Diskrete Strukturen

Vorlesung 1: Aussagenlogik

16. Oktober 2018

Team & Sprechstunden

- Hausaufgabenkontrolle:
  - Igor Dimitrov
  - Tarik Havighorst
  - Emanuel Krämer
- Hörsaalübung: Mirko Schulze

Team & Sprechstunden

- Hausaufgabenkontrolle:
  - Igor Dimitrov
  - Tarik Havighorst
  - Emanuel Krämer
- Hörsaalübung: Mirko Schulze
- Sprechstunden:

Martin Böhm	donnerstags, 13:15–14:15 Uhr
Doreen Götze	nach Vereinbarung
Andreas Maletti	mittwochs, 11:00–13:00 Uhr
Erik Paul	mittwochs, 15:15–16:15 Uhr
Tobias Rosenkranz	freitags, 12:00–13:00 Uhr
Mirko Schulze	nach Vereinbarung

Vorlesungsstruktur

1. Mathematische Grundlagen
   - Aussagen- und Prädikatenlogik
   - Naive Mengenlehre
   - Relationen und Funktionen

2. Diskrete Strukturen
   - Algebraische Strukturen
   - Bäume und Graphen
   - Arithmetik

Nächste Termine — Modul “Diskrete Strukturen”

Hörsaalübung (Mo. 9:15)	Vorlesung (Di. 17:15)
15.10.	16.10. Aussagenlogik (Publikation 1. Übungsblatt)
22.10. 1. Übungswoche	23.10. Prädikatenlogik
29.10.	30.10. Mengenlehre (1. Abgabe + 2. Übungsblatt)
5.11. Hörsaalübung 2. Übungswoche	6.11. Relationen
12.11.	13.11. Funktionen (2. Abgabe + 3. Übungsblatt)
19.11. Hörsaalübung 3. Übungsw. (Feiertag 21.11.)	20.11. Auswahlaxiom
26.11.	27.11. Ordnungsrelationen (3. Abgabe + 4. Übungsblatt)
3.12. **dies academicus** 4. Übungswoche	4.12. Kardinalitäten
10.12. Hörsaalübung	11.12. Verbände (4. Abgabe + 5. Übungsblatt)

Hörsaalübung (Mo. 9:15)	Vorlesung (Di. 17:15)
17.12. Hörsaalübung 5. Übungswoche	18.12. Boolesche Algebren
24.12.	25.12.
31.12.	1.1.
7.1.	8.1. Körper (5. Abgabe + 6. Übungsblatt)
14.1. Hörsaalübung 6. Übungswoche	15.1. Graphen und Bäume
21.1.	22.1. Planarität von Graphen (6. Abgabe + 7. Übungsblatt)
28.1. Hörsaalübung 7. Übungswoche	29.1. Färbbarkeit von Graphen
4.2. Tutorium (Klausurvorbereitung)	5.2. Arithmetik
11.2.	12.2.

Vorlesungsziele

- Standardnotation lesen und schreiben
- Einführung mathematisches Denken
- Beweise lesen und analysieren
- (formale) Beweise führen

Vorlesungsmaterialien

- Folien, Übungs- und Hausaufgaben, Ankündigungen im AlmaWeb
- Literatur für Selbststudium und Vertiefung:
  (in der Bibliothek als Buch und E-Buch verfügbar)
  - Christoph Meinel, Martin Mundhenk
    ▸ Mathematische Grundlagen der Informatik
    Vieweg+Teubner, 5. Auflage, 2011
  - Angelika Steger
    ▸ Diskrete Strukturen — Band 1: Kombinatorik, Graphentheorie, Algebra
    Springer-Verlag, 2. Auflage, 2007

Termine

Vorlesung:

- dienstags, 17:15–18:45 Uhr, AudiMax

Termine

Vorlesung:

- dienstags, 17:15–18:45 Uhr, AudiMax

Prüfung:

- Modul- und Veranstaltungsanmeldung im AlmaWeb

  Anmeldefrist: 22. Oktober 2018 (Montag)
- Abmeldungen noch bis zum 12. Januar 2019, Mitternacht möglich

