ex. kein $S \in \mathbb{S}$ mit $E \subseteq S$. Des Weiteren da $\mathbb{S} \neq \emptyset$ können wir $E \neq \emptyset$ annehmen.

Charakterisierung - Konfliktfreiheit

Theorem

Gegeben eine endliche Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$.

$$\mathbb{S} \neq \emptyset,\ \mathbb{S} = dcl(\mathbb{S}),\ \mathbb{S}\ tight \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{S}\ cf\text{-}realisable$$

Proof.

($\Leftarrow$) Schon gezeigt.

($\Rightarrow$) Wir zeigen $\mathbb{S} = cf\left(F_{\mathbb{S}}^{cf}\right)$.

- ($\subseteq$) Sei $S \in \mathbb{S}$. Dann gilt für alle $a, b \in S$: $(a, b) \in Pairs_{\mathbb{S}}$. Somit $(a, b) \notin R\left(F_{\mathbb{S}}^{cf}\right)$ und folglich, $S \in cf\left(F_{\mathbb{S}}^{cf}\right)$.
- ($\supseteq$) Indirekt. Sei $E \in cf\left(F_{\mathbb{S}}^{cf}\right) \setminus \mathbb{S}$. Da $\mathbb{S} = dcl(\mathbb{S})$ ex. kein $S \in \mathbb{S}$ mit $E \subseteq S$. Des Weiteren da $\mathbb{S} \neq \emptyset$ können wir $E \neq \emptyset$ annehmen. Da $E \in cf\left(F_{\mathbb{S}}^{cf}\right)$ ang. gilt für $a, b \in E$: $(a, b) \in Pairs_{\mathbb{S}}$. Somit nach Def. ex. $S' \in \mathbb{S}$: $\{a, b\} \subseteq S' \subset E$.

Charakterisierung - Konfliktfreiheit

Theorem

Gegeben eine endliche Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$.

$$\mathbb{S} \neq \emptyset,\ \mathbb{S} = dcl(\mathbb{S}),\ \mathbb{S}\ \mathit{tight} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{S}\ \mathit{cf}\text{-}\mathit{realisable}$$

Proof.

($\Leftarrow$) Schon gezeigt.

($\Rightarrow$) Wir zeigen $\mathbb{S} = cf\left(F_{\mathbb{S}}^{cf}\right)$.

- ($\subseteq$) Sei $S \in \mathbb{S}$. Dann gilt für alle $a, b \in S$: $(a, b) \in Pairs_{\mathbb{S}}$. Somit $(a, b) \notin R\left(F_{\mathbb{S}}^{cf}\right)$ und folglich, $S \in cf\left(F_{\mathbb{S}}^{cf}\right)$.
- ($\supseteq$) Indirekt. Sei $E \in cf\left(F_{\mathbb{S}}^{cf}\right) \setminus \mathbb{S}$. Da $\mathbb{S} = dcl(\mathbb{S})$ ex. kein $S \in \mathbb{S}$ mit $E \subseteq S$. Des Weiteren da $\mathbb{S} \neq \emptyset$ können wir $E \neq \emptyset$ annehmen. Da $E \in cf\left(F_{\mathbb{S}}^{cf}\right)$ ang. gilt für $a, b \in E$: $(a, b) \in Pairs_{\mathbb{S}}$. Somit nach Def. ex. $S' \in \mathbb{S}$: $\{a, b\} \subseteq S' \subset E$. Da $\mathbb{S}$ endl., ex. ein $\subseteq$-maximales $S \in \mathbb{S}$ mit $\{a, b\} \subseteq S \subset E$.

Charakterisierung - Konfliktfreiheit

Theorem

Gegeben eine endliche Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$.

$$\mathbb{S} \neq \emptyset,\ \mathbb{S} = dcl(\mathbb{S}),\ \mathbb{S}\ \mathit{tight} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{S}\ \mathit{cf}\text{-}\mathit{realisable}$$

Proof.

($\Leftarrow$) Schon gezeigt.

($\Rightarrow$) Wir zeigen $\mathbb{S} = cf\left(F_{\mathbb{S}}^{cf}\right)$.

