Vorlesung “Formale Argumentation”

5. Strong Equivalence

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

02. Mai 2024
Leipzig

Semantische Äquivalenz und Ersetzbarkeit

Aus der Aussagenlogik kennen wir das sogenannte Ersetzbarkeitstheorem. Notation: $\phi \equiv \psi$ gdw. $\mathit{Mod}(\phi) = \mathit{Mod}(\psi)$.

Semantische Äquivalenz und Ersetzbarkeit

Aus der Aussagenlogik kennen wir das sogenannte Ersetzbarkeitstheorem. Notation: $\phi \equiv \psi$ gdw. $Mod(\phi) = Mod(\psi)$.

Theorem (Formelvariante)

Sofern $\phi \equiv \psi$, dann $\xi \equiv \xi[\phi/\psi]$.

Beispiele:

- $\phi = \neg\neg a$, $\psi = a$, $\xi = \neg\neg\neg a \to \neg a$,

Semantische Äquivalenz und Ersetzbarkeit

Aus der Aussagenlogik kennen wir das sogenannte Ersetzbarkeitstheorem. Notation: $\phi \equiv \psi$ gdw. $Mod(\phi) = Mod(\psi)$.

Theorem (Formelvariante)

Sofern $\phi \equiv \psi$, dann $\xi \equiv \xi[\phi/\psi]$.

Beispiele:

- $\phi = \neg\neg a$, $\psi = a$, $\xi = \neg\neg\neg a \to \neg a$, $\xi[\phi/\psi] = \neg a \to \neg a$

Semantische Äquivalenz und Ersetzbarkeit

Aus der Aussagenlogik kennen wir das sogenannte Ersetzbarkeitstheorem. Notation: $\phi \equiv \psi$ gdw. $Mod(\phi) = Mod(\psi)$.

Theorem (Formelvariante)

Sofern $\phi \equiv \psi$, dann $\xi \equiv \xi[\phi/\psi]$.

Beispiele:

- $\phi = \neg\neg a$, $\psi = a$, $\xi = \neg\neg\neg a \to \neg a$, $\xi[\phi/\psi] = \neg a \to \neg a$
- $\phi = b \lor a$, $\psi = a \lor b$, $\xi = a \land b \to b \lor a$,

Semantische Äquivalenz und Ersetzbarkeit

Aus der Aussagenlogik kennen wir das sogenannte Ersetzbarkeitstheorem. Notation: $\phi \equiv \psi$ gdw. $Mod(\phi) = Mod(\psi)$.

Theorem (Formelvariante)

Sofern $\phi \equiv \psi$, dann $\xi \equiv \xi[\phi/\psi]$.

Beispiele:

- $\phi = \neg\neg a$, $\psi = a$, $\xi = \neg\neg\neg a \to \neg a$, $\xi[\phi/\psi] = \neg a \to \neg a$
- $\phi = b \vee a$, $\psi = a \vee b$, $\xi = a \wedge b \to b \vee a$, $\xi[\phi/\psi] = a \wedge b \to a \vee b$

Theorem (Theorievariante 1)

Sofern $S \equiv T$ und $S \subseteq U$, dann $U \equiv (U \setminus S) \cup T$.

Beispiele:

- $S = \{a, a \to b\}$, $T = \{a \wedge b\}$ und $U = \{a, b, a \to b\}$.

Semantische Äquivalenz und Ersetzbarkeit

Aus der Aussagenlogik kennen wir das sogenannte Ersetzbarkeitstheorem. Notation: $\phi \equiv \psi$ gdw. $Mod(\phi) = Mod(\psi)$.

Theorem (Formelvariante)

Sofern $\phi \equiv \psi$, dann $\xi \equiv \xi[\phi/\psi]$.

Beispiele:

- $\phi = \neg\neg a$, $\psi = a$, $\xi = \neg\neg\neg a \to \neg a$, $\xi[\phi/\psi] = \neg a \to \neg a$
- $\phi = b \vee a$, $\psi = a \vee b$, $\xi = a \wedge b \to b \vee a$, $\xi[\phi/\psi] = a \wedge b \to a \vee b$

Theorem (Theorievariante 1)

Sofern $S \equiv T$ und $S \subseteq U$, dann $U \equiv (U \setminus S) \cup T$.

Beispiele:

- $S = \{a, a \to b\}$, $T = \{a \wedge b\}$ und $U = \{a, b, a \to b\}$. Somit $(U \setminus S) \cup T = \{b, a \wedge b\}$

Semantische Äquivalenz und Ersetzbarkeit

Aus der Aussagenlogik kennen wir das sogenannte Ersetzbarkeitstheorem. Notation: $\phi \equiv \psi$ gdw. $Mod(\phi) = Mod(\psi)$.

