Musterlösungen zu "Dynamische Systeme und Autonome Agenten".

(R. Der/ M. Herrmann)

Serie 2.

1. Aufgabe (Je Teilaufgabe 1 Pkt.): Konkret zu behandeln war das folgende System
$$\dot{x} = x\,(c - x) \tag{1}$$
   (a) Fixpunkte sind $x^* = 0$ und $x^* = c$.

   (b) Stabiltität der Fixpunkte: Für $x^* = 0$ gilt: Das System reduziert sich in der linearen Approximation auf $\dot{x} = cx$ so dass der FP für $c < 0$ stabil und für $c > 0$ instabil ist. Für $c = 0$ reduziert sich das System auf $\dot{x} = -x^2$ und hat dort einen stabilen FP dessen Einzugsbereich die positive x-Achse ist. Für $x^* = c$ gilt. Wir setzen $x = c + u$ und erhalten in der Nähe des FP $\dot{u} = -cu$. Es gilt folglich die gleiche Diskussion wie an $x^* = 0$ nur mit dem umgekehrten Vorzeichen für c. Die FPe tauschen mit dem Vorzeichen von c ihr Stabilitätsverhalten.

   (c) Phasenporträt (vgl. Kap. 3.1 im Skript): Stellen Sie die Phasenporträts für qualitativ verschiedene Werte von c dar. Wir haben es mit einer transkritischen Bifurkation zu tun, s. Kap. 5.4 im Skript.

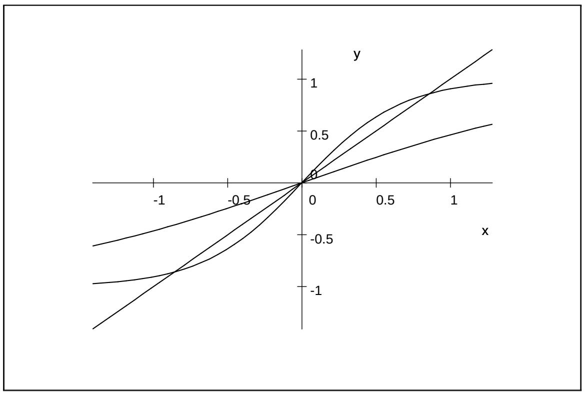
   (d) Verhalten des Roboters. Für $c > 0$ gilt: Der FP an c ist stabil, sein Einzugsbereich ist das gesamte Interval $x > 0$, d.h. falls $x\,(0) > 0$ konvergiert die Geschwindigkeit des Roboters gegen c. Da $x^* = 0$ instabil, wird für $x\,(0) < 0$ die Geschwindigkeit $x \to -\infty$ divergieren. Für $c < 0$ konvergiert $x \to 0$ falls $x\,(0) > c$ und $x \to -\infty$ falls $x\,(0) < c$.

2. Aufgabe (Je Teilaufgabe 2 Pkte.): Betrachten Sie die oben eingeführte einfache sensomotorische Schleife wobei der Controller jetzt die neue Sollgeschwindigkeit als
$$y = \tanh\,(cx)$$
ausgibt, wobei c wieder ein Parameter ist. Das Gleichung (1) entsprechende DS ist folglich
$$\dot{x} = \tanh\,(cx) - x \tag{2}$$

   Teilaufgaben:

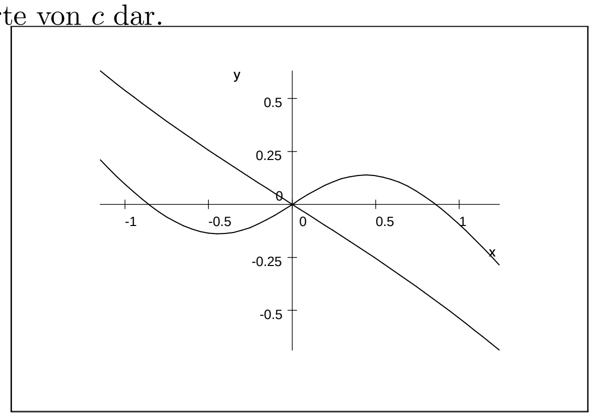
   (a) Fixpunkte: Finden Sie qualitativ (grafische Lösung) die Fixpunkte des DS (2).

$$\tanh\,(0.2x)$$



Grafische Lösung der FP-Gleichung $\tanh(cx) = x$. Dargestellt ist $\tanh(cx)$für $c = 0.5$ und $c = 1.5$ (gepunktet). Die Fixpunkte ergeben sich aus dem Schnittpunkt der $\tanh(cx)$ Kurve mit x. Für $c = 0.5$ gibt es nur den FP an $x = 0$, für $c = 1.5$ wird dieser instabil und es gibt dafür zwei weitere FP an $x \approx 0.86$.