- ($\subseteq$) Sei $S \in \mathbb{S}$. Dann gilt für alle $a, b \in S$: $(a, b) \in Pairs_{\mathbb{S}}$. Somit $(a, b) \notin R\left(F_{\mathbb{S}}^{cf}\right)$ und folglich, $S \in cf\left(F_{\mathbb{S}}^{cf}\right)$.
- ($\supseteq$) Indirekt. Sei $E \in cf\left(F_{\mathbb{S}}^{cf}\right) \setminus \mathbb{S}$. Da $\mathbb{S} = dcl(\mathbb{S})$ ex. kein $S \in \mathbb{S}$ mit $E \subseteq S$. Des Weiteren da $\mathbb{S} \neq \emptyset$ können wir $E \neq \emptyset$ annehmen. Da $E \in cf\left(F_{\mathbb{S}}^{cf}\right)$ ang. gilt für $a, b \in E$: $(a, b) \in Pairs_{\mathbb{S}}$. Somit nach Def. ex. $S' \in \mathbb{S}$: $\{a, b\} \subseteq S' \subset E$. Da $\mathbb{S}$ endl., ex. ein $\subseteq$-maximales $S \in \mathbb{S}$ mit $\{a, b\} \subseteq S \subset E$. D.h. $S \cup \{c\} \notin \mathbb{S}$ für ein $c \in E \setminus S \subseteq Args_{\mathbb{S}}$.

Charakterisierung - Konfliktfreiheit

Theorem

Gegeben eine endliche Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$.

$$\mathbb{S} \neq \emptyset,\ \mathbb{S} = dcl(\mathbb{S}),\ \mathbb{S} \text{ tight} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{S} \text{ cf-realisable}$$

Proof.

($\Leftarrow$) Schon gezeigt.

($\Rightarrow$) Wir zeigen $\mathbb{S} = cf\left(F^{cf}_{\mathbb{S}}\right)$.

- ($\subseteq$) Sei $S \in \mathbb{S}$. Dann gilt für alle $a, b \in S$: $(a, b) \in Pairs_{\mathbb{S}}$. Somit $(a, b) \notin R\left(F^{cf}_{\mathbb{S}}\right)$ und folglich, $S \in cf\left(F^{cf}_{\mathbb{S}}\right)$.
- ($\supseteq$) Indirekt. Sei $E \in cf\left(F^{cf}_{\mathbb{S}}\right) \setminus \mathbb{S}$. Da $\mathbb{S} = dcl(\mathbb{S})$ ex. kein $S \in \mathbb{S}$ mit $E \subseteq S$. Des Weiteren da $\mathbb{S} \neq \emptyset$ können wir $E \neq \emptyset$ annehmen. Da $E \in cf\left(F^{cf}_{\mathbb{S}}\right)$ ang. gilt für $a, b \in E$: $(a, b) \in Pairs_{\mathbb{S}}$. Somit nach Def. ex. $S' \in \mathbb{S}$: $\{a, b\} \subseteq S' \subset E$. Da $\mathbb{S}$ endl., ex. ein $\subseteq$-maximales $S \in \mathbb{S}$ mit $\{a, b\} \subseteq S \subset E$. D.h. $S \cup \{c\} \notin \mathbb{S}$ für ein $c \in E \setminus S \subseteq Args_{\mathbb{S}}$. Ferner ist $S \cup \{c\} \subseteq E$ und somit $S \cup \{c\} \in cf\left(F^{cf}_{\mathbb{S}}\right)$.

Charakterisierung - Konfliktfreiheit

Theorem

Gegeben eine endliche Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$.

$$\mathbb{S} \neq \emptyset,\ \mathbb{S} = dcl(\mathbb{S}),\ \mathbb{S} \textit{ tight} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{S} \textit{ cf-realisable}$$

Proof.

($\Leftarrow$) Schon gezeigt.

($\Rightarrow$) Wir zeigen $\mathbb{S} = cf\left(F_{\mathbb{S}}^{cf}\right)$.