Termine

Vorlesung:

- dienstags, 17:15–18:45 Uhr, AudiMax

Prüfung:

- Modul- und Veranstaltungsanmeldung im AlmaWeb

  Anmeldefrist: 22. Oktober 2018 (Montag)
- Abmeldungen noch bis zum 12. Januar 2019, Mitternacht möglich

Übungen (jede A-Woche):

- Hörsaalübung montags, 9:15–10:45 Uhr, Hs. 7
  (Alternativtermin für 3.12.: Montag, der 10.12., 9:15–10:45 Uhr, Hs. 7)
- indiv. Übungsgruppen (entfallen Mittwoch, den 21.11.
  — bitte Alternativtermin in der gleichen Woche wählen)

Übungstermine:

Wochentag	Zeit	Raum	Übungsleiter
montags	9:15–10:45	Hs. 7	Mirko Schulze
mittwochs	7:30–9:00	SG 3-11	Doreen Götze
mittwochs	13:15–14:45	SG 3-11	Martin Böhm
mittwochs	13:15–14:45	SG 3-13	Erik Paul
donnerstags	7:30–9:00	SG 3-13	Doreen Götze
donnerstags	11:15–12:45	SG 3-13	Doreen Götze
donnerstags	11:15–12:45	SG 3-11	Martin Böhm
freitags	9:15–10:45	SG 3-13	Doreen Götze
freitags	9:15–10:45	SG 3-11	Erik Paul
freitags	13:15–14:45	SG 3-13	Erik Paul
freitags	13:15–14:45	SG 3-11	Tobias Rosenkranz
freitags	15:15–16:45	SG 3-11	Erik Paul

Hausaufgaben

- jede B-Woche neue Übungsserie; jeweils 2 Wochen Bearbeitungszeit
- Abgabe der Hausaufgaben vor der Vorlesung
  (Abgabedatum steht auf dem Aufgabenblatt)

Hausaufgaben

- jede B-Woche neue Übungsserie; jeweils 2 Wochen Bearbeitungszeit
- Abgabe der Hausaufgaben vor der Vorlesung
  (Abgabedatum steht auf dem Aufgabenblatt)
- Prüfungsvorleistung: Übungsschein
  erteilt bei mind. 60 Punkten (50%) der 6 Serien

Punkte	Konsequenz
≤ 59	Prüfungsteilnahme ausgeschlossen
60–69	Prüfungsteilnahme möglich
70–79	+1 Bonuspunkt ($\approx 1,7\%$) für die Prüfung
80–89	+2 Bonuspunkte ($\approx 3,3\%$) für die Prüfung
90–99	+3 Bonuspunkte ($\approx 5,0\%$) für die Prüfung
100–109	+4 Bonuspunkte ($\approx 6,7\%$) für die Prüfung
110–119	+5 Bonuspunkte ($\approx 8,3\%$) für die Prüfung
≥ 120	+6 Bonuspunkte ($\approx 10,0\%$) für die Prüfung

Vorlesungsstruktur

1. Mathematische Grundlagen
   - Aussagen- und Prädikatenlogik
   - Naive Mengenlehre
   - Relationen und Funktionen
2. Diskrete Strukturen
   - Kombinatorik und Stochastik
   - Algebraische Strukturen
   - Bäume und Graphen
   - Arithmetik

Heutige Vorlesung

- Einführung Aussagenlogik
- Äquivalenz von komplexen Aussagen
- Tautologien und Unerfüllbarkeit

Bitte Fragen direkt stellen!

StGB § 211 — Mord

1. Der Mörder wird mit lebenslanger Freiheitsstrafe bestraft.
2. Mörder ist, wer
   - aus Mordlust, zur Befriedigung des Geschlechtstriebs, aus Habgier oder sonst aus niedrigen Beweggründen,
   - heimtückisch oder grausam oder mit gemeingefährlichen Mitteln oder
   - um eine andere Straftat zu ermöglichen oder zu verdecken,

   einen Menschen tötet.