(b) Phasenporträt: Stellen Sie die Phasenporträts für qualitativ verschiedene Werte von c dar.



Phasenporträt für $\dot{x} = f(x)$ mit $f(x) = \tanh(cx) - x$ für $c = 0.5$ bzw. $c = 1.5$. Pfeilrichtungen verlaufen auf der Kurve für $c = 0.5$ auf den Nullpunkt zu. Für $c = 1.5$ laufen sie jeweils auf die Fixpunkte bei $x \approx \pm 0.8$ zu (von 0 aus nach aussen).

(c) Stabilität der Fixpunkte: Für die Stabilität des DS $\dot{x} = f(x)$ am FP a ist das Vorzeichen der Ableitung $f'(a)$ entscheidend. Für den $\tanh()$ gilt die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial u}\tanh(u) = 1 - \tanh^2(u)$$

Es ist folglich

$$f'(x) = \frac{\partial}{\partial x}(\tanh(cx) - x) = c - c\tanh^2(cx) - 1$$

An $x = 0$ ist $f'(0) = c - 1$ so dass der FP stabil ist solange $c < 1$. Für $c > 1$ ergeben sich zwei neue FP (s. Abbildungen), ihre genaue Lage kann aber nicht analytisch bestimmt werden, da sie die Lösung der transzendenten Gleichung $\tanh(cx) = x$ erfordert. Aus der Abbildung ist aber eindeutig zu erkennen, dass im jeweiligen FP $\frac{\partial}{\partial x}\tanh(cx) < 1$ und folglich $f'(x) < 0$ gilt.

(d) Bifurkationsdiagramm: Wir haben eine typische Pitchfork (Heugabel) Bifurkation vorliegen mit dem Bifurkationspunkt an $c = 1$.

3. Aufgabe (Je Teilaufgabe 2 Pkte.): Einfluss eines Bias: Im Unterschied zum DS (2) enthalte der Controller jetzt einen Bias H, d.h. wir haben das DS

$$\dot{x} = \tanh(cx + H) - x \tag{3}$$

Teilaufgaben:

(a) Diskutieren Sie für $0 < c << 1$ Lage und Stabilität der Fixpunkte als Funktion von H. Wir approximieren

$$\dot{x} = \gamma x + H$$

mit $\gamma = c - 1$. Für $\gamma = 0$ ist $\dot{x} = H$ also kein FP solange $H \neq 0$. Für $\gamma \neq 0$ führen wir eine neue Variable $u = x + H/\gamma$ ein und erhalten

$$\dot{u} = \gamma u$$

mit stabilem (instabilem) FP für $\gamma < 0$ ($\gamma > 0$) an $x = -H/\gamma$.

(b) Für $c >> 1$ ist $\tanh(cx) \approx \pm 1$ für $|x| > \varepsilon$ wobei $\varepsilon > 0$. Die stabilen FPe liegen also an ± 1. Der FP liegt an 1 solange $cx+H > \varepsilon$ also $cx > -H$ gilt. Gerät H deutlich unter den Wert $H = -cx$, dann springt der FP auf die andere Seite.

(c) Für $c >> 1$ zeigt das System ein hysteretisches Verhalten: Sei $c >> 1$ und x am FP $x = a$ mit $a \approx 1$. Ausserdem sei $H > 0$. Wir können nun H solange verkleinern, bis H hinreichend weit unter den Wert $H = -ca$ gerät. Dann wird der FP an a instabil und der neue FP ist $x = -a$. Wir können nun H wieder so lange vergrößern bis $H - ca > 0$. Erst dann springt der FP wieder um. Das Gebiet von H in dem ein FP stabil ist hängt also davon ab, welchen Wert die Zustandsvariable x vorher hatte. Diese Eigenschaft nennt man Hysterese.

4. Aufgabe (6 Pkte.): Betrachten Sie das DS

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + cx + xy^2\\ \dot{y} &= x + cy - x^2\end{aligned}$$

Teilaufgaben:

(a) Linearisieren Sie das System um den Ursprung ($x = 0$, $y = 0$) und zeigen Sie, dass für $c = 0$ alle Eigenwerte rein imaginär sind. (2 Pkte.)

(b) Das System durchläuft eine Hopf-Bifurkation an $c = 0$. Zeigen Sie das durch Plot geeigneter Phasenporträts (geht nur numerisch). Ist diese subkritisch, superkritisch oder entartet? (4 Pkte.)

Lösung von Aufgabe 4 auf extra Blatt.