- ($\subseteq$) Sei $S \in \mathbb{S}$. Dann gilt für alle $a, b \in S$: $(a, b) \in Pairs_{\mathbb{S}}$. Somit $(a, b) \notin R\left(F_{\mathbb{S}}^{cf}\right)$ und folglich, $S \in cf\left(F_{\mathbb{S}}^{cf}\right)$.
- ($\supseteq$) Indirekt. Sei $E \in cf\left(F_{\mathbb{S}}^{cf}\right) \setminus \mathbb{S}$. Da $\mathbb{S} = dcl(\mathbb{S})$ ex. kein $S \in \mathbb{S}$ mit $E \subseteq S$. Des Weiteren da $\mathbb{S} \neq \emptyset$ können wir $E \neq \emptyset$ annehmen. Da $E \in cf\left(F_{\mathbb{S}}^{cf}\right)$ ang. gilt für $a, b \in E$: $(a, b) \in Pairs_{\mathbb{S}}$. Somit nach Def. ex. $S' \in \mathbb{S}$: $\{a, b\} \subseteq S' \subset E$. Da $\mathbb{S}$ endl., ex. ein $\subseteq$-maximales $S \in \mathbb{S}$ mit $\{a, b\} \subseteq S \subset E$. D.h. $S \cup \{c\} \notin \mathbb{S}$ für ein $c \in E \setminus S \subseteq Args_{\mathbb{S}}$. Ferner ist $S \cup \{c\} \subseteq E$ und somit $S \cup \{c\} \in cf\left(F_{\mathbb{S}}^{cf}\right)$. Da $\mathbb{S}$ tight ex. ein $s \in S$ mit $(c, s) \notin Pairs_{\mathbb{S}}$ im W! zu $c, s \in E$ welches $(c, s) \in Pairs_{\mathbb{S}}$ garantiert.

Notwendige Kriterien - Stable Semantics

Definition

Gegeben eine Semantik σ. Eine Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$ ist σ-realizable, sofern es ein AF F gibt mit: $\sigma(F) = \mathbb{S}$.

1. Ist $\mathbb{S} = \emptyset$ *stb*-realizable?

Notwendige Kriterien - Stable Semantics

Definition

Gegeben eine Semantik σ. Eine Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$ ist σ-realizable, sofern es ein AF F gibt mit: $\sigma(F) = \mathbb{S}$.

1. Ist $\mathbb{S} = \emptyset$ *stb*-realizable? Ja! Betrachte $F = (\{a\}, \{(a, a)\})$.

Notwendige Kriterien - Stable Semantics

Definition

Gegeben eine Semantik σ. Eine Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$ ist σ-realizable, sofern es ein AF F gibt mit: $\sigma(F) = \mathbb{S}$.

1. Ist $\mathbb{S} = \varnothing$ *stb*-realizable? Ja! Betrachte $F = (\{a\}, \{(a, a)\})$.
2. Ist $\mathbb{S} = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ *stb*-realizable?

Notwendige Kriterien - Stable Semantics

Definition

Gegeben eine Semantik σ. Eine Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$ ist σ-realizable, sofern es ein AF F gibt mit: $\sigma(F) = \mathbb{S}$.

1. Ist $\mathbb{S} = \varnothing$ *stb*-realizable? Ja! Betrachte $F = (\{a\}, \{(a, a)\})$.
2. Ist $\mathbb{S} = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ *stb*-realizable? Nein! Für jedes F gilt: *stb*(F) ist $\subseteq$-Antikette (incomparable)

Notwendige Kriterien - Stable Semantics

Definition

Gegeben eine Semantik σ. Eine Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$ ist σ-realizable, sofern es ein AF F gibt mit: $\sigma(F) = \mathbb{S}$.

1. Ist $\mathbb{S} = \varnothing$ *stb*-realizable? Ja! Betrachte $F = (\{a\}, \{(a,a)\})$.
2. Ist $\mathbb{S} = \{\{a\}, \{a,b\}\}$ *stb*-realizable? Nein! Für jedes F gilt: $stb(F)$ ist $\subseteq$-Antikette (incomparable)

$$\mathbb{S}\ \textit{stb}\text{-realizable} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{S}\ \text{incomparable}$$

3. Ist $\mathbb{S} = \{\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$ *stb*-realizable?

Notwendige Kriterien - Stable Semantics

Definition

Gegeben eine Semantik σ. Eine Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$ ist σ-realizable, sofern es ein AF F gibt mit: $\sigma(F) = \mathbb{S}$.

1. Ist $\mathbb{S} = \varnothing$ *stb*-realizable? Ja! Betrachte $F = (\{a\}, \{(a,a)\})$.
2. Ist $\mathbb{S} = \{\{a\}, \{a,b\}\}$ *stb*-realizable? Nein! Für jedes F gilt: $stb(F)$ ist $\subseteq$-Antikette (incomparable)

$$\mathbb{S}\ stb\text{-realizable} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{S}\ \text{incomparable}$$

3. Ist $\mathbb{S} = \{\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$ *stb*-realizable? Nein! $\mathbb{S}$ ist nicht tight.