Aussagenlogik — Motivation

Wir nehmen eine Person ‘Alice’ an und beziehen uns auf sie

- Gesetz enthält Aussagen

Alice-ist-Mörder	Alice-tötet-aus-Habgier
Alice-bekommt-lebenslang	Alice-tötet-heimtückisch

Aussagenlogik — Motivation

Wir nehmen eine Person ‘Alice’ an und beziehen uns auf sie

- Gesetz enthält Aussagen

  Alice-ist-Mörder   Alice-tötet-aus-Habgier

  Alice-bekommt-lebenslang   Alice-tötet-heimtückisch

- Aussagen werden kombiniert

  Alice-tötet-aus-Habgier **oder** Alice-tötet-heimtückisch

  wenn Alice-ist-Mörder **dann** Alice-bekommt-lebenslang

Aussagenlogik — Motivation

Wir nehmen eine Person ‘Alice’ an und beziehen uns auf sie

- Gesetz enthält Aussagen

  Alice-ist-Mörder Alice-tötet-aus-Habgier

  Alice-bekommt-lebenslang Alice-tötet-heimtückisch

- Aussagen werden kombiniert

  Alice-tötet-aus-Habgier oder Alice-tötet-heimtückisch

  wenn Alice-ist-Mörder dann Alice-bekommt-lebenslang

- Erlaubt Folgerungen

  wenn Alice-tötet-aus-Habgier dann Alice-ist-Mörder

StVO I, § 30(3) — Sonn- und Feiertagsfahrverbot [editiert]

An Sonn- und Feiertagen dürfen in der Zeit 0.00–22.00 Uhr Lastkraftwagen mit einer zulässigen Gesamtmasse über 7,5 t sowie Anhänger hinter Lastkraftwagen nicht verkehren. Dies gilt nicht für

1. [. . .]
2. die Beförderung von
   - (a) frischer Milch und frischen Milcherzeugnissen,
   - (b) frischem Fleisch und frischen Fleischerzeugnissen,
   - (c) frischen Fischen, lebenden Fischen und frischen Fischerzeugn.,
   - (d) leicht verderblichem Obst und Gemüse,
3. Leerfahrten im Zusammenhang mit Fahrten nach 2,
4. [. . .]

StVO I, § 30(3) — Sonn- und Feiertagsfahrverbot [editiert]

An Sonn- und Feiertagen dürfen in der Zeit 0.00–22.00 Uhr Lastkraftwagen mit einer zulässigen Gesamtmasse über 7,5 t sowie Anhänger hinter Lastkraftwagen nicht verkehren. Dies gilt nicht für

1. [...] und/oder
2. die Beförderung von
   (a) frischer Milch und frischen Milcherzeugnissen,
   (b) frischem Fleisch und frischen Fleischerzeugnissen,
   (c) frischen Fischen, lebenden Fischen und frischen Fischerzeugn.,
   (d) leicht verderblichem Obst und Gemüse, und/oder
3. Leerfahrten im Zusammenhang mit Fahrten nach 2, und/oder
4. [...]

StVO I, § 30(3) — Sonn- und Feiertagsfahrverbot [editiert]

An Sonn- und Feiertagen dürfen in der Zeit 0.00–22.00 Uhr Lastkraftwagen mit einer zulässigen Gesamtmasse über 7,5 t sowie Anhänger hinter Lastkraftwagen nicht verkehren. Dies gilt nicht für

1. [. . .] und/oder
2. die Beförderung von
   - (a) frischer Milch und frischen Milcherzeugnissen,
   - (b) frischem Fleisch und frischen Fleischerzeugnissen,
   - (c) frischen Fischen, lebenden Fischen und frischen Fischerzeugn.,
   - (d) leicht verderblichem Obst und Gemüse, und/oder
3. Leerfahrten im Zusammenhang mit Fahrten nach 2, und/oder
4. [. . .]