Theorem (Formelvariante)

Sofern $\phi \equiv \psi$, dann $\xi \equiv \xi[\phi/\psi]$.

Beispiele:

- $\phi = \neg\neg a$, $\psi = a$, $\xi = \neg\neg\neg a \to \neg a$, $\xi[\phi/\psi] = \neg a \to \neg a$
- $\phi = b \vee a$, $\psi = a \vee b$, $\xi = a \wedge b \to b \vee a$, $\xi[\phi/\psi] = a \wedge b \to a \vee b$

Theorem (Theorievariante 1)

Sofern $S \equiv T$ und $S \subseteq U$, dann $U \equiv (U \setminus S) \cup T$.

Beispiele:

- $S = \{a, a \to b\}$, $T = \{a \wedge b\}$ und $U = \{a, b, a \to b\}$. Somit $(U \setminus S) \cup T = \{b, a \wedge b\}$
- $S = \{b, \neg b \vee c\}$, $T = \{b, c\}$ und $U = \{a, b, \neg b \vee c\}$. Somit $(U \setminus S) \cup T = \{a, b, c\}$

Semantische Äquivalenz und Ersetzbarkeit

Theorem (Theorievariante 1)

Sofern $S \equiv T$ *und* $S \subseteq U$, *dann* $U \equiv (U \setminus S) \cup T$.

Proof.

Nach Voraussetzung gilt $S \equiv T$, d.h. $Mod(S) = Mod(T)$.

Semantische Äquivalenz und Ersetzbarkeit

Theorem (Theorievariante 1)

Sofern $S \equiv T$ und $S \subseteq U$, dann $U \equiv (U \setminus S) \cup T$.

Proof.

Nach Voraussetzung gilt $S \equiv T$, d.h. $Mod(S) = Mod(T)$. Da $S \subseteq U$ haben wir die Darstellung $U = (U \setminus S) \cup S$. Folglich:

Semantische Äquivalenz und Ersetzbarkeit

Theorem (Theorievariante 1)

Sofern $S \equiv T$ und $S \subseteq U$, dann $U \equiv (U \setminus S) \cup T$.

Proof.

Nach Voraussetzung gilt $S \equiv T$, d.h. $Mod(S) = Mod(T)$. Da $S \subseteq U$ haben wir die Darstellung $U = (U \setminus S) \cup S$. Folglich:

$$\begin{aligned} Mod(U) &= Mod\left((U \setminus S) \cup S\right) \\ &= Mod(U \setminus S) \cap Mod(S) \\ &= Mod(U \setminus S) \cap Mod(T) \\ &= Mod\left((U \setminus S) \cup T\right) \end{aligned}$$

Somit ist $U \equiv (U \setminus S) \cup T$ gezeigt. □

Semantische Äquivalenz und Ersetzbarkeit

Theorem (Theorievariante 1)

Sofern $S \equiv T$ *und* $S \subseteq U$, *dann* $U \equiv (U \setminus S) \cup T$.

Proof.

Nach Voraussetzung gilt $S \equiv T$, d.h. $Mod(S) = Mod(T)$. Da $S \subseteq U$ haben wir die Darstellung $U = (U \setminus S) \cup S$. Folglich:

$$\begin{aligned} Mod(U) &= Mod\left((U \setminus S) \cup S\right) \\ &= Mod(U \setminus S) \cap Mod(S) \\ &= Mod(U \setminus S) \cap Mod(T) \\ &= Mod\left((U \setminus S) \cup T\right) \end{aligned}$$

Somit ist $U \equiv (U \setminus S) \cup T$ gezeigt. □

Im Beweis wurde “nur” die sogenannte *Schnitteigenschaft* benutzt, nämlich: $Mod(S \cup S') = Mod(S) \cap Mod(S')$.

Semantische Äquivalenz und Ersetzbarkeit

Theorem (Theorievariante 1)

Sofern $S \equiv T$ *und* $S \subseteq U$*, dann* $U \equiv (U \setminus S) \cup T$.

Explizite Formulierung der Ersetzung von S durch T innerhalb einer Theorie U.

Semantische Äquivalenz und Ersetzbarkeit

Theorem (Theorievariante 1)

Sofern $S \equiv T$ und $S \subseteq U$, dann $U \equiv (U \setminus S) \cup T$.

Explizite Formulierung der Ersetzung von S durch T innerhalb einer Theorie U.

Theorem (Theorievariante 2)

Sofern $S \equiv T$, dann $S \cup H \equiv T \cup H$ für alle H.

Diese Variante betont den dynamischen Aspekt. Semantische Äquivalenz gilt auch in Erweiterungen der Theorien.