Tightness

- $Args_{\mathbb{S}} = \bigcup \mathbb{S}$ (Menge aller Argumente)
- $Pairs_{\mathbb{S}} = \{(a,b) \mid \{a,b\} \subseteq S, S \in \mathbb{S}\}$ ("verträgliche" Paare)

Definition

Eine Menge $\mathbb{S}$ heißt tight, sofern für alle $S \in \mathbb{S}$ und $a \in Args_{\mathbb{S}}$ gilt: Falls $S \cup \{a\} \notin \mathbb{S}$, dann existiert ein $s \in S$ mit $(a,s) \notin Pairs_{\mathbb{S}}$.

1. $\mathbb{S}$ *stb*-realizable $\Rightarrow$ $\mathbb{S}$ incomparable
2. $\mathbb{S}$ *stb*-realizable $\Rightarrow$ $\mathbb{S}$ tight

   Beweis: Sei $\mathbb{S}$ *stb*-realizable, d.h. es ex. ein F mit $stb(F) = \mathbb{S}$.

Tightness

- $Args_{\mathbb{S}} = \bigcup \mathbb{S}$ (Menge aller Argumente)
- $Pairs_{\mathbb{S}} = \{(a,b) \mid \{a,b\} \subseteq S, S \in \mathbb{S}\}$ („verträgliche" Paare)

Definition

Eine Menge $\mathbb{S}$ heißt tight, sofern für alle $S \in \mathbb{S}$ und $a \in Args_{\mathbb{S}}$ gilt: Falls $S \cup \{a\} \notin \mathbb{S}$, dann existiert ein $s \in S$ mit $(a,s) \notin Pairs_{\mathbb{S}}$.

1. $\mathbb{S}$ *stb*-realizable $\Rightarrow$ $\mathbb{S}$ incomparable
2. $\mathbb{S}$ *stb*-realizable $\Rightarrow$ $\mathbb{S}$ tight

Beweis: Sei $\mathbb{S}$ *stb*-realizable, d.h. es ex. ein F mit $stb(F) = \mathbb{S}$. Sei $S \in stb(F)$ und $a \in Args_{stb(F)}$ mit $S \cup \{a\} \notin stb(F)$.

Tightness

- $Args_{\mathbb{S}} = \bigcup \mathbb{S}$ (Menge aller Argumente)
- $Pairs_{\mathbb{S}} = \{(a,b) \mid \{a,b\} \subseteq S, S \in \mathbb{S}\}$ ("verträgliche" Paare)

Definition

Eine Menge $\mathbb{S}$ heißt tight, sofern für alle $S \in \mathbb{S}$ und $a \in Args_{\mathbb{S}}$ gilt: Falls $S \cup \{a\} \notin \mathbb{S}$, dann existiert ein $s \in S$ mit $(a,s) \notin Pairs_{\mathbb{S}}$.

1. $\mathbb{S}$ *stb*-realizable $\Rightarrow$ $\mathbb{S}$ incomparable
2. $\mathbb{S}$ *stb*-realizable $\Rightarrow$ $\mathbb{S}$ tight

   Beweis: Sei $\mathbb{S}$ *stb*-realizable, d.h. es ex. ein F mit $stb(F) = \mathbb{S}$. Sei $S \in stb(F)$ und $a \in Args_{stb(F)}$ mit $S \cup \{a\} \notin stb(F)$. Klar, $a \notin S$ und somit nach Def. stable semantics ex. $s \in S$ mit $(s,a) \in R(F)$.

Tightness

- $Args_{\mathbb{S}} = \bigcup \mathbb{S}$ (Menge aller Argumente)
- $Pairs_{\mathbb{S}} = \{(a, b) \mid \{a, b\} \subseteq S, S \in \mathbb{S}\}$ ("verträgliche" Paare)

Definition

Eine Menge $\mathbb{S}$ heißt tight, sofern für alle $S \in \mathbb{S}$ und $a \in Args_{\mathbb{S}}$ gilt: Falls $S \cup \{a\} \notin \mathbb{S}$, dann existiert ein $s \in S$ mit $(a, s) \notin Pairs_{\mathbb{S}}$.