§1.1 Definition (Aussage)

Aussage ist eine Repräsentation eines Satzes,
der entweder wahr (1) oder falsch (0) ist

- Aussage hat also genau einen Wahrheitswert
- der Wahrheitswert kann unbekannt (oder auch nicht feststellbar) sein

§1.1 Definition (Aussage)

Aussage ist eine Repräsentation eines Satzes,
der entweder wahr (1) oder falsch (0) ist

- Aussage hat also genau einen Wahrheitswert
- der Wahrheitswert kann unbekannt (oder auch nicht feststellbar) sein

Beispiele

- *"L befördert frische Milch"* ist eine Aussage
  für einen geg. Lastkraftwagen L
- *"D ist ein Feiertag in Sachsen"* ist eine Aussage
  für ein geg. Datum D

§1.1 Definition (Aussage)

Aussage ist eine Repräsentation eines Satzes,
der entweder wahr (1) oder falsch (0) ist

- Aussage hat also genau einen Wahrheitswert
- der Wahrheitswert kann unbekannt (oder auch nicht feststellbar) sein

Beispiele

- *"L befördert frische Milch"* ist eine Aussage
  für einen geg. Lastkraftwagen L
- *"D ist ein Feiertag in Sachsen"* ist eine Aussage
  für ein geg. Datum D
- *"2 ist eine Primzahl"* ist eine wahre Aussage
- "$2 + 2 = 5$" ist eine falsche Aussage

weitere Beispiele

- *"Jede gerade natürliche Zahl $n > 2$ ist die Summe zweier Primzahlen"* ist eine Aussage
  Wahrheitswert unbekannt (Goldbachs Vermutung, 1742)

Christian Goldbach (* 1690; † 1764)

- studierte Medizin und Jura in Königsberg
- erlernte später Mathematik
- Tutor von Zar Peter II

weitere Beispiele

- *“Jede gerade natürliche Zahl $n > 2$ ist die Summe zweier Primzahlen”* ist eine Aussage
  Wahrheitswert unbekannt (Goldbachs Vermutung, 1742)
- *“Dieser Satz ist falsch”* ist keine Aussage
  kann semantisch weder wahr noch falsch sein — Selbstreferenz

Christian Goldbach (* 1690; † 1764)

- studierte Medizin und Jura in Königsberg
- erlernte später Mathematik
- Tutor von Zar Peter II

Aussagenlogik — Junktoren

Gegenstand der Logik:

- nicht die Wahrheitsbestimmung von Basis-Aussagen
  (dies ist Aufgabe der Fachgebiete)
- Formalisierung von (komplexen) Aussagenverknüpfungen
- Bewertung von Aussagenverknüpfungen
  basierend auf Wahrheitswerten der Teilaussagen
- Schlussregeln

Aussagenlogik — Junktoren

Gegenstand der Logik:

- nicht die Wahrheitsbestimmung von Basis-Aussagen
  (dies ist Aufgabe der Fachgebiete)
- Formalisierung von (komplexen) Aussagenverknüpfungen
- Bewertung von Aussagenverknüpfungen
  basierend auf Wahrheitswerten der Teilaussagen
- Schlussregeln

Notation (Junktoren)

- (Basis-)Aussagen $A, B, C, \ldots$ aber auch "hatFisch"
- Negation $\neg A$ — nicht A
- Konjunktion $A \wedge B$ — A und B
- Disjunktion $A \vee B$ — A oder B
- Implikation $A \rightarrow B$ — wenn A, dann B
- beidseitige Implikation $A \leftrightarrow B$ — A genau dann, wenn B

Aussagenlogik — Junktoren

Erklärungsversuch Notation

- Konjunktion $A \wedge B$ (<u>u</u>nten offen) $\qquad$ A <u>u</u>nd B
  - entspricht $A \cap B$; Elemente von $A \cap B$ müssen in A und B liegen
- Disjunktion $A \vee B$ (<u>o</u>ben offen) $\qquad$ A <u>o</u>der B
  - entspricht $A \cup B$; Elemente von $A \cup B$ müssen in A oder B liegen

§1.2 Definition (Interpretation)

- Jede Aussage und jede Aussagenverknüpfung
  ist entweder wahr (1) oder falsch (0)
- Wahrheit von Aussagenverknüpfungen ergibt sich aus Wahrheit der Teilaussagen gemäß folgender Tabelle

§1.2 Definition (Interpretation)