Anmerkungen:

Semantische Äquivalenz und Ersetzbarkeit

Theorem (Theorievariante 1)

Sofern $S \equiv T$ und $S \subseteq U$, dann $U \equiv (U \setminus S) \cup T$.

Explizite Formulierung der Ersetzung von S durch T innerhalb einer Theorie U.

Theorem (Theorievariante 2)

Sofern $S \equiv T$, dann $S \cup H \equiv T \cup H$ für alle H.

Diese Variante betont den dynamischen Aspekt. Semantische Äquivalenz gilt auch in Erweiterungen der Theorien.

Anmerkungen:

- Beweis von Variante 2 auch mit Hilfe von Schnitteigenschaft

Semantische Äquivalenz und Ersetzbarkeit

Theorem (Theorievariante 1)

Sofern $S \equiv T$ *und* $S \subseteq U$, *dann* $U \equiv (U \setminus S) \cup T$.

Explizite Formulierung der Ersetzung von S durch T innerhalb einer Theorie U.

Theorem (Theorievariante 2)

Sofern $S \equiv T$, *dann* $S \cup H \equiv T \cup H$ *für alle* H.

Diese Variante betont den dynamischen Aspekt. Semantische Äquivalenz gilt auch in Erweiterungen der Theorien.

Anmerkungen:

- Beweis von Variante 2 auch mit Hilfe von Schnitteigenschaft
- beide Varianten implizieren sich gegenseitig (Übung 2)

Semantische Äquivalenz und Ersetzbarkeit

Theorem (Theorievariante 1)

Sofern $S \equiv T$ *und* $S \subseteq U$, *dann* $U \equiv (U \setminus S) \cup T$.

Explizite Formulierung der Ersetzung von S durch T innerhalb einer Theorie U.

Theorem (Theorievariante 2)

Sofern $S \equiv T$, *dann* $S \cup H \equiv T \cup H$ *für alle* H.

Diese Variante betont den dynamischen Aspekt. Semantische Äquivalenz gilt auch in Erweiterungen der Theorien.

Anmerkungen:

- Beweis von Variante 2 auch mit Hilfe von Schnitteigenschaft
- beide Varianten implizieren sich gegenseitig (Übung 2)
- dynamischer Aspekt ist definitorisch für strong equivalance

Argumentation Semantics und Schnitteigenschaft

- für $F = (A, R)$ und $G = (A', R')$ definieren wir die Vereinigung $F \sqcup G$ als $(A \cup A', R \cup R')$

Argumentation Semantics und Schnitteigenschaft

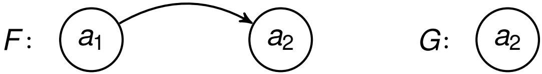
- für $F = (A, R)$ und $G = (A', R')$ definieren wir die Vereinigung $F \sqcup G$ als $(A \cup A', R \cup R')$
- die Schnitteigenschaft gilt

Argumentation Semantics und Schnitteigenschaft

- für $F = (A, R)$ und $G = (A', R')$ definieren wir die Vereinigung $F \sqcup G$ als $(A \cup A', R \cup R')$
- die Schnitteigenschaft gilt **nicht**, d.h.

$$\sigma\,(F \sqcup G) \neq \sigma(F) \cap \sigma(G) \text{ ist möglich}$$

Beispiel:

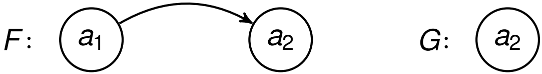


Argumentation Semantics und Schnitteigenschaft

- für $F = (A, R)$ und $G = (A', R')$ definieren wir die Vereinigung $F \sqcup G$ als $(A \cup A', R \cup R')$
- die Schnitteigenschaft gilt **nicht**, d.h.

$$\sigma(F \sqcup G) \neq \sigma(F) \cap \sigma(G) \text{ ist möglich}$$

Beispiel:



$$stb(F \sqcup G) = stb(F) = \{\{a_1\}\} \neq \emptyset = \{\{a_1\}\} \cap \{\{a_2\}\} = stb(F) \cap stb(G)$$

- Nebenbemerkung: Man kann AFs auch so in Mengen kodieren, daß Vereinigung von AFs gleich der Vereinigung der korrespondierenden Mengen ist.

Strong Equivalence für AFs

Im Falle der Schnitteigenschaft galt:

Theorem (Theorievariante 2)

Sofern $S \equiv T$, dann $S \cup H \equiv T \cup H$ für alle H.

Interpretiert auf AFs wäre dies:

Sofern $\sigma(F) = \sigma(G)$, dann $\sigma(F \sqcup H) = \sigma(G \sqcup H)$ für alle AFs H.

Strong Equivalence für AFs

Im Falle der Schnitteigenschaft galt:

Theorem (Theorievariante 2)

Sofern $S \equiv T$, dann $S \cup H \equiv T \cup H$ für alle H.

