Universität Leipzig
Institut für Informatik
Wintersemester 2018/19

Prof. Dr. Andreas Maletti
Dr. Doreen Götze,
Martin Böhm, Erik Paul,
Tobias Rosenkranz, Mirko Schulze

Aufgaben zur Lehrveranstaltung

Diskrete Strukturen

Serie 3

Hinweise:

- Abgabeschluss der Hausaufgaben: **27.11.2018** vor der Vorlesung.
- Beschriften Sie jedes Lösungsblatt mit **Matrikelnummer**, **Name**, **Übungsgruppe**.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen dokumentenecht auf; mit Bleistift verfasste Abgaben werden nicht bewertet.
- Die Hausaufgaben werden in der Hörsaalübung (Termin offen) besprochen.

Hausaufgabe 3.1

(a) Welche der beiden folgenden Relationen sind Abbildungen? Begründen Sie Ihre Aussagen kurz.

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$$
$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y^2\}$$

(b) Es seien $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to A$ Abbildungen. Entscheiden Sie:

	wahr	falsch
$f\,;g = \mathrm{id}_A \implies g = f^{-1}$		
f^{-1} bijektiv $\iff f$ bijektiv		
f^{-1} Abbildung $\iff f$ bijektiv		
f, g bijektiv $\iff g = f^{-1}$ und $f = g^{-1}$		

(c) Sei A eine Menge und $f\colon A \to A$ eine Abbildung, sodass für alle $a \in A$ die Gleichung $f(f(a)) = f(a)$ gilt. Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist injektiv.
(ii) f ist surjektiv.
(iii) f ist bijektiv.

Hausaufgabe 3.2

(a) Sei $M = \{1, 2, \ldots, 7\}$. Betrachten Sie die durch die folgende Tabelle definierte Relation R auf M. Eine Markierung in Zeile x und Spalte y bedeutet $(x, y) \in R$.

	1	2	3	4	5	6	7
1		✓					
2							
3		✓					
4					✓		
5						✓	
6							
7						✓	

(i) Ergänzen Sie die Markierungen in der Tabelle so, dass die dann beschriebene Relation R' die kleinste Äquivalenzrelation auf M mit $R \subseteq R'$ ist.

(ii) Bestimmen Sie $[1]_{R'}$ sowie $\left|{}^{M}/_{R'}\right|$.

(b) Geben Sie Hasse-Diagramme für die folgenden Ordnungsrelationen T_1 und T_2 an und bestimmen Sie jeweils alle minimalen und maximalen Elemente bezüglich der Grundmenge.

(i) Für $M_1 = \{3, 4, 5, 9, 10, 12, 36, 45\}$ sei

$$T_1 = \{(m, n) \in M_1 \times M_1 \mid \exists k\ (k \in \mathbb{N} \land n = k \cdot m)\}.$$

(ii) Für $M_2 = (\{2, 3, 5, 7\} \times \{2, 3, 5, 7\}) \cap <$ sei

$$T_2 = \{((m_1, n_1), (m_2, n_2)) \in M_2 \times M_2 \mid m_1 \cdot n_2 \leq m_2 \cdot n_1\}.$$

Hinweis: Sie müssen nicht nachweisen, dass es sich bei den angegebenen Relationen tatsächlich um Ordnungsrelationen handelt.

Seminaraufgabe 3.3 (Abbildungen)

(a) Entscheiden Sie, ob es sich bei den folgenden Relationen um Abbildungen handelt.

$$R_1 = \{(m,n) \mid m+1 = n\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$
$$R_2 = \{(m,n) \mid \exists k\ (km = n)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$
$$R_3 = \{(m,n) \mid \exists n\ (n = \sqrt{m})\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

(b) Wir betrachten die Nachfolgerabbildung s auf den natürlichen Zahlen.

(i) Geben Sie eine formale Abbildungsdefinition an.

(ii) Geben Sie $s^{-1}(\{4,5\})$ und $s^{-1}(\{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}\})$ an.

(iii) Ist s injektiv, surjektiv oder bijektiv?

(c) Sei $f\colon A \to B$ Abbildung. Zeigen Sie, dass die Aussagen

(i) f ist injektiv,

(ii) f^{-1} ist eindeutig,

(iii) es existiert eine Abbildung $g\colon B \to A$ mit $f\,;g = \mathrm{id}_A$

äquivalent sind.

(d) Geben Sie eine Auswahlfunktion für die folgenden Mengen an.

(i) $\{\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\},\ldots\}$

(ii) $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$

(iii) $\{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R},\ a < b\}$

(iv) $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\}$

Hinweis: Dabei bezeichnet $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ das offene Intervall von a bis b.

Seminaraufgabe 3.4 (Ordnungsrelationen, Äquivalenzrelationen)

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie die Relation

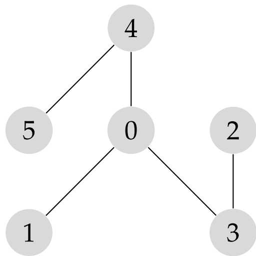
$$\sim_n = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid n \mid (a - b)\}$$

(i) Beweisen Sie, dass $\sim_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ ist.

(ii) Geben Sie ${}^{\mathbb{Z}}\!/_{\sim_n}$ explizit an.

Hinweis: Für $a, b \in \mathbb{Z}$ schreiben wir $a \mid b$, falls ein $t \in \mathbb{Z}$ mit $b = t \cdot a$ existiert.

(b) (i) Die Ordnungsrelation $\lhd$ sei durch das folgende Hasse-Diagramm gegeben.

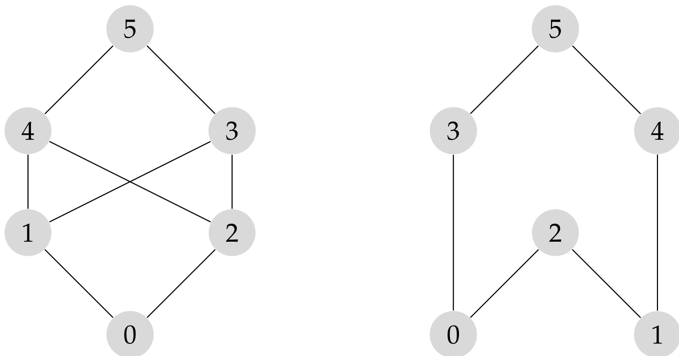


Geben Sie $\lhd$ explizit an.

(ii) Geben Sie das Hasse-Diagramm für die folgende Ordnungsrelation $\bowtie$ an.

$$\begin{aligned}\bowtie \ := \{&(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4),\\ &(0,1), (1,2), (0,2), (3,1), (3,2), (3,4), (0,4)\}\end{aligned}$$

(iii) Betrachten Sie die folgenden Ordnungsrelationen R_1 und R_2 (dargestellt als Hasse-Diagramme).



(a) Relation R_1.　　(b) Relation R_2.

Geben Sie für jede Relation $R \in \{R_1, R_2\}$

i. alle maximalen Elemente an!
ii. alle oberen Schranken für $\{1, 3\}$ an!
iii. alle unteren Schranken für $\{0, 1\}$ an!
iv. das größte Element von $\{2, 3\}$ an!