- Jede Aussage und jede Aussagenverknüpfung ist entweder wahr (1) oder falsch (0)
- Wahrheit von Aussagenverknüpfungen ergibt sich aus Wahrheit der Teilaussagen gemäß folgender Tabelle

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Schwierigkeit: Implikation

- $A \to B$ besteht aus Vorbedingung A und Folgerung B
- $A \to B$ ist genau dann falsch, wenn die Vorbedingung A wahr ist, aber die Folgerung B nicht

Schwierigkeit: Implikation

- $A \rightarrow B$ besteht aus Vorbedingung A und Folgerung B
- $A \rightarrow B$ ist genau dann falsch, wenn die Vorbedingung A wahr ist, aber die Folgerung B nicht

Beispiel

- “Wenn es regnet, dann nehme ich den Schirm mit.” ist eine Aussage
- Formalisierung als Regen $\rightarrow$ Schirm

Schwierigkeit: Implikation

- $A \rightarrow B$ besteht aus Vorbedingung A und Folgerung B
- $A \rightarrow B$ ist genau dann falsch, wenn die Vorbedingung A wahr ist, aber die Folgerung B nicht

Beispiel

- "Wenn es regnet, dann nehme ich den Schirm mit." ist eine Aussage
- Formalisierung als Regen $\rightarrow$ Schirm
- Die Aussage ist wahr, wenn es nicht regnet (Vorbedingung falsch)
  (Ich kann den Schirm mitnehmen oder daheim lassen)

Aussagenlogik — Junktoren

Schwierigkeit: Implikation

- $A \rightarrow B$ besteht aus Vorbedingung A und Folgerung B
- $A \rightarrow B$ ist genau dann falsch, wenn die Vorbedingung A wahr ist, aber die Folgerung B nicht

Beispiel

- "Wenn es regnet, dann nehme ich den Schirm mit." ist eine Aussage
- Formalisierung als Regen $\rightarrow$ Schirm
- Die Aussage ist wahr, wenn es nicht regnet (Vorbedingung falsch)
  (Ich kann den Schirm mitnehmen oder daheim lassen)
- Die Aussage ist falsch, wenn es regnet (Vorbedingung wahr)
  und ich den Schirm nicht mitnehme (Folgerung falsch)

§1.3 Definition (Atome und Formeln)

- (aussagenlogische) Atome = primitive Aussagen wie A, B
- (aussagenlogische) Formeln = Aussagen inkl. Verknüpfungen

Bermerkungen:

- Wahrheit eines Atoms abhängig von fachlicher “Aussage”
- Wahrheit einer Formel nur abh. von Wahrheit ihrer Atome

Aussagenlogik — Wahrheitswertetabelle

- wir sind an wahren Aussagen (Theoremen) interessiert

$\rightarrow$ Erkenntnisgewinn und Verständnis der Welt

Aussagenlogik — Wahrheitswertetabelle

- wir sind an wahren Aussagen (Theoremen) interessiert

$\rightarrow$ Erkenntnisgewinn und Verständnis der Welt

- die Wahrheit einer Aussage muss jedoch nachgewiesen werden

$\rightarrow$ Beweis

Aussagenlogik — Wahrheitswertetabelle

- wir sind an wahren Aussagen (Theoremen) interessiert

$\rightarrow$ Erkenntnisgewinn und Verständnis der Welt

- die Wahrheit einer Aussage muss jedoch nachgewiesen werden

$\rightarrow$ Beweis

- einfachste Beweismethode ist die Wahrheitswertetabelle

$\rightarrow$ Nachweis der Wahrheit der Aussage
unabh. von der Wahrheit ihrer Atome
durch tabellarische Auflistung aller Möglichkeiten

- funktioniert evtl. nicht bei Abhängigkeiten zw. Atomen

Aufstellung der Wahrheitswertetabelle:

1. Identifikation aller vorkommenden Atome $A_1, \ldots, A_n$

Aufstellung der Wahrheitswertetabelle:

1. Identifikation aller vorkommenden Atome $A_1, \ldots, A_n$
2. Auflistung aller 2^n Wahrheitswertbelegungen für $A_1, \ldots, A_n$

A_1	A_2	$\cdots$	A_{n-1}	A_n	$\cdots$
0	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$
0	0	$\cdots$	0	1	$\cdots$
0	0	$\cdots$	1	0	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
1	1	$\cdots$	1	1	$\cdots$

- beginnend mit 0 in der letzten Spalte A_n wechseln sich 0 und 1 ab
- in der vorherigen Spalte wechseln 0 und 1 nur halb so oft
  (Wechsel alle zwei Zeilen in Spalte A_{n-1}, alle vier Zeilen in A_{n-2}, etc.)