Interpretiert auf AFs wäre dies:

$$\text{Sofern } \sigma(F) = \sigma(G), \text{ dann } \sigma(F \sqcup H) = \sigma(G \sqcup H) \text{ für alle AFs } H.$$

Beispiele:

Strong Equivalence für AFs

Im Falle der Schnitteigenschaft galt:

Theorem (Theorievariante 2)

Sofern $S \equiv T$*, dann* $S \cup H \equiv T \cup H$ *für alle* H*.*

Interpretiert auf AFs wäre dies:

Sofern $\sigma(F) = \sigma(G)$, dann $\sigma(F \sqcup H) = \sigma(G \sqcup H)$ für alle AFs H.

Beispiele:

$stb(F) = stb(G)$, aber $stb(F \sqcup H) \neq stb(G \sqcup H)$ für $H =$

Strong Equivalence für AFs

Im Falle der Schnitteigenschaft galt:

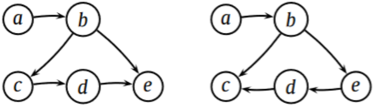
Theorem (Theorievariante 2)

Sofern $S \equiv T$, dann $S \cup H \equiv T \cup H$ für alle H.

Interpretiert auf AFs wäre dies:

Sofern $\sigma(F) = \sigma(G)$, dann $\sigma(F \sqcup H) = \sigma(G \sqcup H)$ für alle AFs H.

Beispiele:



Strong Equivalence für AFs

Im Falle der Schnitteigenschaft galt:

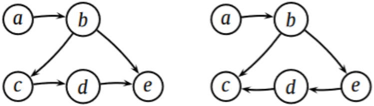
Theorem (Theorievariante 2)

Sofern $S \equiv T$, dann $S \cup H \equiv T \cup H$ für alle H.

Interpretiert auf AFs wäre dies:

Sofern $\sigma(F) = \sigma(G)$, dann $\sigma(F \sqcup H) = \sigma(G \sqcup H)$ für alle AFs H.

Beispiele:



$stb(F) = stb(G)$, aber $stb(F \sqcup H) \neq stb(G \sqcup H)$ für $H =$

Strong Equivalence für AFs

Im Falle der Schnitteigenschaft galt:

Theorem (Theorievariante 2)

Sofern $S \equiv T$, dann $S \cup H \equiv T \cup H$ für alle H.

Interpretiert auf AFs wäre dies:

Sofern $\sigma(F) = \sigma(G)$, dann $\sigma(F \sqcup H) = \sigma(G \sqcup H)$ für alle AFs H.

Beispiele:

Strong Equivalence für AFs

Im Falle der Schnitteigenschaft galt:

Theorem (Theorievariante 2)

Sofern $S \equiv T$, dann $S \cup H \equiv T \cup H$ für alle H.

Interpretiert auf AFs wäre dies:

Sofern $\sigma(F) = \sigma(G)$, dann $\sigma(F \sqcup H) = \sigma(G \sqcup H)$ für alle AFs H.

Beispiele:

$stb(F) = stb(G)$, und $stb(F \sqcup H) = stb(G \sqcup H)$ für alle H!

Wie beweist man das?

Strong Equivalence für AFs

Definition

Gegeben zwei AFs F, G und eine Semantik σ. F und G sind

- *ordinarily equivalent* w.r.t. σ, falls $\sigma(F) = \sigma(G)$ (In Zeichen: $F \equiv^{\sigma} G$)
- *strongly equivalent* w.r.t. σ, falls $\sigma(F \sqcup H) = \sigma(G \sqcup H)$ für alle AFs H. (In Zeichen: $F \equiv^{\sigma}_{s} G$)

Strong Equivalence für AFs

Definition

Gegeben zwei AFs F, G und eine Semantik σ. F und G sind

- *ordinarily equivalent* w.r.t. σ, falls $\sigma(F) = \sigma(G)$
  (In Zeichen: $F \equiv^{\sigma} G$)
- *strongly equivalent* w.r.t. σ, falls $\sigma(F \sqcup H) = \sigma(G \sqcup H)$ für alle AFs H. (In Zeichen: $F \equiv^{\sigma}_{s} G$)

Wissen schon:

- strong equivalence $\Rightarrow$ ordinary equivalence (setze $H = H_{\varnothing}$)

Strong Equivalence für AFs

Definition

Gegeben zwei AFs F, G und eine Semantik σ. F und G sind

- *ordinarily equivalent* w.r.t. σ, falls $\sigma(F) = \sigma(G)$
  (In Zeichen: $F \equiv^{\sigma} G$)
- *strongly equivalent* w.r.t. σ, falls $\sigma(F \sqcup H) = \sigma(G \sqcup H)$ für alle AFs H. (In Zeichen: $F \equiv^{\sigma}_{s} G$)

Wissen schon:

- strong equivalence $\Rightarrow$ ordinary equivalence (setze $H = H_{\emptyset}$)
- ordinary equivalence $\not\Rightarrow$ strong equivalence (siehe Beisp.)