1. $\mathbb{S}$ *stb*-realizable $\Rightarrow$ $\mathbb{S}$ incomparable
2. $\mathbb{S}$ *stb*-realizable $\Rightarrow$ $\mathbb{S}$ tight

Beweis: Sei $\mathbb{S}$ *stb*-realizable, d.h. es ex. ein F mit $stb(F) = \mathbb{S}$. Sei $S \in stb(F)$ und $a \in Args_{stb(F)}$ mit $S \cup \{a\} \notin stb(F)$. Klar, $a \notin S$ und somit nach Def. stable semantics ex. $s \in S$ mit $(s, a) \in R(F)$. Demzufolge, für alle $E \in stb(F)$ gilt, $\{s, a\} = \{a, s\} \nsubseteq E$. Dies bedeutet $(a, s) \notin Pairs_{stb(F)}$.

Der kanonische Zeuge $F^{stb}_{\mathbb{S}}$

Definition

Gegeben eine Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$. Das kanonische $F^{cf}_{\mathbb{S}}$ ist gegeben durch

$$F^{cf}_{\mathbb{S}} = (Args_{\mathbb{S}}, (Args_{\mathbb{S}} \times Args_{\mathbb{S}}) \setminus Pairs_{\mathbb{S}}) = (A, R).$$

Sei nun $\mathcal{E} = stb\left(F^{cf}_{\mathbb{S}}\right) \setminus \mathbb{S}$. Wir definieren weiter

$$F^{stb}_{\mathbb{S}} = \left(A \cup \{\overline{E} \mid E \in \mathcal{E}\}, R \cup \{(\overline{E}, \overline{E}), (a, \overline{E}) \mid E \in \mathcal{E}, a \in Args_{\mathbb{S}} \setminus E\}\right)$$

Der kanonische Zeuge $F_{\mathbb{S}}^{stb}$

Definition

Gegeben eine Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$. Das kanonische $F_{\mathbb{S}}^{cf}$ ist gegeben durch

$$F_{\mathbb{S}}^{cf} = (Args_{\mathbb{S}}, (Args_{\mathbb{S}} \times Args_{\mathbb{S}}) \setminus Pairs_{\mathbb{S}}) = (A, R).$$

Sei nun $\mathcal{E} = stb\left(F_{\mathbb{S}}^{cf}\right) \setminus \mathbb{S}$. Wir definieren weiter

$$F_{\mathbb{S}}^{stb} = \left(A \cup \{\overline{E} \mid E \in \mathcal{E}\}, R \cup \{(\overline{E}, \overline{E}), (a, \overline{E}) \mid E \in \mathcal{E}, a \in Args_{\mathbb{S}} \setminus E\}\right)$$

Intuition: Für jede “überflüssige” stable extension E, füge ich ein neues Argument $\overline{E}$ ein, welches von allen Argumenten außerhalb von E attackiert wird. Somit ist E dann nicht mehr stable. (siehe Übung 3)

Der kanonische Zeuge $F^{stb}_{\mathbb{S}}$

Definition

Gegeben eine Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$. Das kanonische $F^{cf}_{\mathbb{S}}$ ist gegeben durch

$$F^{cf}_{\mathbb{S}} = (Args_{\mathbb{S}}, (Args_{\mathbb{S}} \times Args_{\mathbb{S}}) \setminus Pairs_{\mathbb{S}}) = (A, R).$$

Sei nun $\mathcal{E} = stb\left(F^{cf}_{\mathbb{S}}\right) \setminus \mathbb{S}$. Wir definieren weiter

$$F^{stb}_{\mathbb{S}} = \left(A \cup \{\overline{E} \mid E \in \mathcal{E}\}, R \cup \{(\overline{E}, \overline{E}), (a, \overline{E}) \mid E \in \mathcal{E}, a \in Args_{\mathbb{S}} \setminus E\}\right)$$

Proposition

Gegeben eine endliche Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$.

$$\mathbb{S} \neq \emptyset,\ \mathbb{S}\ \textit{incomparable},\ \mathbb{S}\ \textit{tight} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{S} = stb\left(F^{stb}_{\mathbb{S}}\right)$$

Charakterisierung - Stable Semantics

Theorem

Gegeben eine endliche Menge $\mathbb{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$.

$$\mathbb{S} \textit{ incomparable}, \mathbb{S} \textit{ tight} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{S} \textit{ stb-realisable}$$

Vorlesung “Formale Argumentation”

7. Definierbarkeit und Bezeugende Frameworks

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

23. Mai 2024
Leipzig