Aussagenlogik — Wahrheitswertetabelle

Aufstellung der Wahrheitswertetabelle:

1. Identifikation aller vorkommenden Atome $A_1, \ldots, A_n$
2. Auflistung aller 2^n Wahrheitswertbelegungen für $A_1, \ldots, A_n$

A_1	A_2	$\cdots$	A_{n-1}	A_n	$\cdots$
0	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$
0	0	$\cdots$	0	1	$\cdots$
0	0	$\cdots$	1	0	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
1	1	$\cdots$	1	1	$\cdots$

- beginnend mit 0 in der letzten Spalte A_n wechseln sich 0 und 1 ab
- in der vorherigen Spalte wechseln 0 und 1 nur halb so oft
  (Wechsel alle zwei Zeilen in Spalte A_{n-1}, alle vier Zeilen in A_{n-2}, etc.)
- Berechnung der Wahrheitswerte der Teilformeln

§1.4 Beispiel

- “Wenn A und B gelten, dann gilt A.”
  (dabei können A und B beliebig komplexe Aussagen sein)

§1.4 Beispiel

- "Wenn A und B gelten, dann gilt A."
  (dabei können A und B beliebig komplexe Aussagen sein)
- Formalisierung: $(A \wedge B) \rightarrow A$

§1.4 Beispiel

- "Wenn A und B gelten, dann gilt A."
  (dabei können A und B beliebig komplexe Aussagen sein)
- Formalisierung: $(A \wedge B) \to A$

Beweis durch Wahrheitswertetabelle.

A	B	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \to A$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

$\square$

§1.4 Beispiel

- "Wenn A und B gelten, dann gilt A."
  (dabei können A und B beliebig komplexe Aussagen sein)
- Formalisierung: $(A \wedge B) \to A$

Beweis durch Wahrheitswertetabelle.

A	B	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \to A$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

$\square$

§1.5 Beispiel

- "Eine natürliche Zahl, die nicht ungerade ist, ist gerade."
- Formalisierung: $\neg U \to G$

§1.5 Beispiel

- “Eine natürliche Zahl, die nicht ungerade ist, ist gerade.”
- Formalisierung: $\neg U \to G$

Beweisversuch mit Wahrheitswertetabelle (ohne Fachwissen).

U	G	$\neg U$	$\neg U \to G$
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	0	1

§1.5 Beispiel

- "Eine natürliche Zahl, die nicht ungerade ist, ist gerade."
- Formalisierung: $\neg U \to G$

Beweisversuch mit Wahrheitswertetabelle (ohne Fachwissen).

U	G	$\neg U$	$\neg U \to G$
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	0	1

§1.5 Beispiel

- “Eine natürliche Zahl, die nicht ungerade ist, ist gerade.”
- Formalisierung: $\neg U \to G$
- Fachwissen: “Jede natürliche Zahl ist gerade oder ungerade.”
- neue Formalisierung: $(U \vee G) \to (\neg U \to G)$

§1.5 Beispiel

- "Eine natürliche Zahl, die nicht ungerade ist, ist gerade."
- Formalisierung: $\neg U \to G$
- Fachwissen: "Jede natürliche Zahl ist gerade oder ungerade."
- neue Formalisierung: $(U \vee G) \to (\neg U \to G)$

Beweis durch Wahrheitswertetabelle.