Strong Equivalence für AFs

Definition

Gegeben zwei AFs F, G und eine Semantik σ. F und G sind

- *ordinarily equivalent* w.r.t. σ, falls $\sigma(F) = \sigma(G)$ (In Zeichen: $F \equiv^\sigma G$)
- *strongly equivalent* w.r.t. σ, falls $\sigma(F \sqcup H) = \sigma(G \sqcup H)$ für alle AFs H. (In Zeichen: $F \equiv^\sigma_s G$)

Wissen schon:

- strong equivalence $\Rightarrow$ ordinary equivalence (setze $H = H_\emptyset$)
- ordinary equivalence $\not\Rightarrow$ strong equivalence (siehe Beisp.)

Wie kann ich also strong equivalence entscheiden? Eine positive Antwort verlangt per Definition eine Überprüfung der Extensionen von unendlich vielen Erweiterungen H ...

Kernels für AFs

Notation: Für ein AF $F = (A', R')$ benutzen wir:

1. $A(F) = A'$ (Argumente von F)
2. $R(F) = R'$ (Attacken von F)
3. $L(F) = \{a \in A(F) \mid (a, a) \in R(F)\}$ (Selbstattackierer in F)

Kernels für AFs

Notation: Für ein AF $F = (A', R')$ benutzen wir:

1. $A(F) = A'$ (Argumente von F)
2. $R(F) = R'$ (Attacken von F)
3. $L(F) = \{a \in A(F) \mid (a,a) \in R(F)\}$ (Selbstattackierer in F)

Definition

Gegeben ein AF F. Das AF F^{sk} heißt *stable kernel* von F mit:

- $A\left(F^{sk}\right) = A(F)$, und
- $R\left(F^{sk}\right) = R(F) \setminus \{(a,b) \in R(F) \mid a \neq b, a \in L(F)\}$.

Kernels für AFs

Notation: Für ein AF $F = (A', R')$ benutzen wir:

1. $A(F) = A'$ (Argumente von F)
2. $R(F) = R'$ (Attacken von F)
3. $L(F) = \{a \in A(F) \mid (a,a) \in R(F)\}$ (Selbstattackierer in F)

Definition

Gegeben ein AF F. Das AF F^{sk} heißt *stable kernel* von F mit:

- $A\left(F^{sk}\right) = A(F)$, und
- $R\left(F^{sk}\right) = R(F) \setminus \{(a,b) \in R(F) \mid a \neq b, a \in L(F)\}$.

Beispiel:

Attacken in $R(F) \setminus R\left(F^{sk}\right)$ heißen *redundant*.

Kernels für AFs

Notation: Für ein AF $F = (A', R')$ benutzen wir:

1. $A(F) = A'$ (Argumente von F)
2. $R(F) = R'$ (Attacken von F)
3. $L(F) = \{a \in A(F) \mid (a, a) \in R(F)\}$ (Selbstattackierer in F)

Definition

Gegeben ein AF F. Das AF F^{sk} heißt *stable kernel* von F mit:

- $A\left(F^{sk}\right) = A(F)$, und
- $R\left(F^{sk}\right) = R(F) \setminus \{(a, b) \in R(F) \mid a \neq b, a \in L(F)\}$.

Einfache (und oft implizit genutzte) Eigenschaften:

1. $A\left(F^{sk}\right) = A(F)$ (Argumente gleich)
2. $R\left(F^{sk}\right) \subseteq R(F)$ (weniger Attacken)
3. $L\left(F^{sk}\right) = L(F)$ (Selbstattackierer gleich)

Charakterisierung von Strong Equivalence

Theorem (2010, Oikarinen Woltran)

Für zwei AFs F, G gilt:

$$F^{sk} = G^{sk} \quad gdw. \quad F \equiv_s^{stb} G$$

- Beweis folgt

Charakterisierung von Strong Equivalence

Theorem (2010, Oikarinen Woltran)

Für zwei AFs F, G gilt:

$$F^{sk} = G^{sk} \quad gdw. \quad F \equiv_s^{stb} G$$

- Beweis folgt
- benötigen hierzu zwei Lemmata

Lemma (Neutral bzgl. Extensionen)

Gegeben ein AF F. Es gilt, $stb(F) = stb\left(F^{sk}\right)$

Charakterisierung von Strong Equivalence

Theorem (2010, Oikarinen Woltran)

Für zwei AFs F, G gilt:

$$F^{sk} = G^{sk} \quad \textit{gdw.} \quad F \equiv_s^{stb} G$$

- Beweis folgt
- benötigen hierzu zwei Lemmata

Lemma (Neutral bzgl. Extensionen)

Gegeben ein AF F. Es gilt, $stb(F) = stb\left(F^{sk}\right)$

Lemma (Robust bzgl. $\sqcup$)

Gegeben zwei AFs F und G. Es gilt: Falls $F^{sk} = G^{sk}$, dann $(F \sqcup H)^{sk} = (G \sqcup H)^{sk}$ für alle AFs H.