U	G	$U \vee G$	$\neg U$	$\neg U \to G$	$(U \vee G) \to (\neg U \to G)$
0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1

□

§1.5 Beispiel

- "Eine natürliche Zahl, die nicht ungerade ist, ist gerade."
- Formalisierung: $\neg U \rightarrow G$
- Fachwissen: "Jede natürliche Zahl ist gerade oder ungerade."
- neue Formalisierung: $(U \vee G) \rightarrow (\neg U \rightarrow G)$

Beweis durch Wahrheitswertetabelle.

U	G	$U \vee G$	$\neg U$	$\neg U \rightarrow G$	$(U \vee G) \rightarrow (\neg U \rightarrow G)$
0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1

$\square$

§1.5 Beispiel

- "Eine natürliche Zahl, die nicht ungerade ist, ist gerade."
- Formalisierung: $\neg U \to G$
- Fachwissen: "Jede natürliche Zahl ist gerade oder ungerade."
- neue Formalisierung: $(U \vee G) \to (\neg U \to G)$

Beweis durch Wahrheitswertetabelle.

U	G	$U \vee G$	$\neg U$	$\neg U \to G$	$(U \vee G) \to (\neg U \to G)$
0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1

$\square$

§1.5 Beispiel

- “Eine natürliche Zahl, die nicht ungerade ist, ist gerade.”
- Formalisierung: $\neg U \to G$
- Fachwissen: “Jede natürliche Zahl ist gerade oder ungerade.”
- neue Formalisierung: $(U \vee G) \to (\neg U \to G)$

Beweis durch Wahrheitswertetabelle.

U	G	$U \vee G$	$\neg U$	$\neg U \to G$	$(U \vee G) \to (\neg U \to G)$
0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1

□

Aussagenlogik — Formalisierung

StVO I, § 30(3) — Sonn- und Feiertagsfahrverbot [editiert]

[. . .] Dies gilt nicht für

1. [. . .]
2. die Beförderung von
   a. frischer Milch und frischen Milcherzeugnissen,
   b. frischem Fleisch und frischen Fleischerzeugnissen,
   c. frischen Fischen, lebenden Fischen und frischen Fischerzeugn.,
   d. leicht verderblichem Obst und Gemüse,

[. . .]

Formalisierung:

- $\neg((\text{hatMilch} \wedge \text{hatMilchE}) \wedge (\text{hatFleisch} \wedge \text{hatFleischE}) \wedge \cdots)$
- $\neg((\text{hatMilch} \vee \text{hatMilchE}) \wedge (\text{hatFleisch} \vee \text{hatFleischE}) \wedge \cdots)$
- $\neg((\text{hatMilch} \wedge \text{hatMilchE}) \vee (\text{hatFleisch} \wedge \text{hatFleischE}) \vee \cdots)$
- $\neg((\text{hatMilch} \vee \text{hatMilchE}) \vee (\text{hatFleisch} \vee \text{hatFleischE}) \vee \cdots)$

Aussagenlogik — Formalisierung

StVO I, § 30(3) — Sonn- und Feiertagsfahrverbot [editiert]

[. . .] Dies gilt nicht für

1. [. . .]
2. die Beförderung von
   a. frischer Milch und frischen Milcherzeugnissen,
   b. frischem Fleisch und frischen Fleischerzeugnissen,
   c. frischen Fischen, lebenden Fischen und frischen Fischerzeugn.,
   d. leicht verderblichem Obst und Gemüse,

[. . .]

Formalisierung:

- $\neg((\text{hatMilch} \wedge \text{hatMilchE}) \wedge (\text{hatFleisch} \wedge \text{hatFleischE}) \wedge \cdots)$
- $\neg((\text{hatMilch} \vee \text{hatMilchE}) \wedge (\text{hatFleisch} \vee \text{hatFleischE}) \wedge \cdots)$
- $\neg((\text{hatMilch} \wedge \text{hatMilchE}) \vee (\text{hatFleisch} \wedge \text{hatFleischE}) \vee \cdots)$
- $\neg((\text{hatMilch} \vee \text{hatMilchE}) \vee (\text{hatFleisch} \vee \text{hatFleischE}) \vee \cdots)$

hM	hME	hF	hFE	hM $\wedge$ hME	hF $\wedge$ hFE	hM $\vee$ hME	hF $\vee$ hFE
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Frage

Welche (weiteren) Beweistechniken kennen Sie?