Neutralität bzgl. Extensionen

Lemma

Gegeben ein AF F. Es gilt, $stb(F) = stb\left(F^{sk}\right)$

Proof.

Da (a, b) redundant in F, falls $a \in L(F)$ überprüfen wir leicht:

1. $cf(F) = cf\left(F^{sk}\right)$

Neutralität bzgl. Extensionen

Lemma

Gegeben ein AF F. Es gilt, $stb(F) = stb\left(F^{sk}\right)$

Proof.

Da (a, b) redundant in F, falls $a \in L(F)$ überprüfen wir leicht:

1. $cf(F) = cf\left(F^{sk}\right)$
2. für jedes $E \in cf(F)$: E attackiert alle Argumente in $A(F) \setminus E$ gdw. E attackiert alle Argumente in $A\left(F^{sk}\right) \setminus E$

Neutralität bzgl. Extensionen

Lemma

Gegeben ein AF F. Es gilt, $stb(F) = stb\left(F^{sk}\right)$

Proof.

Da (a, b) redundant in F, falls $a \in L(F)$ überprüfen wir leicht:

1. $cf(F) = cf\left(F^{sk}\right)$
2. für jedes $E \in cf(F)$: E attackiert alle Argumente in $A(F) \setminus E$ gdw. E attackiert alle Argumente in $A\left(F^{sk}\right) \setminus E$

Somit gilt nach Definition der stabilen Semantik, daß $stb(F) = stb\left(F^{sk}\right)$.

□

Robustheit bzgl. $\sqcup$

Lemma

Gegeben zwei AFs F und G. Es gilt: Falls $F^{sk} = G^{sk}$, dann $(F \sqcup H)^{sk} = (G \sqcup H)^{sk}$ für alle AFs H.

Proof.

Wir sehen $A\left((F \sqcup H)^{sk}\right) = A\left((G \sqcup H)^{sk}\right)$ und $L\left((F \sqcup H)^{sk}\right) = L\left((G \sqcup H)^{sk}\right)$. Noch zeigen $(a, b) \in R\left((F \sqcup H)^{sk}\right)$ gdw. $(a, b) \in R\left((G \sqcup H)^{sk}\right)$ für $a \neq b$.

Robustheit bzgl. $\sqcup$

Lemma

Gegeben zwei AFs F und G. Es gilt: Falls $F^{sk} = G^{sk}$, dann $(F \sqcup H)^{sk} = (G \sqcup H)^{sk}$ für alle AFs H.

Proof.

Wir sehen $A\left((F \sqcup H)^{sk}\right) = A\left((G \sqcup H)^{sk}\right)$ und $L\left((F \sqcup H)^{sk}\right) = L\left((G \sqcup H)^{sk}\right)$. Noch zeigen $(a, b) \in R\left((F \sqcup H)^{sk}\right)$ gdw. $(a, b) \in R\left((G \sqcup H)^{sk}\right)$ für $a \neq b$.

($\subseteq$) Sei $(a, b) \in R\left((F \sqcup H)^{sk}\right)$, d.h. $(a, b) \in R(F \sqcup H)$. Somit $a \notin L(F \sqcup H)$. Also, $a \notin L(F)$, $a \notin L(H)$ und $a \notin L(G)$ wegen $F^{sk} = G^{sk}$.

Robustheit bzgl. $\sqcup$

Lemma

Gegeben zwei AFs F und G. Es gilt: Falls $F^{sk} = G^{sk}$, dann $(F \sqcup H)^{sk} = (G \sqcup H)^{sk}$ für alle AFs H.

Proof.

Wir sehen $A\big((F \sqcup H)^{sk}\big) = A\big((G \sqcup H)^{sk}\big)$ und $L\big((F \sqcup H)^{sk}\big) = L\big((G \sqcup H)^{sk}\big)$. Noch zeigen $(a, b) \in R\big((F \sqcup H)^{sk}\big)$ gdw. $(a, b) \in R\big((G \sqcup H)^{sk}\big)$ für $a \neq b$.