Frage

Welche (weiteren) Beweistechniken kennen Sie?

Mögliche Antworten:

- beidseitige Implikationen
- Implikationskette
- Ringschluss
- indirekter Beweis
- Kontraposition
- vollständige Induktion
- ...

§1.6 Definition (Äquivalenz)

Zwei Aussagen sind äquivalent, genau dann wenn (gdw.)
deren Wahrheitswerte für alle Belegungen der Atome übereinstimmen

§1.6 Definition (Äquivalenz)

Zwei Aussagen sind äquivalent, genau dann wenn (gdw.)
deren Wahrheitswerte für alle Belegungen der Atome übereinstimmen

Beispiele

- $U \vee G$ und $\neg U \rightarrow G$ sind äquivalent (siehe §1.5)
- $A \vee B$ und $A \rightarrow B$ sind nicht äquivalent (siehe §1.2)

Aussagenlogik — Äquivalenz

äquivalente Formeln		Bezeichnung
$A \wedge B$	$B \wedge A$	Kommutativität von $\wedge$
$A \vee B$	$B \vee A$	Kommutativität von $\vee$
$(A \wedge B) \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$	Assoziativität von $\wedge$
$(A \vee B) \vee C$	$A \vee (B \vee C)$	Assoziativität von $\vee$
$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Distributivität von $\wedge$
$A \vee (B \wedge C)$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	Distributivität von $\vee$
$A \wedge A$	A	Idempotenz von $\wedge$
$A \vee A$	A	Idempotenz von $\vee$
$\neg\neg A$	A	Involution $\neg$
$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$	deMorgan-Gesetz für $\wedge$
$\neg(A \vee B)$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$	deMorgan-Gesetz für $\vee$
$A \wedge (A \vee B)$	A	Absorptionsgesetz für $\wedge$
$A \vee (A \wedge B)$	A	Absorptionsgesetz für $\vee$

§1.7 Distributivität von $\vee$

$F_1 = A \vee (B \wedge C)$ und $F_2 = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ sind äquivalent

§1.7 Distributivität von $\vee$

$F_1 = A \vee (B \wedge C)$ und $F_2 = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ sind äquivalent

Beweis mit Wahrheitswertetabelle.

A	B	C	$B \wedge C$	F_1	$A \vee B$	$A \vee C$	F_2
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

$\square$

§1.7 Distributivität von $\vee$

$F_1 = A \vee (B \wedge C)$ und $F_2 = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ sind äquivalent

Beweis mit Wahrheitswertetabelle.

A	B	C	$B \wedge C$	F_1	$A \vee B$	$A \vee C$	F_2
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

$\square$

§1.7 Distributivität von $\vee$

$F_1 = A \vee (B \wedge C)$ und $F_2 = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ sind äquivalent

Beweis mit Wahrheitswertetabelle.

A	B	C	$B \wedge C$	F_1	$A \vee B$	$A \vee C$	F_2
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

□

§1.7 Distributivität von $\vee$

$F_1 = A \vee (B \wedge C)$ und $F_2 = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ sind äquivalent

Beweis mit Wahrheitswertetabelle.

A	B	C	$B \wedge C$	F_1	$A \vee B$	$A \vee C$	F_2
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

□

§1.7 Distributivität von $\vee$

$F_1 = A \vee (B \wedge C)$ und $F_2 = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ sind äquivalent

Beweis mit Wahrheitswertetabelle.

A	B	C	$B \wedge C$	F_1	$A \vee B$	$A \vee C$	F_2
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

□

§1.7 Distributivität von $\vee$

$F_1 = A \vee (B \wedge C)$ und $F_2 = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ sind äquivalent

Beweis mit Wahrheitswertetabelle.

A	B	C	$B \wedge C$	F_1	$A \vee B$	$A \vee C$	F_2
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

□

Zusammenfassung

- Aussagenlogische Formeln
- Interpretation
- Äquivalenz

Erstes Übungs- und Hausaufgabenblatt steht demnächst im AlmaWeb.