($\subseteq$) Sei $(a, b) \in R\big((F \sqcup H)^{sk}\big)$, d.h. $(a, b) \in R(F \sqcup H)$. Somit $a \notin L(F \sqcup H)$. Also, $a \notin L(F)$, $a \notin L(H)$ und $a \notin L(G)$ wegen $F^{sk} = G^{sk}$. Nochmals, $(a, b) \in R(F \sqcup H)$: Im Falle $(a, b) \in R(F)$, dann $(a, b) \in R\big(F^{sk}\big)$ und somit $(a, b) \in R\big(G^{sk}\big)$ und schließlich $(a, b) \in R(G)$.

Robustheit bzgl. $\sqcup$

Lemma

Gegeben zwei AFs F und G. Es gilt: Falls $F^{sk} = G^{sk}$*, dann* $(F \sqcup H)^{sk} = (G \sqcup H)^{sk}$ *für alle AFs H.*

Proof.

Wir sehen $A\big((F \sqcup H)^{sk}\big) = A\big((G \sqcup H)^{sk}\big)$ und $L\big((F \sqcup H)^{sk}\big) = L\big((G \sqcup H)^{sk}\big)$. Noch zeigen $(a,b) \in R\big((F \sqcup H)^{sk}\big)$ gdw. $(a,b) \in R\big((G \sqcup H)^{sk}\big)$ für $a \neq b$.

($\subseteq$) Sei $(a,b) \in R\big((F \sqcup H)^{sk}\big)$, d.h. $(a,b) \in R(F \sqcup H)$. Somit $a \notin L(F \sqcup H)$. Also, $a \notin L(F)$, $a \notin L(H)$ und $a \notin L(G)$ wegen $F^{sk} = G^{sk}$. Nochmals, $(a,b) \in R(F \sqcup H)$: Im Falle $(a,b) \in R(F)$, dann $(a,b) \in R\big(F^{sk}\big)$ und somit $(a,b) \in R\big(G^{sk}\big)$ und schließlich $(a,b) \in R(G)$. Somit in beiden Fällen $(a,b) \in R(G \sqcup H)$ und da $a \notin L(G \sqcup H)$ nun endlich, $(a,b) \in R\big((G \sqcup H)^{sk}\big)$.

Robustheit bzgl. $\sqcup$

Lemma

Gegeben zwei AFs F und G. Es gilt: Falls $F^{sk} = G^{sk}$, dann $(F \sqcup H)^{sk} = (G \sqcup H)^{sk}$ für alle AFs H.

Proof.

Wir sehen $A\left((F \sqcup H)^{sk}\right) = A\left((G \sqcup H)^{sk}\right)$ und $L\left((F \sqcup H)^{sk}\right) = L\left((G \sqcup H)^{sk}\right)$. Noch zeigen $(a,b) \in R\left((F \sqcup H)^{sk}\right)$ gdw. $(a,b) \in R\left((G \sqcup H)^{sk}\right)$ für $a \neq b$.

($\subseteq$) Sei $(a,b) \in R\left((F \sqcup H)^{sk}\right)$, d.h. $(a,b) \in R(F \sqcup H)$. Somit $a \notin L(F \sqcup H)$. Also, $a \notin L(F)$, $a \notin L(H)$ und $a \notin L(G)$ wegen $F^{sk} = G^{sk}$. Nochmals, $(a,b) \in R(F \sqcup H)$: Im Falle $(a,b) \in R(F)$, dann $(a,b) \in R\left(F^{sk}\right)$ und somit $(a,b) \in R\left(G^{sk}\right)$ und schließlich $(a,b) \in R(G)$. Somit in beiden Fällen $(a,b) \in R(G \sqcup H)$ und da $a \notin L(G \sqcup H)$ nun endlich, $(a,b) \in R\left((G \sqcup H)^{sk}\right)$.

($\supseteq$) analog.

Charakterisierung von Strong Equivalence

Theorem (2010, Oikarinen Woltran)

Für zwei AFs F, G gilt:

$$F^{sk} = G^{sk} \quad \textit{gdw.} \quad F \equiv_s^{stb} G$$

Proof.

($\Rightarrow$) Gegeben ein beliebiges AF H. Es gilt:

Charakterisierung von Strong Equivalence

Theorem (2010, Oikarinen Woltran)

Für zwei AFs F, G gilt:

$$F^{sk} = G^{sk} \quad \textit{gdw.} \quad F \equiv_s^{stb} G$$

Proof.

($\Rightarrow$) Gegeben ein beliebiges AF H. Es gilt:

$$\begin{aligned} stb(F \sqcup H) &= stb\left((F \sqcup H)^{sk}\right) && \text{(Neutralität)} \\ &= stb\left((G \sqcup H)^{sk}\right) && \text{(Robustheit)} \\ &= stb(G \sqcup H) && \text{(Neutralität)} \end{aligned}$$

Charakterisierung von Strong Equivalence

Theorem (2010, Oikarinen Woltran)

Für zwei AFs F, G gilt:

$$F^{sk} = G^{sk} \quad gdw. \quad F \equiv_s^{stb} G$$

Proof.

($\Rightarrow$) Gegeben ein beliebiges AF H. Es gilt:

$$\begin{aligned} stb(F \sqcup H) &= stb\big((F \sqcup H)^{sk}\big) && \text{(Neutralität)} \\ &= stb\big((G \sqcup H)^{sk}\big) && \text{(Robustheit)} \\ &= stb(G \sqcup H) && \text{(Neutralität)} \end{aligned}$$

Also, $F \equiv_s^{stb} G$. $\square$

Charakterisierung von Strong Equivalence

Theorem (2010, Oikarinen Woltran)

Für zwei AFs F, G gilt:

$$F^{sk} = G^{sk} \quad \textit{gdw.} \quad F \equiv_s^{stb} G$$

Proof.

($\Leftarrow$) Wir zeigen die Kontraposition,

Charakterisierung von Strong Equivalence

Theorem (2010, Oikarinen Woltran)

Für zwei AFs F, G gilt:

$$F^{sk} = G^{sk} \quad gdw. \quad F \equiv_s^{stb} G$$

Proof.

($\Leftarrow$) Wir zeigen die Kontraposition, d.h.: Falls $F^{sk} \neq G^{sk}$, dann $F \not\equiv_s^{stb} G$.

Charakterisierung von Strong Equivalence

Theorem (2010, Oikarinen Woltran)

Für zwei AFs F, G gilt:

$$F^{sk} = G^{sk} \quad \textit{gdw.} \quad F \equiv_s^{stb} G$$

Proof.

($\Leftarrow$) Wir zeigen die Kontraposition, d.h.: Falls $F^{sk} \neq G^{sk}$, dann $F \not\equiv_s^{stb} G$. Fallunterscheidung:

1. $A\left(F^{sk}\right) \neq A\left(G^{sk}\right)$
2. $L\left(F^{sk}\right) \neq L\left(G^{sk}\right)$
3. $R\left(F^{sk}\right) \neq R\left(G^{sk}\right)$

Charakterisierung von Strong Equivalence

Theorem (2010, Oikarinen Woltran)

Für zwei AFs F, G gilt:

$$F^{sk} = G^{sk} \quad gdw. \quad F \equiv_s^{stb} G$$

Proof.

(⇐) Wir zeigen die Kontraposition, d.h.: Falls $F^{sk} \neq G^{sk}$, dann $F \not\equiv_s^{stb} G$. Fallunterscheidung:

1. $A(F^{sk}) \neq A(G^{sk})$
2. $L(F^{sk}) \neq L(G^{sk})$
3. $R(F^{sk}) \neq R(G^{sk})$

In jedem einzelnen Fall muß ein H angegeben werden, so daß $stb(F \cup H) \neq stb(G \cup H)$. Siehe Tafel! □

Charakterisierung von Strong Equivalence

Was ist mit den anderen Semantiken. Ist der stable kernel auch charakterisierend für admissible semantics? Gilt also:

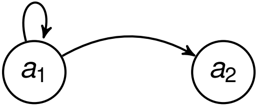
$$F^{sk} = G^{sk} \quad \text{gdw.} \quad F \equiv_s^{adm} G?$$

Charakterisierung von Strong Equivalence

Was ist mit den anderen Semantiken. Ist der stable kernel auch charakterisierend für admissible semantics? Gilt also:

$$F^{sk} = G^{sk} \quad \text{gdw.} \quad F \equiv_s^{adm} G?$$

F :



G:

Charakterisierung von Strong Equivalence

Was ist mit den anderen Semantiken. Ist der stable kernel auch charakterisierend für admissible semantics? Gilt also:

$$F^{sk} = G^{sk} \quad \text{gdw.} \quad F \equiv_s^{adm} G?$$

Nein. Stable kernel erhält noch nicht einmal die admissible extensions.

☞ Es existieren kernel für alle bekannten Semantiken

☞ admissible kernel in Übung 2

Zusammenfallen von Äquivalenzklassen

Theorem

Für zwei AFs F, G gilt:

$$F \equiv_s^{adm} G \quad gdw. \quad F \equiv_s^{prf} G$$

Zusammenfallen von Äquivalenzklassen

Theorem

Für zwei AFs F, G gilt:

$$F \equiv_s^{adm} G \quad gdw. \quad F \equiv_s^{prf} G$$

Proof.

Siehe Tafel. $\square$

Vorlesung “Formale Argumentation”

5. Strong Equivalence

Ringo Baumann
Professur für Formale Argumentation
und Logisches Schließen

02. Mai 2024
Leipzig